Κεφάλαιο 2
Πίνακες

Ο πίνακας αποτελεί μία από τις πλέον θεμελιώδεις έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας. Αρχικά, οι πίνακες χρησιμοποιήθηκαν ως αναπαραστάσεις γραμμικών μετασχηματισμών, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Στη συνέχεια όμως, μελετήθηκαν αυτόνομα καταλήγοντας στη θεωρία πινάκων, η οποία σε συνδυασμό με την εξέλιξη της επιστήμης των Η/Υ, αποτελεί πλέον ένα ιδιαιτέρως εύχρηστο και ισχυρό εργαλείο μοντελοποίησης και επεξεργασίας δεδομένων, που δίνει χρήσιμα και άμεσα αποτελέσματα σε πολλά προβλήματα του πραγματικού κόσμου.

2.1 Βασικοί ορισμοί και είδη πινάκων

Μια ορθογώνια διάταξη $m \cdot n$ στοιχείων (πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών) σε m γραμμές και n στήλες εντός αγκυλών, ονομάζεται (πραγματικός ή μιγαδικός) πίνακας διάστασης $m \times n$ ή απλώς $m \times n$-πίνακας (με πραγματικά ή μιγαδικά στοιχεία). Στη βιβλιογραφία, ένας πίνακας αναφέρεται και ως μήτρα (matrix) ή μητρώο. Ένας πίνακας συμβολίζεται είτε με κεφαλαία λατινικά γράμματα $A, B, C, \ldots$ είτε μέσω των στοιχείων του, π.χ.: $[a_{i,j}]_{i,j=1,1}^{m,n}$ ή απλώς $[a_{i,j}]$. Το στοιχείο $a_{i,j}$ του πίνακα A βρίσκεται στην i, j θέση του πίνακα, δηλ. στην i-γραμμή και την j-στήλη του. Δηλαδή, οι δείκτες κάθε στοιχείου προσδιορίζουν μονοσήμαντα τη θέση του στοιχείου στον πίνακα (όπως οι συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο). Ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη γραμμή στην οποία βρίσκεται το στοιχείο, ενώ ο δεύτερος δείκτης στη στήλη. Έτσι, η γενική μορφή ενός $m \times n$-πίνακα A, είναι

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,j} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.1.1 *Ο πίνακας ενός δικτύου αεροπορικών συνδέσεων μεταξύ τεσσάρων πόλεων (1 όπου υπάρχει σύνδεση και -1 όπου δεν υπάρχει)*

	Αθήνα	*Θεσσαλονίκη*	*Ηράκλειο*	*Αλεξανδρούπολη*
Αθήνα	0	1	1	1
Θεσσαλονίκη	1	0	1	−1
Ηράκλειο	1	1	0	−1
Αλεξανδρούπολη	1	−1	−1	0

◇

Παράδειγμα 2.1.2 *Πραγματικοί πίνακες διαστάσεων* 3×4 *και* 2×2, *αντίστοιχα*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 19 \\ 2 & 0 & -25 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

και μιγαδικός πίνακας διάστασης 2×2

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 2-i & 3-5i \end{bmatrix}.$$

◇

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε με απλούς ορισμούς σε ορισμένες ειδικές μορφές πινάκων

- Αν $m = n$, τότε ο πίνακας A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

  Σε έναν τετραγωνικό $n \times n$-πίνακα $A = [a_{i,j}]$ ονομάζουμε *κύρια διαγώνιο* τα στοιχεία της μορφής $a_{i,i}, i = 1, 2, \dots, n$ και *δευτερεύουσα διαγώνιο* τα στοιχεία της μορφής $a_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = n - i + 1$.

  Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

  τότε τα στοιχεία $a_{1,1} = -2$, $a_{2,2} = 5$, $a_{3,3} = 6$ συνθέτουν την κύρια διαγώνιο του A, ενώ τα στοιχεία $a_{1,3} = 1$, $a_{2,2} = 5$, $a_{3,1} = 9$ συνθέτουν τη δευτερεύουσα διαγώνιο του A.

Ορίζουμε επίσης ως πρώτη άνω διαγώνιο τα στοιχεία της μορφής $a_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ και ως πρώτη κάτω διαγώνιο τα στοιχεία της μορφής $a_{i+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ανάλογα ορίζονται και οι 2η, 3η, $\ldots$ άνω και κάτω διαγώνιος.

- Ένας πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά ονομάζεται μηδενικός και συμβολίζεται συνήθως με $\mathbf{0}_{m\times n}$

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ στήλες}} \; m \text{ γραμμές}$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας D που έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιό του ονομάζεται *διαγώνιος* (diagonal)

$$D_{n\times n} = \begin{bmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

είναι ένας διαγώνιος 6×6-πίνακας, αφού όλα τα στοιχεία του εκτός από κάποια της κυρίας διαγωνίου του είναι μηδενικά.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας U που έχει όλα τα στοιχεία κάτω από την κυρία διαγώνιό του μηδενικά ονομάζεται *άνω-τριγωνικός* (upper triangular), ενώ ένας τετραγωνικός πίνακας L που έχει όλα τα στοιχεία πάνω από την κυρία διαγώνιό του μηδενικά ονομάζεται *κάτω-τριγωνικός* (lower triangular)

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{2,2} & \dots & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,n-1} & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$
$$u_{ij} \equiv 0 \quad \forall i > j$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \dots & l_{n-1,n-1} & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix}$$
$$l_{ij} \equiv 0 \quad \forall i < j$$

Για παράδειγμα, ο 3×3-πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

είναι ένας άνω-τριγωνικός πίνακας, ενώ ο 3×3-πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

είναι κάτω-τριγωνικός.

Ένας διαγώνιος πίνακας μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση τριγωνικού πίνακα.

- Ένας διαγώνιος πίνακας $\mathbf{I}_n \equiv \mathbf{I}_{n\times n}$ του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με 1, ονομάζεται μοναδιαίος

$$\mathbf{I}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα, ο

$$\mathbf{I}_{3\times 3} = \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ο μοναδιαίος 3×3-πίνακας.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει μη μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο και σε ίσο αριθμό άνω και κάτω διαγωνίων, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν, ονομάζεται πίνακας δέσμη (banded). Όταν ο αριθμός των μη μηδενικών γειτονικών προς την κύρια διαγώνιο άνω και κάτω διαγωνίων είναι 1, τότε ο πίνακας λέγεται *τριδιαγώνιος* (tridiagonal)

$$T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

- Ένας $1 \times n$-πίνακας A που έχει μόνο μία γραμμή, ονομάζεται *πίνακας-γραμμή* $A = [a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,n}]$ όπως ο 1×5-πίνακας $[6 \quad 0 \quad -11 \quad 2 \quad 8]$.
- Ένας $n \times 1$-πίνακας B που έχει μόνο μία στήλη, ονομάζεται *πίνακας-στήλη*

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{bmatrix} \text{ όπως για παράδειγμα ο } 4 \times 1\text{-πίνακας } \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Ένας 1×1-πίνακας C που έχει μόνο ένα στοιχείο, ονομάζεται *πίνακας-στοιχείο* $C = [c_{1,1}]$, όπως ο πίνακας-στοιχείο $[8]$.

Ο *ανάστροφος* (transpose) A^T ενός πίνακα A προκύπτει, εάν στον πίνακα A αλλάξουμε τις γραμμές σε στήλες και τις στήλες σε γραμμές.
Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

τότε

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Επίσης, αν $B = [2 \quad 4 \quad 0]$ τότε

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και αν

$$C = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

τότε $C^T = [6 \quad 3]$.

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να σταθούμε για να παρατηρήσουμε ότι ένας πίνακας-στήλη ονομάζεται και διάνυσμα-στήλη, ενώ ένας πίνακας-γραμμή ονομάζεται και διάνυσμα-γραμμή. Ακολούθως, οι γραμμές ενός πίνακα καλούνται και διανύσματα-γραμμές και, αντίστοιχα, οι στήλες ενός πίνακα καλούνται και διανύσματα-στήλες. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένας $m \times n$-πίνακας περιέχει ακριβώς m το πλήθος διανύσματα-γραμμές και n το πλήθος διανύσματα-στήλες. Συνεπώς, ένας πίνακας μπορεί να περιγραφεί πλήρως και μέσω των διανυσμάτων-γραμμών ή των διανυσμάτων-στηλών του.

Για παράδειγμα, ο ακόλουθος 2×4-πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

μπορούμε να πούμε ότι περιέχει δύο διανύσματα-γραμμές, διαστάσεων 1×4 το καθένα

$$[2 \quad -6 \quad 0 \quad 1] \quad \text{και} \quad [9 \quad 7 \quad -4 \quad 8]$$

και τέσσερα διανύσματα-στήλες, διαστάσεων 2×1 το καθένα

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{i,j}]$ ονομάζεται *συμμετρικός*, αν ισχύει η σχέση $A = A^T$, όπου A^T είναι ο ανάστροφος του A. Προφανώς, για τα στοιχεία του A ισχύει ότι $a_{i,j} = a_{j,i}\ \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$. Σε έναν συμμετρικό πίνακα, τα στοιχεία του είναι διατεταγμένα συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιό του.

  Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & 4 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & -8 \\ -7 & -5 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

  είναι ένας συμμετρικός 4×4-πίνακας, αφού προφανώς ισχύει ότι $A = A^T$.