4

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

…τα μαθηματικά δεν είναι τόσο ένα επιστημονικό πεδίο όσο ένας τρόπος μελέτης οποιουδήποτε θέματος· όχι μια επιστήμη όσο ένας τρόπος ζωής.

—George F.J. Temple (1981)

Οι συναρτήσεις διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σχεδόν σε κάθε τομέα των θεωρητικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών που έχουν εφαρμογή στα οικονομικά. Στη γλώσσα της οικονομικής ανάλυσης υπάρχει πλήθος όρων όπως συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς, συναρτήσεις κόστους, συναρτήσεις παραγωγής, συναρτήσεις κατανάλωσης κ.λπ. Παρότι κατά τη διδασκαλία των αρχών οικονομικής μπορεί να προτιμώνται όροι όπως *καμπύλες* ζήτησης και προσφοράς, αυτές είναι απλώς γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής, οι οποίες επεξηγούνται με ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα από το πεδίο της οικονομικής.

4.1 Εισαγωγή

Μια μεταβλητή είναι συνάρτηση κάποιας άλλης μεταβλητής, αν η πρώτη μεταβλητή *εξαρτάται* από τη δεύτερη. Για παράδειγμα, το εμβαδόν ενός κύκλου αποτελεί συνάρτηση της ακτίνας του. Αν η ακτίνα r είναι γνωστή, τότε το εμβαδόν A υπολογίζεται από τον τύπο: $A = \pi r^2$, όπου π είναι η σταθερά 3,14159…

Δεν είναι αναγκαίο να αποδοθεί η ιδέα ότι μια μεταβλητή είναι συνάρτηση κάποιας άλλης μεταβλητής με τη χρήση ενός μαθηματικού τύπου. Ένας πίνακας μπορεί επίσης να δείξει τη σχέση, όπως για παράδειγμα ο Πίνακας 4.1.1, ο οποίος δείχνει την αύξηση της συνολικής καταναλωτικής δαπάνης, μετρούμενης σε ευρώ, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο πληθωρισμός στην Ευρωπαϊκή Ένωση.[1] Ο πίνακας καλύπτει το διάστημα από το πρώτο τρίμηνο του 2013, το οποίο συμβολίζεται ως 13Q1, μέχρι το τελευταίο τρίμηνο του 2014, που συμβολίζεται ως 14Q4. Παρουσιάζει την καταναλωτική δαπάνη, η οποία συμβολίζεται ως C, ως συνάρτηση του ημερολογιακού τριμήνου, το οποίο συμβολίζεται ως Q.

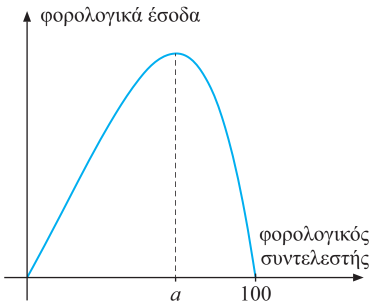
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.1 Συνολική καταναλωτική δαπάνη στην Ευρωπαϊκή Ένωση, 2013Q1-2014Q4 (σε δισεκατομμύρια ευρώ)

Q	13Q1	13Q2	13Q3	13Q4	14Q1	14Q2	14Q3	14Q4
C	1.917,5	1.924,9	1.934,3	1.946,0	1.958,6	1.973,4	1.995,1	2.008,2

1. Τα κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης έγιναν 27 με την είσοδο της Κροατίας την 1η Ιουλίου 2013 και το Brexit την 1η Φεβρουαρίου 2020.

Ορισμένες φορές, σε μια συζήτηση χρησιμοποιούμε τη λέξη «συνάρτηση» με παρόμοιο τρόπο. Για παράδειγμα, λέμε ότι το ποσοστό βρεφικής θνησιμότητας μιας χώρας είναι συνάρτηση της ποιότητας της υγειονομικής περίθαλψης ή ότι το εθνικό προϊόν μιας χώρας είναι συνάρτηση του επιπέδου των επενδύσεων.

Η εξάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών μπορεί επίσης να απεικονιστεί μέσω μιας γραφικής παράστασης. Στο Σχήμα 4.1.1 έχουμε σχεδιάσει μια καμπύλη που φέρεται να έπαιξε σημαντικό ρόλο πριν από μερικά χρόνια στη συζήτηση για τα «οικονομικά από τη σκοπιά της προσφοράς». Δείχνει την υποτιθέμενη σχέση μεταξύ του φορολογικού συντελεστή εισοδήματος μιας χώρας και των συνολικών φορολογικών εσόδων της. Προφανώς, αν ο φορολογικός συντελεστής είναι 0%, τότε τα φορολογικά έσοδα είναι 0. Ωστόσο, αν ο φορολογικός συντελεστής είναι 100%, τότε τα φορολογικά έσοδα θα είναι επίσης (περίπου) 0, αφού κανείς δεν θα είναι διατεθειμένος να εργαστεί αν πρόκειται να παρακρατηθεί ολόκληρο το εισόδημά του. Η καμπύλη αυτή, η οποία έχει εγείρει σημαντικές αντιπαραθέσεις, λέγεται ότι σχεδιάστηκε το 1974 στο πίσω μέρος μιας χαρτοπετσέτας εστιατορίου από έναν Αμερικανό οικονομολόγο, τον Arthur Laffer, ο οποίος αργότερα εκλαΐκευσε το μήνυμά της για το ευρύ κοινό.[2]



ΣΧΗΜΑ 4.1.1 Η «καμπύλη Laffer», η οποία δίνει τη σχέση μεταξύ φορολογικών εσόδων και φορολογικών συντελεστών.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, μια γραφική παράσταση είναι προτιμότερη από έναν μαθηματικό τύπο. Μια τέτοια περίπτωση είναι το ηλεκτροκαρδιογράφημα, το οποίο δείχνει το μοτίβο των καρδιακών παλμών ενός ασθενούς. Ο γιατρός μελετά το μοτίβο των επαναλήψεων απευθείας από τις γραφικές παραστάσεις, καθώς ο ασθενής ενδέχεται να πεθάνει μέχρι ο γιατρός να μπορέσει να δώσει έναν τύπο ο οποίος θα προσεγγίζει την εικόνα του ηλεκτροκαρδιογραφήματος.

Όλες οι σχέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: ένας συγκεκριμένος κανόνας συσχετίζει κάθε τιμή μιας μεταβλητής με μια ορισμένη τιμή κάποιας άλλης μεταβλητής. Στο παράδειγμα του ηλεκτροκαρδιογραφήματος, η συνάρτηση είναι ο κανόνας που δείχνει την ηλεκτρική δραστηριότητα με την πάροδο του χρόνου.

Σε όλα τα παραδείγματά μας γίνεται σιωπηρά η παραδοχή ότι οι μεταβλητές υπόκεινται σε ορισμένους περιορισμούς. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 4.1.1 μόνο τα οκτώ τρίμηνα των ετών 2013 και 2014 αντιμετωπίζονται ως σχετικά.

4.2 Ορισμοί

Τα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας οδηγούν στον ακόλουθο γενικό ορισμό, με το D να συμβολίζει ένα σύνολο πραγματικών αριθμών:

2. Πολλοί οικονομολόγοι στο παρελθόν είχαν ουσιαστικά την ίδια ιδέα. Βλ., για παράδειγμα, το μέρος (β) του Παραδείγματος 7.2.2.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής x (οι τιμές της οποίας είναι πραγματικοί αριθμοί) με *πεδίο ορισμού* D είναι ένας κανόνας $x \mapsto f(x)$ ο οποίος αντιστοιχίζει έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό $f(x)$ σε κάθε πραγματικό αριθμό x του D. Καθώς το x μεταβάλλεται σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού, το σύνολο όλων των πιθανών τιμών $f(x)$ που προκύπτουν ονομάζεται *πεδίο τιμών* της συνάρτησης f.

Η λέξη «κανόνας» χρησιμοποιείται με την ευρεία έννοια. *Κάθε* κανόνας με τις ιδιότητες που περιγράφηκαν μπορεί να ονομαστεί συνάρτηση, είτε ο κανόνας αυτός δίδεται από έναν τύπο είτε περιγράφεται με λέξεις είτε καθορίζεται από έναν πίνακα, είτε απεικονίζεται με μια καμπύλη είτε εκφράζεται με οποιονδήποτε άλλο τρόπο.

Πολλές συναρτήσεις συμβολίζονται με γράμματα, όπως f, g, F ή φ. Αν η f είναι μια συνάρτηση και το x είναι ένας αριθμός στο πεδίο ορισμού της D, τότε με $f(x)$ συμβολίζεται ο αριθμός τον οποίο η συνάρτηση f αποδίδει στον x. Ο συμβολισμός $f(x)$ διαβάζεται «f του x». Είναι σημαντικό να επισημανθεί η διαφορά μεταξύ του f, το οποίο συμβολίζει τη συνάρτηση (τον κανόνα), και του $f(x)$, το οποίο δηλώνει την τιμή της f στο συγκεκριμένο σημείο x του πεδίου ορισμού.

Αν f είναι μια συνάρτηση, ορισμένες φορές συμβολίζουμε με y την τιμή της f στο x, δηλαδή $y = f(x)$. Ονομάζουμε το x *ανεξάρτητη μεταβλητή* ή *όρισμα* της f και το y *εξαρτημένη μεταβλητή*, επειδή η τιμή y (γενικά) εξαρτάται από την τιμή του x. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των δυνατών τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ το πεδίο τιμών είναι το σύνολο των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής. Στην οικονομική επιστήμη, το x συχνά ονομάζεται *εξωγενής* μεταβλητή, η οποία υποτίθεται ότι ικανοποιείται *εκτός* του οικονομικού μοντέλου, ενώ για κάθε δεδομένο x η εξίσωση $y = f(x)$ χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της *ενδογενούς* μεταβλητής y *εντός* του οικονομικού μοντέλου.

Μια συνάρτηση συχνά ορίζεται από έναν τύπο, όπως $y = 8x^2 + 3x + 2$. Δηλαδή, η συνάρτηση είναι ο κανόνας $x \mapsto 8x^2 + 3x + 2$ που αναθέτει τον αριθμό $8x^2 + 3x + 2$ σε κάθε τιμή του x.

Συμβολισμός συναρτήσεων

Προκειμένου να εξοικειωθείτε με τους σχετικούς συμβολισμούς, είναι χρήσιμο να μελετήσετε μερικά παραδείγματα συναρτήσεων που ορίζονται από τύπους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.1

Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς με τον ακόλουθο κανόνα:

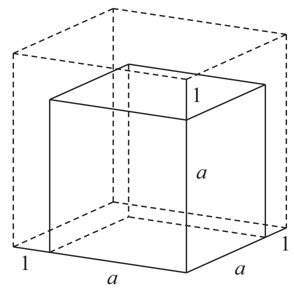
Αντιστοιχίστε σε οποιονδήποτε αριθμό την τρίτη δύναμή του.

Αυτή η συνάρτηση αναθέτει το $0^3 = 0$ στο 0, το $3^3 = 27$ στο 3, το $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$ στο -2 και το $(1/4)^3 = 1/64$ στο $1/4$. Γενικά, αναθέτει τον αριθμό x^3 στον αριθμό x. Αν συμβολίσουμε αυτήν τη συνάρτηση της τρίτης δύναμης με f, τότε $f(x) = x^3$. Οπότε έχουμε $f(0) = 0^3 = 0$, $f(3) = 3^3 = 27$, $f(-2) = (-2)^3 = -8$ και $f(1/4) = (1/4)^3 = 1/64$. Σε γενικές γραμμές, αντικαθιστώντας το x με a στον τύπο της f προκύπτει $f(a) = a^3$, οπότε

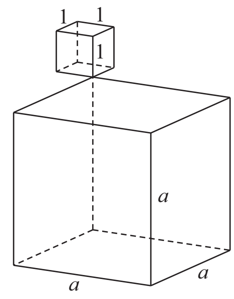
$$f(a+1) = (a+1)^3 = (a+1)(a+1)(a+1) = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

Ένα συνηθισμένο λάθος είναι να υποθέτουμε ότι το $f(a) = a^3$ συνεπάγεται ότι $f(a + 1) = a^3 + 1$. Αυτό το λάθος μπορεί να επεξηγηθεί με την παρουσίαση μιας απλής ερμηνείας της f. Αν a είναι η ακμή ενός κύβου μετρημένη σε μέτρα, τότε $f(a) = a^3$ είναι ο όγκος του κύβου εκφρασμένος σε κυβικά μέτρα ή m^3. Ας υποθέσουμε ότι κάθε ακμή του κύβου επεκτείνεται κατά 1m. Ο όγκος του νέου κύβου είναι $f(a + 1) = (a + 1)^3$ m^3, όπως φαίνεται στο Σχήμα. 4.2.1. Από την άλλη, ο αριθμός $a^3 + 1$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο συνολικός όγκος που προκύπτει όταν σε έναν κύβο με ακμή a προστεθεί ένας κύβος με ακμή 1, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2.2. Τα δύο σχήματα καθιστούν σαφές ότι ο πρώτος όγκος $(a + 1)^3$ είναι αρκετά μεγαλύτερος από τον δεύτερο $a^3 + 1$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον διωνυμικό τύπο (2.11.2) για να υπολογίσουμε την ακριβή διαφορά, η οποία είναι:

$$(a + 1)^3 - (a^3 + 1) = 3a^2 + 3a = 3a(a + 1)$$



ΣΧΗΜΑ 4.2.1 Όγκος $f(a + 1) = (a + 1)^3$



ΣΧΗΜΑ 4.2.2 Όγκος $a^3 + 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.2

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε μη αρνητικό ακέραιο x το συνολικό κόστος σε δολάρια για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τον τύπο

$$C(x)=100x\sqrt{x} + 500$$

(α) Βρείτε το κόστος για την παραγωγή 16 μονάδων.
(β) Υποθέτοντας ότι η επιχείρηση παράγει ήδη a μονάδες, βρείτε την *αύξηση* του κόστους λόγω της παραγωγής μίας επιπλέον μονάδας.

Λύση:

(α) Το κόστος για την παραγωγή 16 μονάδων βρίσκεται αντικαθιστώντας το x με το 16 στον τύπο για το $C(x)$:

$$C(16) = 100 \cdot 16\sqrt{16} + 500 = 100 \cdot 16 \cdot 4 + 500 = 6.900$$

(β) Το κόστος για την παραγωγή a μονάδων είναι $C(a) = 100a\sqrt{a} + 500$, ενώ το κόστος για την παραγωγή $a + 1$ μονάδων είναι $C(a + 1)$. Συνεπώς, η αύξηση του κόστους είναι

$$\begin{aligned} C(a + 1) - C(a) &= 100(a + 1)\sqrt{a + 1} + 500 - 100a\sqrt{a} - 500 \\ &= 100\left[(a + 1)\sqrt{a + 1} - a\sqrt{a}\right] \end{aligned}$$

Στην οικονομική θεωρία, μελετάμε συχνά συναρτήσεις που εξαρτώνται από έναν αριθμό παραμέτρων, καθώς και από την ανεξάρτητη μεταβλητή. Ακολουθεί μια προφανής γενίκευση του Παραδείγματος 4.2.2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.3

Ας υποθέσουμε ότι το κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός αγαθού είναι

$$C(x) = Ax\sqrt{x} + B$$

όπου A και B είναι σταθερές. Βρείτε το κόστος για την παραγωγή 0, 10 και $x + h$ μονάδων.

Λύση: Το κόστος για την παραγωγή 0 μονάδων είναι $C(0) = A \cdot 0 \cdot \sqrt{0} + B = 0 + B = B$.[3] Ανάλογα, $C(10) = A10\sqrt{10} + B$. Τελικά,

$$C(x+h) = A(x+h)\sqrt{x+h} + B$$

που προκύπτει από την αντικατάσταση του x με το $x + h$ στον συγκεκριμένο τύπο.

Μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε το x για να δηλώσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή, αλλά θα μπορούσαμε κάλλιστα να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλο σύμβολο. Για παράδειγμα, οι ακόλουθοι τύποι εκφράζουν ακριβώς την ίδια συνάρτηση (και επομένως μπορούμε να πούμε $f = g = \varphi$):

$$f(x) = x^4, \qquad g(t) = t^4, \qquad \varphi(\xi) = \xi^4$$

Επιπλέον, θα μπορούσαμε επίσης να εκφράσουμε αυτήν τη συνάρτηση ως $x \mapsto x^4$ ή εναλλακτικά ως $f(\cdot) = (\cdot)^4$. Εννοείται ότι η τελεία μέσα στις παρενθέσεις μπορεί να αντικατασταθεί από έναν αυθαίρετο αριθμό ή ένα αυθαίρετο γράμμα ή ακόμη και από μια άλλη συνάρτηση (όπως $1/y$). Έτσι,

$$1 \mapsto 1^4 = 1, \qquad k \mapsto k^4 \qquad \text{και} \qquad 1/y \mapsto (1/y)^4$$

ή εναλλακτικά

$$f(1) = 1^4 = 1, \qquad f(k) = k^4 \qquad \text{και} \qquad f(1/y) = (1/y)^4$$

Καθορισμός του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών

Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δεν είναι προφανές, ο ορισμός της δεν είναι πλήρης μέχρι τον ακριβή προσδιορισμό του. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f που ορίζεται από τη σχέση $f(x) = x^3$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Στο Παράδειγμα 4.2.2, όπου το $C(x) = 100x\sqrt{x} + 500$ εκφράζει το κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, το πεδίο ορισμού προσδιορίστηκε ως το σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων αριθμών. Στην πραγματικότητα, ένα πιο φυσικό πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των αριθμών 0, 1, 2, …, x_0, όπου x_0 είναι ο μέγιστος αριθμός προϊόντων που μπορεί να παράγει η επιχείρηση. Για έναν παραγωγό όπως ένα ορυχείο σιδήρου, ωστόσο, όπου η ποσότητα παραγωγής x μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχής μεταβλητή, όπως τόνοι σιδηρομεταλλεύματος, το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό διάστημα $[0, x_0]$.

Θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι *αν μια συνάρτηση ορίζεται με τη χρήση αλγεβρικού τύπου, το πεδίο ορισμού αποτελείται από όλες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής για τις οποίες ο τύπος δίνει μοναδική τιμή, εκτός αν αναφέρεται ρητά άλλο πεδίο ορισμού.*

3. Η παράμετρος B αντιστοιχεί σε πάγιο κόστος. Πρόκειται για τα χρήματα που πρέπει να καταβληθούν ανεξάρτητα από το αν παράγεται πραγματικά κάτι ή όχι, όπως για παράδειγμα το ετήσιο τέλος άδειας οδήγησης ταξί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.4

Βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ (β) $g(x) = \sqrt{2x+4}$ (γ) $h(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x+1}-3}$

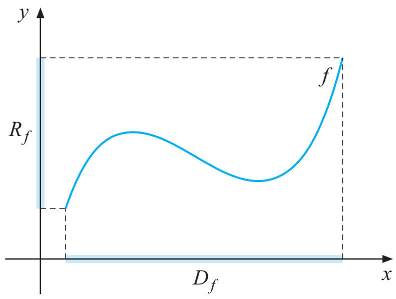
Λύση:

(α) Για $x = -3$, ο τύπος ανάγεται στην άνευ νοήματος έκφραση «1/0». Για όλες τις άλλες τιμές του x, ο τύπος καθιστά το $f(x)$ έναν καλά ορισμένο αριθμό. Έτσι, το πεδίο ορισμού περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς $x \neq -3$.

(β) Η έκφραση $\sqrt{2x+4}$ είναι μοναδικά ορισμένη για κάθε x έτσι ώστε το $2x + 4$ να είναι μη αρνητικό. Η επίλυση της ανισότητας $2x + 4 \geq 0$ ως προς x δίνει $x \geq -2$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της g είναι το διάστημα $[-2, \infty]$.

(γ) Όπως στο (α), θέλουμε να αποφύγουμε την έκφραση «1/0». Αυτό απαιτεί να ισχύει η σχέση $\sqrt{x+1} - 3 \neq 0$, που σημαίνει ότι δεν μπορεί να γίνει δεκτό το $x = 8$. Όπως στο (β), από την άλλη, η έκφραση $\sqrt{x+1}$ απαιτεί $x + 1 \geq 0$, το οποίο με τη σειρά του απαιτεί $x \geq -1$. Το πεδίο ορισμού της h είναι το σύνολο όλων των x που ικανοποιούν και τους δύο αυτούς περιορισμούς, δηλαδή την ένωση των διαστημάτων $[-1, 8)$ και $(8, \infty)$.

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού D. Το σύνολο όλων των τιμών $f(x)$ που παίρνει η συνάρτηση ονομάζεται *πεδίο τιμών* της f. Συχνά, συμβολίζουμε το πεδίο ορισμού της f με D_f και το πεδίο τιμών της με R_f. Οι έννοιες αυτές απεικονίζονται στο Σχήμα 4.2.3, χρησιμοποιώντας την ιδέα της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, την οποία θα αναπτύξουμε στην Ενότητα 4.3.



ΣΧΗΜΑ 4.2.3 Το πεδίο ορισμού D_f και το πεδίο τιμών R_f της συνάρτησης f

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση f ως μια μηχανική διαδικασία $x \mapsto f(x)$ που λειτουργεί με τέτοιο τρόπο ώστε αν το x του πεδίου ορισμού είναι μια είσοδος (εισροή), η έξοδος (εκροή) είναι το $f(x)$. Επομένως, το πεδίο τιμών της f είναι το σύνολο όλων των αριθμών που παίρνουμε ως έξοδο χρησιμοποιώντας όλους τους αριθμούς του πεδίου ορισμού ως είσοδο. Αν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε ως είσοδο έναν αριθμό που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, η μηχανική διαδικασία δεν λειτουργεί, οπότε δεν υπάρχει έξοδος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.5

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2x+4}$.

(α) Δείξτε ότι ο αριθμός 4 ανήκει στο πεδίο τιμών της.

(β) Βρείτε ολόκληρο το πεδίο τιμών της g.

Λύση:

(α) Για να δείξουμε ότι το 4 ανήκει στο πεδίο τιμών της συνάρτησης g, θα πρέπει να βρούμε έναν αριθμό x τέτοιο ώστε $g(x) = 4$. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση $\sqrt{2x+4}$ ως προς x. Υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε $2x + 4 = 4^2 = 16$ από το οποίο προκύπτει $x = 6$. Επειδή $g(6) = 4$, ο αριθμός 4 ανήκει στο πεδίο τιμών R_g.

(β) Για να βρούμε ολόκληρο το πεδίο τιμών της g, θα πρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα: Όσο το x διατρέχει όλο το διάστημα $[-2, \infty)$, ποιες είναι όλες οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η $\sqrt{2x+4}$; Για $x = -2$, έχουμε $\sqrt{2x+4} = 0$ και το $\sqrt{2x+4}$ δεν μπορεί να πάρει ποτέ αρνητικές τιμές. Θεωρούμε ότι όποτε επιλέγεται αριθμός $y_0 \geq 0$, υπάρχει ένας αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $\sqrt{2x_0+4} = y_0$. Πράγματι, υψώνοντας στο τετράγωνο κάθε μέλος της τελευταίας εξίσωσης έχουμε $2x_0 + 4 = y_0^2$. Άρα $2x_0 = y_0^2 - 4$, το οποίο συνεπάγεται ότι $x_0 = \frac{1}{2}(y_0^2 - 4)$. Επειδή $y_0^2 \geq 0$, έχουμε $x_0 = \frac{1}{2}(y_0^2 - 4) \geq \frac{1}{2}(-4) = -2$. Επομένως, για κάθε αριθμό $y_0 \geq 0$ βρήκαμε έναν αριθμό $x_0 \geq -2$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = y_0$. Συνεπώς, το πεδίο τιμών της g είναι το διάστημα $[0, \infty)$.

Ακόμη και αν μια συνάρτηση προσδιορίζεται πλήρως από έναν τύπο, συμπεριλαμβανομένου ενός συγκεκριμένου πεδίου ορισμού, δεν είναι πάντα εύκολο να προσδιοριστεί το πεδίο τιμών της. Για παράδειγμα, χωρίς τη χρήση των μεθόδων του διαφορικού λογισμού, τις οποίες δεν έχουμε ακόμη παρουσιάσει, είναι δύσκολο να βρούμε ακριβώς το R_f για μια συνάρτηση όπως η $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x - 3$ με πεδίο ορισμού $D_f = [-2, 3]$.

Μια συνάρτηση f ονομάζεται (*ασθενώς*) *αύξουσα* ή *μη φθίνουσα* αν το $x_1 < x_2$ συνεπάγεται ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$ και *γνησίως αύξουσα* αν το $x_1 < x_2$ συνεπάγεται ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Οι *φθίνουσες* και οι *γνησίως φθίνουσες* συναρτήσεις ορίζονται με προφανή τρόπο. (Βλ. Ενότητα 6.3.) Η συνάρτηση g του Παραδείγματος 4.2.5 είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[-2, \infty]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ 4.2

1. Έστω $f(x) = x^2 + 1$.

(α) Υπολογίστε τα $f(0), f(-1), f(1/2)$ και $f(\sqrt{2})$.

(β) Βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

(i) $f(x) = f(-x)$ (ii) $f(x+1) = f(x) + f(1)$ (iii) $f(2x) = 2f(x)$

2. Ας υποθέσουμε ότι $F(x) = 10$ για κάθε x. Να βρεθούν τα $F(0)$, $F(-3)$ και $F(a+h) - F(a)$.

3. Έστω $f(t) = a^2 - (t-a)^2$, όπου a μια σταθερά.

(α) Υπολογίστε τα $f(0), f(a), f(-a)$ και $f(2a)$. (β) Υπολογίστε το $3f(a) + f(-2a)$.

4. Έστω $f(x) = x/(1+x^2)$.

(α) Υπολογίστε τα $f(-1/10), f(0), f(1/\sqrt{2}), f(\sqrt{\pi})$ και $f(2)$.

(β) Δείξτε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x και ότι $f(1/x) = f(x)$ για $x \neq 0$.

5. Έστω $F(t) = \sqrt{t^2 - 2t + 4}$. Υπολογίστε τα $F(0)$, $F(-3)$ και $F(t+1)$.

6. Το κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός αγαθού δίνεται από τη σχέση $C(x) = 1.000 + 300x + x^2$.

(α) Υπολογίστε τα $C(0)$, $C(100)$ και $C(101) - C(100)$.

(β) Υπολογίστε το $C(x+1) - C(x)$ και εξηγήστε τη σημασία αυτής της διαφοράς.