2.2.2 Νέα σύνολα από παλαιά

Τα σύνολα περιγράφουν συσχετίσεις, αλλά η γλώσσα των συνόλων μπορεί επίσης να περιγράψει τη λογική αυτών των συσχετίσεων. Έχουμε ήδη δει ένα τέτοιο παράδειγμα: η πρόταση 2.2.2 εξηγεί πώς πρέπει να ερμηνεύεται το σύμβολο της ιδιότητας του περιέχεσθαι $\subseteq$ με μια πρόταση στη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που περιέχει τον σύνδεσμο $\rightarrow$: η συσχέτιση του περιέχεσθαι έχει τη λογική μιας συνεπαγωγής. Οι σύνδεσμοι $\vee$, $\wedge$, $\neg$ και $\leftrightarrow$ έχουν επίσης αντίστοιχες συνολοθεωρητικές περιγραφές.

Η *ένωση* $A \cup B$ δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του A και όλα τα στοιχεία του B μαζί. Ένα στοιχείο ανήκει στην ένωση δύο συνόλων A και B αν το στοιχείο αυτό ανήκει είτε στο A, είτε στο B, είτε και στα δύο. Με τον συμβολισμό της κατασκευής συνόλων:

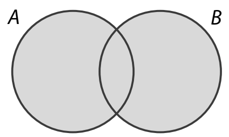
$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Αυτή η έκφραση μετατρέπεται στον εξής κανόνα ισοδυναμίας της κατηγορηματικής λογικής:

$$(\forall x)[(x \in A \cup B) \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)]$$

Η πρόταση $x \in A \cup B$ είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $(x \in A) \vee (x \in B)$. Αυτό το γεγονός είναι σημαντικό όταν συντάσσουμε αποδείξεις: μία από αυτές τις προτάσεις μπορεί πάντα να αντικαταστήσει την άλλη.

Μπορούμε να φανταζόμαστε την «ένωση» ως το συνολοθεωρητικό αντίστοιχο του «ή». Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, η ένωση $A \cup B$ είναι η σκιασμένη περιοχή:



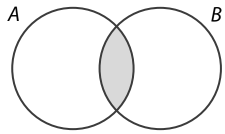
Η *τομή* $A \cap B$ είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα κοινά στοιχεία των A και B. Προκειμένου ένα στοιχείο να βρίσκεται στην τομή των A και B, το στοιχείο πρέπει να ανήκει και στα δύο σύνολα. Επομένως, με τον συμβολισμό κατασκευής συνόλων, γράφουμε την τομή ως εξής:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Αυτό συνεπάγεται την ακόλουθη λογική ισοδυναμία:

$$(\forall x)\ [(x \in A \cap B) \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)]$$

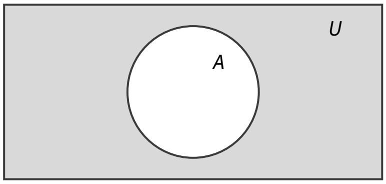
Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, η σκιασμένη περιοχή αναπαριστά την τομή $A \cap B$:



Στις παραπάνω προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής υπονοείται ένα πεδίο ορισμού των στοιχείων (ή ένα *σύμπαν*) U, του οποίου κάθε σύνολο είναι υποσύνολο. Αν γνωρίζουμε ποιο είναι αυτό το πεδίο ορισμού U, τότε έχει νόημα το *συμπλήρωμα* A' ενός συνόλου A, το οποίο ορίζεται ως το σύνολο

$$A' = \{x \in \mathrm{U} \mid x \notin A\}$$

Συνήθως σχεδιάζουμε το U ως ένα αρκετά μεγάλο ορθογώνιο, άρα η σκιασμένη περιοχή στο σχήμα παρακάτω αναπαριστά το A':



Σημειώνεται ότι θα μπορούσαμε επίσης να γράψουμε $A' = \{x \in \mathrm{U} \mid \neg(x \in A)\}$ για να χρησιμοποιήσουμε άμεσα τον σύνδεσμο $\neg$.

Θεωρούμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα αν περιέχουν τα ίδια στοιχεία. Επομένως, η πρόταση "$A = B$" μεταφράζεται στην ακόλουθη πρόταση της κατηγορηματικής λογικής:

$$(\forall x)[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$$

Αυτή η μετάφραση είναι σημαντική όταν πρέπει να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα μεταξύ τους. Μια απόδειξη ότι $A = B$ αποτελείται συνήθως από δύο ευθείες αποδείξεις: δεδομένου ότι $x \in A$, αποδεικνύουμε ότι $x \in B$ και αντιστρόφως, ότι αν $x \in B$, τότε $x \in A$. Με άλλα λόγια, η απόδειξη του $A = B$ ανάγεται στην απόδειξη ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Παράδειγμα 2.12 Έστω ότι έχουμε τα εξής σύνολα:

$$X = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 2k \text{ για κάποιον περιττό ακέραιο } k\}$$
$$F = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 4k \text{ για κάποιον ακέραιο } k\}$$
$$E = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \text{ είναι άρτιος}\}$$

1. Αποδείξτε ότι $F \subseteq E$.
2. Αποδείξτε ότι $\mathrm{X} = E \cap F'$.

Απόδειξη του 1 Έστω ότι $x \in F$. Από τον ορισμό του F έχουμε ότι $x = 4k$ για κάποιον ακέραιο k. Μπορούμε να γράψουμε αυτήν την ισότητα ως $x = 2(2k)$, επομένως ο x είναι άρτιος κατά τον Ορισμό 1.5. Άρα $x \in E$. □

Απόδειξη του 2 (Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $X \subseteq E \cap F'$.) Έστω ότι $x = 2k$ για κάποιον περιττό ακέραιο k, επομένως ο x είναι άρτιος. Άρα, $x \in E$. Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι $x \in F$. Τότε $x = 4j$ για κάποιον ακέραιο j. Αυτό συνεπάγεται ότι $2k = 4j$, ή $k = 2j$, κάτι που αντιφάσκει με το ότι ο k είναι περιττός. Άρα, $x \in F'$. Επειδή $x \in E$ και $x \in F'$, αποδείξαμε ότι $X \in E \cap F'$.

(Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι $E \cap F' \subseteq X$.) Έστω ότι $x \in E \cap F'$, άρα $x \in E$ και $x \in F'$. Επειδή $x \in E$, έχουμε $x = 2k$ για κάποιον ακέραιο k. Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι ο k είναι άρτιος. Τότε $k = 2l$ για κάποιον ακέραιο l, επομένως $x = 2\,(2l) = 4l$. Αυτό όμως αντιφάσκει με το ότι $x \in F'$. Επομένως ο k πρέπει να είναι περιττός και αυτό βεβαιώνει ότι $x \in X$. □

Αυτές οι αποδείξεις διευκρινίζουν πώς μεταφράζουμε προτάσεις από τη γλώσσα των συνόλων στη γλώσσα της λογικής, και αντιστρόφως. Για παράδειγμα, η πρόταση "$x \in E \cap F'$" μεταφράζεται ως "$x \in E$ και $x \in F'$". Γενικά, οποιαδήποτε πρόταση αναφέρεται σε σύνολα και περιλαμβάνει τα σύμβολα $\cap$, $\cup$, $\subseteq$, $=$ και $'$, μεταφράζεται σε μια πρόταση της κατηγορηματικής λογικής που χρησιμοποιεί τα σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ και $\neg$, αντίστοιχα. Επομένως, όλες οι προσπάθειές μας στις Ενότητες 1.2 και 1.3 για την προτασιακή και την κατηγορηματική λογική θα αποσβεστούν τώρα που ασχολούμαστε με σύνολα.

Σκεφτείτε τα σύμβολα $\cap$, $\cup$, $\subseteq$, $=$ και $'$ ως εργαλεία κατασκευής νέων συνόλων από παλαιά. Για παράδειγμα, όταν έχουμε δύο σύνολα A και B, μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο σύνολο $A \cap B$, το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία που έχουν κοινά αυτά τα δύο σύνολα. Μπορούμε επίσης να πάρουμε δύο σύνολα A και B και να σχηματίσουμε το *καρτεσιανό γινόμενό* τους $A \times B$. Το καρτεσιανό γινόμενο είναι απλώς το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών στα οποία το πρώτο στοιχείο προέρχεται από το πρώτο σύνολο και το δεύτερο στοιχείο από το δεύτερο σύνολο. Τυπικά,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ και } b \in B\}$$

Μπορούμε επίσης να έχουμε διατεταγμένες τριάδες, τετράδες, κ.ο.κ. Το σύνολο:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

είναι το σύνολο όλων διατεταγμένων n-άδων, όπου το i-στό στοιχείο προέρχεται από το σύνολο A_i.

Δύο διατεταγμένα ζεύγη είναι ίσα αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Δηλαδή:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ και } b = d$$

Γνωρίζετε ήδη το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Αυτό το σύνολο είναι το τυπικό καρτεσιανό επίπεδο από την άλγεβρα του σχολείου.

Μια τελευταία κατασκευή που αποδεικνύεται χρήσιμη μερικές φορές είναι το *δυναμοσύνολο* $P(S)$ ενός συνόλου S. Το δυναμοσύνολο του S είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του S: $P(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι μέλος του $P(S)$, ανεξάρτητα από το S, επειδή το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

Παράδειγμα 2.13 Έστω ότι θέλετε να φτιάξετε μια ομάδα μελέτης μαζί με κάποιους άλλους φοιτητές της τάξης σας. Αν S είναι το σύνολο όλων των φοιτητών της τάξης σας, τότε $P(S)$ είναι το σύνολο όλων των πιθανών ομάδων μελέτης που θα μπορούσατε να συγκροτήσετε. (Το κενό σύνολο εκφράζει την απόφαση να μη συγκροτήσετε τελικά καμία τέτοια ομάδα!)

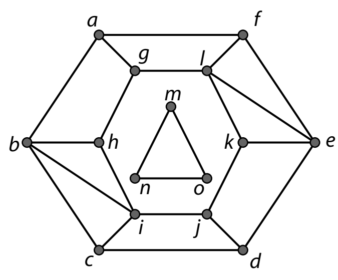
Παράδειγμα 2.14 Έστω ότι $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ και ότι το σύμπαν είναι το $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Τότε:

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\
A \cap B &= \{4, 5\} \\
B' &= \{1, 2, 3, 9, 10\} \\
(A \cap B) \times A &= \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\} \\
P(A \cap B) &= \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{4, 5\}\}
\end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, ενώ τα σύνολα A και B είναι σύνολα αριθμών, τα σύνολα που κατασκευάζουμε από τα A και B μπορεί να περιέχουν διαφορετικά είδη στοιχείων. Για παράδειγμα, το $(A \cap B) \times A$ είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών και το $P(A \cap B)$ είναι σύνολο συνόλων.

Δραστηριότητα 2.2.1: Συμβολισμός συνόλων

Για τις παρακάτω ερωτήσεις, έστω V το σύνολο των κορυφών του παρακάτω γραφήματος και E το σύνολο των ακμών του.



1. Γράψτε το V με τη μέθοδο της παράθεσης (roster).
2. Υπολογίστε το $|E|$.

3. Έστω ότι $R = \{x \in V \mid$ υπάρχει διαδρομή από το a στο $x\}$. Γράψτε το R' με τη μέθοδο της παράθεσης.
4. Έστω ότι $D_3 = \{x \in V \mid$ το x έχει βαθμό 3$\}$ και $T = \{x \in V \mid$ το x είναι μέρος ενός τριγωνικού υπογραφήματος$\}$. Ισχύει ότι $D_3 = T$; Αποδείξτε ή διαψεύστε.
5. Έστω ότι $D_4 = \{x \in V \mid$ το x έχει βαθμό 4$\}$. Γράψτε το $D_4 \cup (D_3 \cap T)$ με τη μέθοδο της παράθεσης.
6. Εκφράστε το R χρησιμοποιώντας ως όρους τα D_3 και D_4.
7. Έστω ότι $N = \{a, h, i, c\}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι καθεμία από αυτές τις κορυφές μοιράζεται μια ακμή με το b, γράψτε το N με τον συμβολισμό κατασκευής συνόλων.
8. Γράψτε το $\{a, h, c\}$ χρησιμοποιώντας τα N και D_3.
9. Έστω ότι $N \times R' = \{(x, y) \mid x \in N$ και $y \in R'\}$. Γράψτε το $N \times R'$ με τη μέθοδο της παράθεσης.

2.2.3 Ταυτότητες

Από τη στιγμή που υπάρχει μια άμεση σχέση μεταξύ της λογικής και της θεωρίας συνόλων, μπορούμε να περιγράψουμε πολλές ιδιότητες για τα σύνολα που προκύπτουν άμεσα από ιδιότητες που γνωρίζουμε ήδη από τη μελέτη της λογικής. Για παράδειγμα, ο κανόνας της πρόσθεσης $p \Rightarrow p \vee q$ μας επιτρέπει να αποδείξουμε την ταυτότητα $A \subseteq A \cup B$ στη θεωρία συνόλων.

Αποδείξτε ότι $\boldsymbol{A \subseteq A \cup B}$. Έστω ότι $x \in A$. Από τον κανόνα της πρόσθεσης γνωρίζουμε ότι $(x \in A) \vee (x \in B)$ και από τον ορισμό της ένωσης συνόλων ότι $x \in A \cup B$, όπως ζητείται. □

Οι κανόνες De Morgan για τα σύνολα προκύπτουν από τους ομώνυμους κανόνες ισοδυναμίας της λογικής.

Θεώρημα 2.1 *Έστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Τότε:*

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος δείχνει πώς αποδεικνύουμε ισότητες συνόλων.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε πρώτα το μέρος 1. (Το 2 είναι παρόμοιο). Έστω ότι $x \in (A \cup B)'$. Με άλλα λόγια, αν $P(x)$ είναι η πρόταση “$x \in A$” και $Q(x)$ είναι η πρόταση “$x \in B$”, αρχίζουμε με την παραδοχή $\neg(P(x) \vee Q(x))$. Από τους νόμους De Morgan της προτασιακής λογικής, αυτή η πρόταση ισοδυναμεί με το $\neg P(x) \wedge \neg Q(x)$, το οποίο στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων ταυτίζεται με το $x \in A' \cap B'$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

$$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$$

και ότι τα σύνολα $(A \cup B)'$ και $A' \cap B'$ είναι ίσα. □

Ας εξετάσουμε πάλι την παραπάνω απόδειξη για να σημειώσουμε δύο πράγματα. Πρώτον, η απόδειξη καθορίζει έναν ισχυρισμό «αν και μόνο αν», επειδή όλα τα συμπεράσματα βασίζονται σε λογικές ισοδυναμίες. Δεύτερον, η απόδειξη δείχνει ότι για να αποδείξουμε μια ισότητα συνόλων $U = V$, πρέπει να δείξουμε ότι $x \in U \Leftrightarrow x \in V$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 αποτελείται από μια απλή ακολουθία ισοδυναμιών. Όταν η δομή μιας απόδειξης είναι τόσο απλή, μας δίνεται η εναλλακτική επιλογή να τη γράψουμε με την παρακάτω μορφή.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, εκδοχή με το "$\Leftrightarrow$". Θα αποδείξουμε το μέρος 1 (το 2 είναι παρόμοιο)

$x \in (A \cup B)'$	$\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B)$	Ορισμός του συμπληρώματος $'$
	$\Leftrightarrow \neg[(x \in A) \vee (x \in B)]$	Ορισμός της ένωσης $\cup$
	$\Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$	Κανόνας De Morgan (λογική)
	$\Leftrightarrow (x \in A') \wedge (x \in B')$	Ορισμός του συμπληρώματος $'$
	$\Leftrightarrow x \in A' \cap B'$	Ορισμός της τομής $\cap$

Επομένως τα σύνολα $(A \cup B)'$ και $A' \cap B'$ είναι ίσα. □

Οι αποδείξεις ταυτοτήτων πολλές φορές μπορούν να γραφτούν με τον παραπάνω τρόπο. Παρατηρήστε ότι κάθε "$\Leftrightarrow$" εξηγείται στη δεξιά στήλη.

Δραστηριότητα 2.2.2: Απόδειξη της ιδιότητας του περιέχεσθαι για σύνολα

Έστω $E = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2k \text{ για κάποιο } k \in \mathbf{Z}\}$ και $S = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 6k + 4 \text{ για κάποιο } k \in \mathbf{Z}\}$.

1. Συμπληρώστε την παρακάτω απόδειξη για το $S \subseteq E$.

   Έστω $x \in S$. Επειδή $x \in S$, ____________. Βγάζοντας κοινό παράγοντα το 2, προκύπτει το $x =$ ____________. Άρα, ____________, όπως απαιτείται.

2. Ισχύει ότι $E \subseteq S$; Εξηγήστε.
3. Ισχύει ότι $E = S$; Εξηγήστε.

Τα σύνολα που περιέχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ονομάζονται *πεπερασμένα σύνολα*. Δηλώνουμε το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου S με το $|S|$. Για παράδειγμα, αν το S είναι το σύνολο των μελών της Βουλής των Αντιπροσώπων στις Η.Π.Α., τότε $|S| = 435$.

Ένας εύχρηστος κανόνας για να χειριζόμαστε τα μεγέθη των συνόλων είναι η *αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{2.2.3}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα γιατί πρέπει να ισχύει αυτός ο κανόνας εξετάζοντας τα διαγράμματα Venn για την ένωση $A \cup B$ και την τομή $A \cap B$ που είδαμε στην αρχή της Ενότητας 2.2.3. Αν μετρήσουμε τα στοιχεία του $A \cup B$ μετρώντας τα στοιχεία στο A και τα στοιχεία στο B και στη συνέχεια προσθέτοντας, θα έχουμε μετρήσει δύο φορές τα στοιχεία που βρίσκονται στο $A \cap B$. Για αυτόν τον λόγο υπάρχει το "$- |A \cap B|$" στη δεξιά πλευρά της Εξίσωσης 2.2.3. Αυτή η εξίσωση μας βοηθά να οργανώνουμε προβλήματα απαρίθμησης στα οποία τα σύνολα επικαλύπτονται.

Παράδειγμα 2.15 Ο Σύλλογος «Κυρίαρχοι του Σύμπαντος» ενός πανεπιστημίου δέχεται ως μέλη της φοιτητές με βαθμό τουλάχιστον 1.600 στις εξετάσεις SAT, ή με GPA βαθμό τουλάχιστον 4,0. Από τα 11 μέλη του συλλόγου, 8 είχαν βαθμό τουλάχιστον 1.600 στις εξετάσεις SAT και 5 είχαν GPA βαθμό τουλάχιστον 4,0. Πόσα μέλη είχαν ταυτόχρονα και τουλάχιστον 1.600 στις εξετάσεις SAT και GPA βαθμό τουλάχιστον 4,0;

Λύση: Έστω A το σύνολο των μελών με SAT τουλάχιστον 1.600 και B το σύνολο των μελών με GPA τουλάχιστον 4,0. Τότε, το $A \cap B$ είναι το σύνολο των μελών που έχουν και τα δύο. Σύμφωνα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού (Εξίσωση 2.2.3), $11 = 8 + 5 - |A \cap B|$, άρα υπάρχουν δύο μέλη που έχουν SAT τουλάχιστον 1.600 και GPA τουλάχιστον 4,0. ◇

Στο 4ο Κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού σε πιο δύσκολα προβλήματα απαρίθμησης.

Ασκήσεις 2.2

1. Σχεδιάστε διαγράμματα Venn που αποτυπώνουν τους νόμους De Morgan για σύνολα (Θεώρημα 2.1).

2. Σχεδιάστε ένα διάγραμμα Venn για την περιοχή $A \cap B'$. Αυτή η περιοχή συμβολίζεται με $A \backslash B$ και ονομάζεται *διαφορά συνόλων*.

3. Έστω ότι $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ και ότι σύμπαν είναι το $U = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Δώστε τα στοιχεία των παρακάτω συνόλων:

(α) $(A \cup B)'$
(β) $(A \cap B) \times A$
(γ) $P(B \setminus A)$

4. Δίνονται τα εξής σύνολα:

G = το σύνολο των καλών πολιτών.
C = το σύνολο των αγαθοεργών ανθρώπων.
P = το σύνολο των ευγενικών ανθρώπων.

Γράψτε την πρόταση «Οι αγαθοεργοί και ευγενικοί άνθρωποι είναι καλοί πολίτες» στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων.

5. Έστω τα παρακάτω σύνολα (ως σύμπαν θεωρείται το **N**):

A = Το σύνολο των άρτιων αριθμών.
B = Το σύνολο των πρώτων αριθμών.
C = Το σύνολο των τέλειων τετραγώνων.
D = Το σύνολο των πολλαπλασίων του 10.

Χρησιμοποιήστε **μόνο** τα σύμβολα 3, A, B, C, D, **N**, $\in$, $\subseteq$, $=$, $\neq$, $\cap$, $\cup$, $\times$, $'$, $\emptyset$, (, και), για να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις με τον συμβολισμό των συνόλων:
(α) Κανένα τέλειο τετράγωνο δεν είναι πρώτος αριθμός.
(β) Όλα τα πολλαπλάσια του 10 είναι άρτιοι αριθμοί.
(γ) Ο αριθμός 3 είναι πρώτος αριθμός που δεν είναι άρτιος.
(δ) Αν θεωρήσετε όλους τους πρώτους, όλους τους άρτιους, όλα τα τέλεια τετράγωνα και τα όλα πολλαπλάσια του 10, δεν θα έχετε συμπεριλάβει όλους τους φυσικούς αριθμούς.

6. Έστω τα παρακάτω σύνολα. Το σύμπαν U για αυτό το πρόβλημα είναι το σύνολο των κατοίκων της Ινδίας.

A = το σύνολο όσων μιλούν Αγγλικά.
B = το σύνολο όσων μιλούν Χίντι.
C = το σύνολο όσων μιλούν Ούρντου.

Εκφράστε τα παρακάτω σύνολα με τα σύμβολα της γλώσσας της θεωρίας συνόλων:

(α) Κάτοικοι της Ινδίας που μιλούν Αγγλικά, Χίντι και Ούρντου.
(β) Κάτοικοι της Ινδίας που δεν μιλούν Αγγλικά, Χίντι ή Ούρντου.
(γ) Κάτοικοι της Ινδίας που μιλούν Αγγλικά, αλλά όχι Χίντι ή Ούρντου.