

Κεφάλαιο 1

Διανύσματα και συναρτήσεις

Πολλές από τις μαθηματικές ιδιότητες των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών διατυπώνονται γεωμετρικά και με χρήση βασικών εννοιών της θεωρίας συνόλων. Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα εξετάσουμε μερικές από τις έννοιες που θα μας χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια. Για παράδειγμα, επειδή ο διανυσματικός λογισμός προκύπτει με φυσικό τρόπο από τη διανυσματική άλγεβρα, είναι χρήσιμο να αρχίσουμε τη μελέτη μας από αυτή. Θα συνεχίσουμε εξετάζοντας συνοπτικά τις βασικές αρχές της θεωρίας συνόλων, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε σε ολόκληρο το βιβλίο και οι οποίες θα μας βοηθήσουν πράγματι να ορίσουμε πολλές θεμελιώδεις έννοιες, τόσο του διαφορικού όσο και του ολοκληρωτικού λογισμού. Θα εξετάσουμε επίσης τα συστήματα συντεταγμένων και την έννοια των συνόλων στάθμης. Και τα δύο αυτά θέματα βρίσκουν εφαρμογή στον διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, καθώς και στον διανυσματικό λογισμό.

Περιττεύει να αναφέρουμε ότι είναι χρήσιμη μια επανάληψη των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Θα την αρχίσουμε σε αυτό το κεφάλαιο (Ενότητα 1.Γ), αλλά θα τη συνεχίσουμε όταν χρειαστεί στα Κεφάλαια 2, 3 και 4.

Για να γίνει καλύτερα αντιληπτή η συμπεριφορά των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών που ορίζονται σε χωρία δύο ή περισσότερων διαστάσεων, θεωρώ χρήσιμη τη γραφική αναπαράσταση τουλάχιστον των πεδίων ορισμού τους. Μερικές φορές ωστόσο είναι δυνατόν, αλλά και αναγκαίο, να αναπαραστήσουμε γραφικά ολόκληρο το γράφημα μιας συνάρτησης ή κάποια προσέγγισή του. Κάποιοι προτιμούν τις οπτικές αναπαραστάσεις και την οπτική πληροφορία, ενώ κάποιοι άλλοι προτιμούν τις αφηρημένες έννοιες. Ό,τι και να προτιμάτε, η ικανότητα σχεδίασης γραφημάτων είναι πάντα χρήσιμη. Γι' αυτό, σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε επίσης μερικές βασικές τριδιάστατες δομές και θα δείξουμε πώς μπορούν να σχεδιαστούν με χρήση του MATLAB®. Ασφαλώς, εξίσου καλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και άλλο λογισμικό. Για την περίπτωση όπου ο αναγνώστης δεν έχει πρόσβαση σε κατάλληλο λογισμικό, έχω περιλάβει μια υποενότητα, στόχος της οποίας είναι να καταδείξει, μέσω παραδειγμάτων, πώς μπορεί να κατασκευαστεί μια εικόνα ενός χωρίου ή του γραφήματος μιας συνάρτησης άμεσα από έναν μαθηματικό τύπο ή εξίσωση. Μολονότι δεν είναι δυνατόν να δώσουμε μια γενική διαδικασία που να δουλεύει σε όλες τις περιπτώσεις, μερικά από τα βήματα μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλες περιστάσεις.

1.A Μερικές βασικές αρχές της άλγεβρας διανυσμάτων

Μοναδιαία διανύσματα στον τριδιάστατο χώρο

Έστω $a > 0$ μια βαθμωτή ποσότητα και έστω

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\alpha, \beta, \gamma) \\ &= \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k} \\ &= \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ένα διάνυσμα του \mathbb{R}^3 (βλ. Ενότητα 1.B) με συνιστώσες x, y και z τα α, β και γ αντίστοιχα.

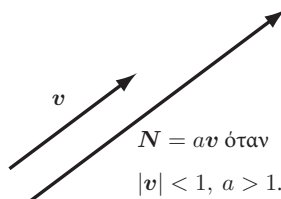
Γράψαμε το διάνυσμα με τρεις από τις συνηθέστερες μορφές που εμφανίζονται στα σημερινά βιβλία. Τα σύνολα $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ και $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ αντιπροσωπεύουν το ίδιο σύνολο μοναδιαίων διανυσμάτων κατά αμοιβαία ορθογώνιες κατευθύνσεις του \mathbb{R}^3 . Η πρώτη μορφή δείχνει απλώς τις συνιστώσες κατά τις τρεις ορθογώνιες κατευθύνσεις χωρίς αναφορά στα μοναδιαία διανύσματα, μολονότι τα μοναδιαία διανύσματα και το σύστημα συντεταγμένων υπονοούνται σε αυτό τον συμβολισμό. Ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει υπόψη ότι θα χρειαστεί να αναπαραστήσουμε διανύσματα χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις τρεις μορφές. Η επιλογή θα εξαρτάται από το τι είναι πιο πρακτικό κάθε φορά χωρίς να δυσχεραίνεται η κατανόηση.

Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα \mathbf{v} με μια βαθμωτή ποσότητα παίρνουμε ένα νέο διάνυσμα με την ίδια κατεύθυνση, αν η βαθμωτή ποσότητα είναι θετική, ή με την αντίθετη κατεύθυνση, αν η βαθμωτή ποσότητα είναι αρνητική. Και στις δύο περιπτώσεις το διάνυσμα που προκύπτει έχει διαφορετικό μέτρο (Σχήμα 1.1). Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη δυνατότητα αλλαγής κλίμακας στο Κεφάλαιο 5, όταν θα χρειαστούμε διανύσματα μοναδιαίου μέτρου. Για να είναι μοναδιαίο διάνυσμα το $a\mathbf{v}$, με $a \in \mathbb{R}$, πρέπει να έχουμε

$$|a\mathbf{v}| = |a||\mathbf{v}| = a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1, \text{ δηλαδή } a = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Επομένως, για να κατασκευάσουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση ενός συγκεκριμένου διανύσματος \mathbf{v} , απλώς διαιρούμε το \mathbf{v} με το μήκος του:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$



Σχήμα 1.1 Το μοναδιαίο διάνυσμα.

Το γινόμενο δύο διανυσμάτων στον τριδιάστατο χώρο

Έστω u και v δύο μη παράλληλα διανύσματα του \mathbb{R}^3 :

$$u = (a_1, a_2, a_3) \quad v = (b_1, b_2, b_3).$$

Υπάρχουν δύο συγκεκριμένες πράξεις γινομένου που θα χρησιμοποιήσουμε σε πολλές περιπτώσεις: το διανυσματικό και το εσωτερικό γινόμενο. Από αυτές μπορούμε να εξαγάγουμε πολύ χρήσιμες πληροφορίες.

(α) Ένα διάνυσμα κάθετο σε *αμφότερα* τα u και v είναι το

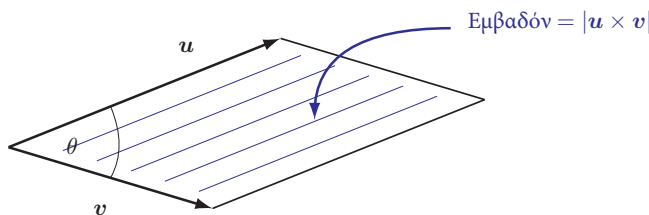
$$\begin{aligned} w = u \times v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= -v \times u. \end{aligned}$$

Αυτό καλείται «διανυσματικό» ή «εξωτερικό» γινόμενο. Επισημαίνουμε ότι το $u \times v$ είναι αντιπαράλληλο στο $v \times u$. Η σχέση μεταξύ των τριών διανυσμάτων παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.5.

(β) Το μέτρο του διανυσματικού (εξωτερικού) γινομένου δύο διανυσμάτων

$$|u \times v| = |w| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + \dots}$$

δίνει το *εμβαδόν* ενός επίπεδου παραλληλογράμμου με πλευρές μήκους $|u|$ και $|v|$ (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2 Το παραλληλόγραμμο $u \times v$.

Το μέτρο του διανυσματικού γινομένου δίνεται από τη σχέση

$$|w| = |u||v| \sin \theta,$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα u και v στο επίπεδο που ορίζουν τα u και v .

- (γ) Η γωνία θ που σχηματίζουν τα διανύσματα \mathbf{u} και \mathbf{v} (Σχήμα 1.3) μπορεί να υπολογιστεί (και συνήθως υπολογίζεται) μέσω του «εσωτερικού» ή «βαθμωτού» γινομένου, που ορίζεται ως

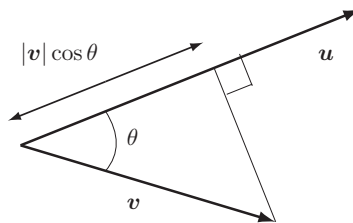
$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}.$$

Αν $\theta = 0$, τα διανύσματα είναι παράλληλα και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τα διανύσματα είναι ορθογώνια και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Για παράδειγμα, στην παραπάνω περίπτωση 2(α), $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$, αφού το \mathbf{w} είναι ορθογώνιο σε αμφότερα τα \mathbf{u} και \mathbf{v} .

Θα χρησιμοποιήσουμε εκτενώς αυτά τα γινόμενα στο Κεφάλαιο 2 (Ενότητες 2.Ε και 2.Ζ) και σε ολόκληρο το Κεφάλαιο 5.



Σχήμα 1.3 Η προβολή του \mathbf{v} στο \mathbf{u} .

Επίπεδο στον τριδιάστατο χώρο

Η εξίσωση ενός επιπέδου του \mathbb{R}^3 , η οποία γράφεται μαθηματικά ως

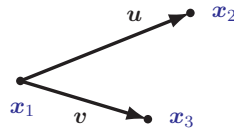
$$P = \{(x, y, z) : ax + by + cz = d \text{ με τα } a, b, c \text{ όχι όλα μηδέν}\}$$

μπορεί να προσδιοριστεί αν είναι γνωστά είτε

- (α) τρία μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου είτε
- (β) ένα σημείο και δύο μη παράλληλα διανύσματα παράλληλα στο επίπεδο.

Ας θεωρήσουμε την εναλλακτική (α). Έστω $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, τα τρία σημεία. Κατασκευάζουμε δύο διανύσματα, τα \mathbf{u} και \mathbf{v} στο επίπεδο (Σχήμα 1.4):

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)\end{aligned}$$

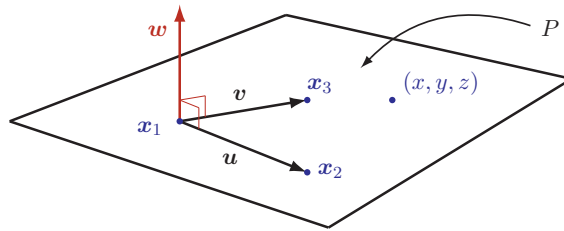


Σχήμα 1.4 Κατασκευή των διανυσμάτων u και v .

Αν τα x_1 , x_2 και x_3 δεν είναι συνευθειακά, τότε τα u και v δεν συμπίπτουν ούτε είναι παράλληλα, και το

$$w = u \times v = (\alpha, \beta, \gamma)$$

είναι ένα διάνυσμα κάθετο στα u και v , και επομένως κάθετο στο επίπεδο στο οποίο ανήκουν τα x_i .



Σχήμα 1.5 Κατασκευή του επιπέδου P .

Κατά σύμβαση, η κατεύθυνση του $w = u \times v$ δίνεται από τον **κανόνα του δεξιού χεριού**: Χρησιμοποιώντας το δεξί μας χέρι, αν δείξουμε με τον δείκτη κατά την κατεύθυνση του u και με τον μέσο κατά την κατεύθυνση του v , τότε ο αντίχειρας δείχνει κατά την κατεύθυνση του w . Το διανυσματικό γινόμενο και οι διάφορες γεωμετρικές του ιδιότητες θα παίξουν κεντρικό ρόλο στις Ενότητες 2.Γ και 5.Δ.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την εναλλακτική (β): Έστω (x, y, z) οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου P εκτός των δεδομένων σημείων (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3$. Κατασκευάζουμε το διάνυσμα $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ του επιπέδου που συνδέει το νέο σημείο με το σημείο x_1 . Χρησιμοποιώντας όσα αναφέραμε στην περίπτωση (γ) της παραγράφου για το γινόμενο δύο διανυσμάτων στον τριδιάστατο χώρο, έχουμε

$$\begin{aligned} w \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) &= 0 \\ \implies \alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1) &= 0 \\ \implies \alpha x + \beta y + \gamma z &= \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Το εσωτερικό γινόμενο παίζει επομένως καθοριστικό ρόλο στην εύρεση της εξίσωσης του επιπέδου P με $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ και $d = \mathcal{K}$.

Η εναλλακτική (β) αποτελεί στην πραγματικότητα μια εκδοχή της εναλλακτικής (α), με τη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση μας δίνονται τα u και v με τα οποία κατασκευάζουμε το ορθογώνιο διάνυσμα w . Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο προσδιορισμού της εξίσωσης ενός επιπέδου στις Ενότητες 2.Γ και 5.Δ.