

## ΣΗΜΕΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΚΔΟΤΗ

Ο ανά χείρας τόμος είναι αφιερωμένος στο περίφημο μοντέλο γενικής οικονομικής ισορροπίας και οικονομικής μεγέθυνσης του μεγάλου μαθηματικού John von Neumann. Περιέχει έναν πρόλογο του Nicholas Kaldor, γραμμένο για τον τόμο *John von Neumann and Modern Economics* (Clarendon Press, Oxford 1989), που επιμελήθηκαν οι Mohammed Dore, Sukhamou Chakravarty και Richard Goodwin, το ίδιο το άρθρο του von Neumann, το γνωστό άρθρο του David Champernowne που γράφτηκε για να κάνει το άρθρο του von Neumann κατανοητό στους χωρίς μαθηματική παιδεία οικονομολόγους και δημοσιεύθηκε το 1945/46 στο *Review of Economic Studies* μαζί με την αγγλική μετάφραση του τελευταίου, ένα άρθρο του Κώστα Σιδηρόπουλου, ο οποίος μετέφρασε το άρθρο του von Neumann και το άρθρο του Champernowne στα ελληνικά για τα *Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας*, και δύο άρθρα του Γιώργου Σταμάτη, τα οποία γράφτηκαν ειδικά για τον ανά χείρας τόμο.

Η ελληνική μετάφραση των άρθρων του von Neumann και του Champernowne καθώς και το άρθρο του Σιδηρόπουλου πρωτοδημοσιεύθηκαν στα *Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας* (τεύχος 8, Άνοιξη 1991).

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

JOHN VON NEUMANN: ΜΙΑ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗ ΑΝΑΜΝΗΣΗ\*

Ο Johnny Neumann γεννήθηκε και μεγάλωσε στην ίδια πόλη με μένα – τη Βουδαπέστη. Πήγαινε, όμως, σε διαφορετικό σχολείο – το λεγόμενο «Ευαγγελικό Γυμνάσιο» (που ανήκε στη Λουθηρανή Εκκλησία), ενώ εγώ πήγαινα στο λεγόμενο «*mintagymnasium*» (σε κατά λέξιν μετάφραση, «πρότυπο γυμνάσιο»)<sup>1</sup>. Έτσι, λοιπόν, ενώ εγώ άκουγα συχνά γι' αυτόν από κοινούς μας φίλους, δεν έτυχε να συναντηθούμε παρά μόνον αφού τελειώσαμε το σχολείο και το πανεπιστήμιο. Εκείνη την εποχή ήταν κάτι σαν έθιμο για τους νεαρούς Ούγγρους που σπούδαζαν στο εξωτερικό να επιστρέφουν στη Βουδαπέστη για τις μακρές καλοκαιρινές διακοπές. Ήταν σε μια τέτοια περίοδο που συναντηθήκαμε σ' ένα γεύμα και προφανώς συμπαθήσαμε ο ένας τον άλλον, διότι κανονίσαμε να ξανασυναντηθούμε, και αργότερα κάναμε τακτικούς περιπάτους στους λόφους της Βούδας.

Ο Janos, το αντίστοιχο του John, ήταν πέντε χρόνια μεγαλύτερός μου – κάτι που θα μέτραγε πολύ στην εφηβεία μας ή στην ώριμη ηλικία μας, αλλά δεν είχε σημασία τότε στα είκοσι. Είχα δεδαίως ακουστά τη φήμη του ως τελειόφοιτο στα μαθηματικά – από το δάσκαλό

---

\* Μετάφραση: Θέμης Μίνογλου.

1. Λεγόταν έτσι, επειδή ήταν το δημόσιο σχολείο όπου εκπαιδεύονταν οι δάσκαλοι και καταρτιζόνταν τα προγράμματα των διαφόρων μαθημάτων.

του, τον περίφημο καθηγητή Polya του Πανεπιστημίου της Βουδαπέστης, που δήλωνε ότι ήταν ο καλύτερος φοιτητής που είχε ποτέ. Ο Johnny μάλλον δεν θα είχε ακούσει και πολλά για μένα, γιατί ήμουν ακόμη φοιτητής στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο του Λονδίνου, δοηθός έρευνας, και δεν είχα αρχίσει ακόμη να δημοσιεύω. Είχαμε, πάντως, πολλά να πούμε για την ενσωμάτωση των σύγχρονων ιδεών στα αίτια της οικονομικής κρίσης (αυτά συνέβαιναν πριν τον Keynes) και τις ανάλογες εξελίξεις μετά τον γερμανικό και τον ιταλικό φασισμό. Όταν τα ξανασκέφτομαι, ο Johnny προτιμούσε να κάνει παρά να απαντάει ερωτήσεις, αλλά ήταν καταπληκτικός αφηγητής και τρελαινόταν για κουτσομπολιά.

Εκείνη την εποχή ήταν «Privatdozent» [=άμισθος υφηγητής] του Πανεπιστημίου του Βερολίνου (μα διάκριση που απονεμόταν σε ελάχιστους κάθε χρόνο και σου έδινε το δικαίωμα να κάνεις παραδόσεις στο Πανεπιστήμιο). Αργότερα πήγε στο Princeton, αρχικά ως Επισκέπτης Καθηγητής και ύστερα, το 1932, ως Καθηγητής των Μαθηματικών στο νεοϊδρυθμένο Ινστιτούτο Ανωτέρων Σπουδών, όπου ήταν ο νεότερος από τους διδάσκοντες. Αυτό το Ινστιτούτο, δημιουργία του Abraham Flexner, σκόπευε να αποτελέσει ένα φυτόριο έρευνας και ανάπτυξης και να προσελκύσει έτσι τους ικανότερους επιστήμονες απ' όλο τον κόσμο, όπου θα μπορούσαν ν' αφιερώσουν όλο το χρόνο τους στην έρευνα. Η πρώτη φουρνιά επιστημόνων περιελάμβανε, εκτός από τον Neumann, τον Ferni, τον Einstein, τον Weyl, τον Wigner και άλλους παρόμοιες φήμης.

Τα ενδιαφέροντά του ήταν πολλά. Εκτός από πολυάριθμα άρθρα στα μαθηματικά, θεωρητικά και εφαρμοσμένα, δημοσίευσε, σε ηλικία 29 ετών, το πρώτο του βιβλίο *Μαθηματική θεμελίωση της Κβαντομηχανικής*. Δεν είμαι σε θέση να κρίνω αυτό το καθαρώς μαθηματικό επίτευγμα, αλλά φαίνεται να έχει λύσει την εμφανή ασυμβατότητα μεταξύ της κυματικής θεωρίας και της σωματιδιακής θεωρίας περί φωτός, που και οι δύο υπόσχονταν σημαντική προβλεπτική ικανότητα, πα-

ρότι η βασική έννοια καθεαυτή δρισκόταν έξω από τη σφαίρα της ανθρώπινης κατανόησης. Μπορούμε να εννοήσουμε κάτι ως κύμα (όπου τα σωματίδια κινούνται πάνω-κάτω επί τόπου) ή ως «quantum» (μια απειροελάχιστη ποσότητα ύλης που ταξιδεύει στο χώρο με την ταχύτητα του φωτός), αλλά όχι και τα δύο ταυτοχρόνως. Ωστόσο, ενώ είναι αδύνατον να συλλάβουμε τη συνύπαρξη αυτών των δύο φαινομενικά ασύμβατων υποθέσεων, η επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων έδειξε ότι είναι δυνατόν να αληθεύουν και οι δύο· είναι διαφορετικές όψεις του ίδιου πράγματος.<sup>2</sup>

Κάποια μέρα εξέφρασε το ενδιαφέρον του για τα οικονομικά και μου ζήτησε να του προτείνω ένα μικρό βιβλίο που να δίνει μια θεωρητική μαθηματική διατύπωση της κρατούσας οικονομικής θεωρίας. Του πρότεινα το *Über Wert, Kapital und Rente* του Wicksell, που παρείχε μια σύντομη μαθηματική διατύπωση του Walras και των άλλων «μαρξινιστών», αλλά ενσωμάτωνε και τη θεωρία κεφαλαίου του Böhm-Bawerk και των οπαδών του. Το διάβασε σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα και εξέφρασε κάποιον σκεπτικισμό για τη μαρξινιστική προσέγγιση, διότι δίνει μεγάλη έμφαση στη δυνατότητα υποκατάστασης και ελάχιστη στις δυνάμεις που οδηγούν σε μια ισορροπία μεγέθυνση.

Θυμάμαι ακόμη ότι μετά την ανάγνωση του *Über Wert, Kapital und Rente*, ήθελε να δει τις θαλρασιανές εξισώσεις στο πρωτότυπο. Αργότερα μου είπε ότι δεν παρέχουν μια πραγματική λύση, αφού οι εξισώσεις είναι ενδεχόμενο να δώσουν τόσο αρνητικές όσο και θετικές τιμές (ή ποσότητες) – αλλά στον πραγματικό κόσμο, ενώ τα εμπορεύματα μπορεί να είναι «ελεύθερα αγαθά» (με μηδενικές τιμές), δεν υπάρχει το ανάλογο των *αρνητικών* τιμών. Για να μη συμβεί κάτι τέτοιο, το σύστημα εξισώσεων πρέπει να οριστεί με εντελώς διαφορετικό τρόπο, και αυτό, όπως είπε,

---

2. Το βιβλίο του von Neumann παρείχε την πρώτη συστηματική διερεύνηση των ιδεών που αναπτύχθηκαν από τον Heisenberg, τον Schrödinger, τον Dirac και άλλους.

δεν ήταν καθόλου απλό πρόβλημα. (Αυτό αποτέλεσε *ίσως* την αφετηρία για το περίφημο άρθρο του.)

Μια μέρα, το 1939 νομίζω, κυκλοφόρησε ένα λεπτό φυλλάδιο, που έφερε την επιγραφή «με τη συγγνώμη του συγγραφέα», ανατυπωμένο από τον τόμο *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* (Τα Αποτελέσματα ενός Μαθηματικού Σεμιναρίου), που έλαβε χώρα στη Βιέννη το 1935 ή 1936, υπό τη διεύθυνση του K.[arl] Menger, καθηγητή Μαθηματικών που ήταν γιος του διάσημου οικονομολόγου [Carl Menger], ενός από τους τρεις ιδρυτές της νεοκλασικής σχολής). Περιλάμβανε ένα άρθρο με τίτλο (σε κατά λέξη μετάφραση) «Σχετικά με ένα σύστημα οικονομικών εξισώσεων και μια γενίκευση του θεωρήματος του σταθερού σημείου του Brouwer».<sup>3</sup> Δυστυχώς, το άρθρο ήταν πάνω από τις δυνάμεις μου εκτός από την αρχή, όπου δήλωνε ότι ασχολείτο με την όψη της κυκλοτερικότητας της διαδικασίας παραγωγής: εμπορεύματα παράγονται από εμπορεύματα με τη βοήθεια τεχνικών μεταδλητών (δηλ. των διαδικασιών παραγωγής, οι οποίες ορίζονται μέσω ενός συνόλου συντελεστών εισροών και συντελεστών εκροών, και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε γραμμικό συνδυασμό με μεταβαλλόμενες εντάσεις, ή να μη χρησιμοποιηθούν καθόλου, και του ενιαίου ρυθμού μεγέθυνσης της οικονομίας, δηλαδή του ρυθμού μεγέθυνσης της παραγωγής όλων των εμπορευμάτων) και νομισματικών μεταδλητών (που συνδέονται με τις τιμές των εμπορευμάτων και το ποσοστό κέρδους ή, μάλλον, με το συντελεστή κέρδους που είναι 1 συν το ποσοστό κέρδους). Λύνει το σύστημα των τιμών και των εντάσεων των διαδικασιών παραγωγής για την κατάσταση ισορροπίας, κάνοντας την υπόθεση ότι κάθε διαδικασία αποφέρει το ίδιο ποσοστό κέρδους και

---

3. «Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes», στο *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, επιμ. K. Menger, Βιέννη 1937.

το προϊόν κάθε διαδικασίας αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό.\* Μπόρεσα επίσης να παρακολουθήσω το νόημα της τελευταίας ενότητας του άρθρου, όπου ισχυρίζεται ότι απέδειξε ότι το (υπό συνθήκες ανταγωνισμού) ποσοστό κέρδους είναι ίσο τόσο με τον μέγιστο ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος, ο οποίος προκύπτει από τον άριστο συνδυασμό των εντάσεων των διαδικασιών παραγωγής, όσο και με το ποσοστό κέρδους, το οποίο προκύπτει για το χαμηλότερο δυνατό επίπεδο τιμών, για τις οποίες δεν υπάρχουν «κέρδη» (με την έννοια των εσόδων πέραν του κόστους, όπου στο κόστος συμπεριλαμβάνεται και το κέρδος) σε καμιά διαδικασία παραγωγής, και ότι το ποσοστό κέρδους είναι πάντα το ίδιο σ' όλες τις διαδικασίες παραγωγής. Δείχνει ότι υπάρχει μια ευρεία δυναμικότητα μεταξύ των δύο κατηγοριών μεταβλητών, και ότι το ίδιο ποσοστό κέρδους αντιπροσωπεύει τόσο τον υψηλότερο ρυθμό μεγέθυνσης της παραγωγής, όσο και το χαμηλότερο ποσοστό κέρδους που κάνει δυνατή την ύπαρξη ενός συστήματος τιμών που δεν αποφέρει κέρδος.<sup>4</sup>

Το νεωτερικό στοιχείο που μ' εντυπωσίασε στο άρθρο του von Neumann ήταν ότι περιείχε μόνον εμπορεύματα που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή εμπορευμάτων — η εργασία δεν εμφανίζεται ως συντελεστής παραγωγής, παρόλα μόνον επειδή το «καλάθι κατανάλωσης» των εργατών περιλαμβάνεται στις εισροές — οι εργάτες υποτίθεται ότι δαπανούν για κατανάλωση όλο τους το εισόδημα, ενώ δεν υπάρχει κατανάλωση από τα κέρδη. Ήταν, έτσι, παρόμοιο

---

\* Εννοεί μάλλον ότι οι παραγόμενες ποσότητες όλων των προϊόντων αυξάνονται με τον ίδιο ρυθμό (Σ.τ.μ.).

4. Χρησιμοποιώντας τον όρο «κέρδος» μόνον για το ποσό, κατά το οποίο η τιμή υπερβαίνει το συνολικό κόστος (συμπεριλαμβανομένου του τόκου που αποδίδει το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο), δείχνει ότι υπάρχει ένα ελάχιστο ποσοστό κέρδους που επιτρέπει την ύπαρξη ενός συστήματος τιμών των εμπορευμάτων που να αντιστοιχούν στο κόστος παραγωγής.

με μια από τις «ειδικές περιπτώσεις» του άρθρου μου για τη θεωρία του κεφαλαίου που δημοσιεύτηκε στην *Econometrica* τον Φεβρουάριο του 1937.<sup>5</sup> Αυτό υπέθετε έναν κόσμο όπου δεν υπήρχαν «αρχικοί» συντελεστές (εργασία και γη) —ο αντίποδας της πρώτης περίπτωσης του Wicksell, όπου αυτός υπέθετε ότι δεν υπάρχουν «παραγόμενα μέσα παραγωγής»<sup>6</sup>—, μια οικονομία η οποία αποτελείτο από «μηχανές» και «σκλάβους», όπου οι πρώτες παράγουν τους τελευταίους και αντιστρόφως, και η οποία αποσκοπούσε να δείξει ότι η καθαρή απόδοση (η ετήσια αύξηση του αποθέματος των μηχανών και των σκλάβων) θα είναι μέγιστη όταν οι δύο συντελεστές παράγονται σε τέτοιες αναλογίες ώστε να κάνουν την καθαρή απόδοση ίση στο καθένα από τα δύο είδη επένδυσης. Ο von Neumann θεωρεί ότι υπάρχουν η εμπορεύματα που μπορούν να παραχθούν από m διαδικασίες και ότι όλα τα εμπορεύματα εμφανίζονται τόσο ως εισροές όσο και ως εκροές σε όλες τις διαδικασίες, άρα όλες οι τιμές και οι εισροές καθώς και οι εκροές σε εμπορεύματα εμπεριέχονται στο ίδιο σύνολο εξισώσεων.

Μολονότι δεν μπορούσα να παρακολουθήσω τη μαθηματική επιχειρηματολογία, η προσέγγιση αλλά και τα αποτελέσματά του μου φαίνονταν τόσο σημαντικά που άξιζαν ένα ευρύτερο κοινό απ' εκείνο, στο οποίο θα έφτανε ένας τόμος με επιλεγμένα μαθηματικά άρθρα, δημοσιευμένος στα γερμανικά από μαθηματικούς του Πανεπιστημίου της

---

5. «Annual Survey of Economic Theory; The Theory of Capital», *Econometrica*, Φεβρουάριος 1937, που αναδημοσιεύτηκε στο δικό μου *Essays on Value and Distribution*, 1960, σσ. 153 κ.ε. (Τι μέρος αυτού του άρθρου, που αποσκοπούσε να διευκρινίσει τις διαφορές μεταξύ της «Αυστριακής» θεωρίας του κεφαλαίου και της θεωρίας του Knight, είναι εμπνευσμένο από συζητήσεις με τον Johnny Neumann σε προηγούμενα χρόνια, δεν θα μπορούσα να πω.)

6. Wicksell, *Lectures on Political Economy* (αγγλική έκδοση, 1934), τόμ. I, Μέρος II, κεφ. 1, «Παραγωγή χωρίς κεφάλαιο».

Βιέννης. Γι' αυτό σκέφτηκα ότι θα έπρεπε να δημοσιευτεί σ' ένα περιοδικό οικονομικής θεωρίας, στα αγγλικά, ώστε να είναι προσιτό σε βρετανούς αλλά και αμερικανούς οικονομολόγους. Και επειδή εκείνη την εποχή ήμουν πρόεδρος της Συντακτικής Επιτροπής του *Review of Economic Studies*, θεώρησα σκόπιμο να μεταφραστεί στα αγγλικά από κάποιον που είχε τα προσόντα και να εγκρίνει στη συνέχεια τη μετάφραση ο συγγραφέας (που ήταν τότε στο Princeton, NJ) πριν τη δημοσίευση. Ο Johnny δέχτηκε —ήταν μάλιστα ευγνώμων για οποιαδήποτε ενέργεια θα βοηθούσε το μοντέλο του να φτάσει σ' ένα ευρύτερο κοινό, και τον απασχολούσε πάρα πολύ εκείνο στο οποίο δούλευε εκείνο τον καιρό (νομίζω ότι ίσως ήταν ο ηλεκτρονικός υπολογιστής) για να διαθέσει χρόνο ή προσπάθεια για να εξασφαλίσει ένα ευρύτερο κοινό σε οποιαδήποτε από τα παλιά του άρθρα. Το άρθρο αρχικά ανακοινώθηκε σ' ένα μαθηματικό σεμινάριο στο Princeton το 1932 (όπου οι σημαντικές του επιπτώσεις στα οικονομικά δεν έγιναν αντιληπτές) και δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά σ' έναν τόμο που επιμελήθηκε ο καθηγητής Menger το 1937, σ' ένα σεμινάριο του οποίου στη Βιέννη ο von Neumann θα πρέπει να ανακοίνωσε μια γερμανική εκδοχή του, και, παρά το γεγονός ότι ήταν καθηγητής στο Princeton, ο von Neumann δεν ενδιαφέρθηκε να το δημοσιεύσει στα αγγλικά.

Ψάχνοντας, βρήκα έναν τσεχοσλοβάκο πρόσφυγα που η μητρική του γλώσσα ήταν τα γερμανικά και είχε πτυχίο μαθηματικών, ο οποίος δέχτηκε να αναλάβει τη μετάφραση. Το πρόβλημα ήταν ότι τα αγγλικά του δεν ήταν πολύ καλά, και ενώ μπορούσε να αποδώσει στα αγγλικά το κείμενο, δεν ήταν δέβαιος ότι διατηρούσε το αρχικό νόημα. Το όλο εγχείρημα εξαρτάτο κατά πολύ από τις αναθεωρήσεις του ίδιου του συγγραφέα, που εκείνη την εποχή ήταν αφοσιωμένος σ' αυτό που έγινε γνωστό ως Μηχανολογικό Πρόγραμμα του Μανχάταν. Δέχτηκε, ωστόσο, να το κάνει στις λίγες ελεύθερες ώρες του, και προς έκπληξή μου επέστρεψε το κείμενο με ελάχιστες αλλαγές, αρκετούς



μήνες αργότερα. Ακόμη κι έτσι το άρθρο φαινόταν πάρα πολύ δύσκολο σ' ένα κοινό οικονομολόγων που δεν ήταν κυρίως μαθηματικοί, και γι' αυτό ζήτησα από τον David Champernowne, τον περισσότερο μαθηματικά σκεπτόμενο που γνώριζα, οικονομολόγο, να γράψει ένα επεξηγηματικό άρθρο *ad usum delphini*, για χρήση αυτών που κατανοούσαν τις βασικές έννοιες, το οποίο θα δημοσιευόταν παράλληλα στο *Review of Economic Studies*.<sup>7</sup>

Κανένας από μας, που εμπλακήκαμε σ' αυτήν τη συλλογική προσπάθεια να κάνουμε προσιτό το άρθρο του von Neumann στους αγγλόφωνους οικονομολόγους, δεν περίμενε ότι θα χαρακτηριζόταν, σαράντα χρόνια αργότερα, ως το «σπουδαιότερο άρθρο στα μαθηματικά οικονομικά που γράφτηκε ποτέ».<sup>8</sup>

Εκτός από τη φυσική και τα οικονομικά, ο Johnny Neumann ενδιαφερόταν και για τη θεωρία της στρατηγικής των παιγνίων, και το ενδιαφέρον του για τα οικονομικά πολύ πιθανόν να προήλθε από αυτήν. Μάλιστα θεωρείται γενικώς ως ένας από τους θεμελιωτές του κλάδου των μαθηματικών που ονομάζεται «θεωρία των παιγνίων».<sup>9</sup>

Στη διάρκεια του πολέμου τον είδα ελάχιστα – θυμάμαι μια φορά το 1944 που μου τηλεφώνησε για να μου πει ότι ήταν στο Λονδίνο και αν θα μπορούσα να τον έδλεπα έ-

---

7. J. von Neumann (1945). «A Model of General Economic Equilibrium», σσ. 1-9, D. G. Champernowne, «A Note on J. von Neumann's article on A Model of Economic Equilibrium», σσ. 10-18, *Review of Economic Studies*, XIII:1.

8. E. R. Weintraub (1983), «On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930-54», *Journal of Economic Literature*, XXI:1.

9. Δώδεκα χρόνια αργότερα δημοσίευσε ένα βιβλίο, σε συνεργασία με τον Oskar Morgenstern, το *Theory of Games and Economic Behaviour*, που ήταν κάπως απογοητευτικό για τους οικονομολόγους, διότι μετά από την τόσο πολυπλοκότητα της θεωρίας των παιγνίων, οι εφαρμογές της στα οικονομικά ήταν εξεζητημένες και όχι τόσο διαφωτιστικές.

να θράδν. Τον είδα, και περάσαμε αρκετές ώρες στο ξενοδοχείο του συζητώντας για τον πόλεμο και την κατάσταση. Μου είπε πως είχε περάσει μεγάλο διάστημα στο Λος Άλαμος (ένα μέρος στην έρημο του Νέου Μεξικού), χωρίς να μου πει για ποιο λόγο, και ότι είχε δουλέψει πολύ πάνω στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και είχε επινοήσει μια νέα μέθοδο που αύξανε την αποτελεσματικότητά τους κατά αρκετές χιλιάδες φορές.<sup>10</sup>

Μετά τον πόλεμο ορίστηκε μέλος της ιδρυθείσας από τον Πρόεδρο Τρούμαν τριμελούς Επιτροπής Ατομικής Ενέργειας των Ηνωμένων Πολιτειών, η οποία φιλοδοξούσε να αποτελέσει το ανώτατο συμβουλευτικό όργανο του Προέδρου σχετικά με τις επιτρεπτές χρήσεις και την αποφυγή των καταχρήσεων της ατομικής ενέργειας.

Η τελευταία μου συνάντηση με τον Johnny ήταν στο νοσοκομείο Walter Reed στην Ουάσιγκτον, όπου νοσηλευόταν στη διάρκεια της μοιραίας αρρώστιας του -ξέροντας καλά ότι θα τον οδηγήσει στο θάνατο- και η συζήτηση μαζί του ήταν πιο συναρπαστική και γεμάτη ερεθίσματα παρά ποτέ.

Βρισκόταν αναμφίβολα πλησιέστερα στη μεγαλοφυΐα από οποιονδήποτε άλλον συνάντησα στη ζωή μου.

*Nicholas Kaldor*

Cambridge

Ιούλιος 1985

---

10. Δεν είμαι σε θέση να περιγράψω τι ακριβώς ήταν αυτό, παρ' όλο που μου το εξήγησαν αργότερα πολλές φορές. Το μόνο που ξέρω είναι ότι έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της ατομικής δόμδας.

JOHN VON NEUMANN

Μετάφραση: Κώστας Σιδηρόπουλος

## ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ<sup>\*/\*\*</sup>

Αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι η λύση ενός τυπικού, οικονομικού συστήματος εξισώσεων. Το σύστημα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) Αγαθά παράγονται όχι μόνον μέσω «φυσικών συντελεστών παραγωγής», αλλά κατά κύριο λόγο μέσω αγαθών.

Οι διαδικασίες παραγωγής επιτρέπεται να είναι κυκλικές, δηλ. το αγαθό  $G_1$  παράγεται με τη βοήθεια του αγαθού  $G_2$  και το  $G_2$  με τη βοήθεια του  $G_1$ .

2) Επιτρέπεται να υπάρχουν περισσότερες τεχνικά δυνατές διαδικασίες παραγωγής από ό,τι αγαθά και για αυτόν τον λόγο δεν ωφελεί η «λύση των εξισώσεων». Το πρόβλημα είναι μάλλον να καθορίσουμε ποιες διαδικασίες πράγματι θα χρησιμοποιούνται και ποιες όχι (ως «μη κερδοφόρες»).

---

\* Αυτή η εργασία πρωτοδημοσιεύτηκε στα γερμανικά με τον τίτλο «Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes» στον τόμο *Ergebnisse eines Mathematischen Seminars* που εκδόθηκε από τον K. Menger (Βιέννη 1938). Μεταφράστηκε στα αγγλικά από τον G. Morgenstern. Ένα σημείωμα του D. G. Champernowne με σχόλια πάνω σ' αυτό το άρθρο δημοσιεύεται παρακάτω.

\*\* Τίτλος της αγγλικής μετάφρασης: John von Neumann, «A Model of General Economic Equilibrium», *The Review of Economic Studies*, τόμ. 13(33)(1945/46), σσ. 1-9.

Για να μπορέσουμε να εξετάσουμε τις (1), (2) τελείως γενικά, οφείλουμε να εξιδανικεύσουμε άλλα στοιχεία του προβλήματος (δες τις παραγράφους 1 και 2). Πλείστες αυτών των εξιδανικεύσεων δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, αυτό όμως το θέμα δεν θα συζητηθεί εδώ.

Ο τρόπος που τίθενται τα ερωτήματα μας οδηγεί αναγκαστικά σε ένα σύστημα ανισοτήτων (3)-(8') στην παράγραφο 3, η δυνατότητα λύσης του οποίου δεν είναι προφανής, δηλ. *δεν είναι δυνατό να αποδειχθεί με κάποια ποιοτική επιχειρηματολογία*. Η μαθηματική απόδειξη είναι δυνατή μόνο με μια γενίκευση του θεωρήματος του Brouwer περί σταθερού σημείου, δηλ. με την εφαρμογή πολύ θεμελιωδών στοιχείων *τοπολογίας*. Αυτό το γενικευμένο θεώρημα περί σταθερού σημείου (το «λήμμα» της παραγράφου 7) παρουσιάζει επίσης ενδιαφέρον αυτό καθαυτό.

Η σύνδεση με την τοπολογία ίσως εκπλήσσει πολύ εκ πρώτης όψεως, ο συγγραφέας όμως θεωρεί, ότι αυτό είναι φυσικό σε προβλήματα αυτού του είδους. Αιτιολογείται άμεσα από την ύπαρξη ενός ορισμένου προβλήματος «μεγίστου-ελαχίστου», γνωστού από τη θεωρία των διατάξεων. Στην περίπτωση μας, το πρόβλημα μεγίστου-ελαχίστου διατυπώνεται στην παράγραφο 5. Αυτό το πρόβλημα σχετίζεται στενά με ένα άλλο πρόβλημα, που παρουσιάζεται στη θεωρία των παιγνίων (δες την υποσημείωση 1 στην παρ. 6). Μια άμεση ερμηνεία της συνάρτησης  $\Phi(X,Y)$  θα ήταν πολύ επιθυμητή. Ο ρόλος της φαίνεται να είναι όμοιος με αυτόν δυναμικών θερμοδυναμικής στη μακροσκοπική θερμοδυναμική· μπορούμε να υποθέσουμε και να ισχυριστούμε ότι η ομοιότητα θα ισχύσει στην πλήρη μακροσκοπική γενικότητά της (ανεξάρτητα από τις περιοριστικές εξιδανικεύσεις μας).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της θεωρίας μας, μέχρι

στιγμής χωρίς επεξήγηση, είναι ο αξιοσημείωτος δυϊσμός (συμμετρία) ανάμεσα στις χρηματικές μεταβλητές (τιμές  $y_j$ , συντελεστής επιτοκίου  $\delta$ ) και τις τεχνικές μεταβλητές (εντατικότητα παραγωγής  $x_i$ , συντελεστής μεγέθυνσης της οικονομίας  $\alpha$ ). Αυτό δείχνεται πολύ καθαρά στην παράγραφο (3) [(3)-(8')] όπως επίσης και στη διατύπωση υπό μορφή μεγίστου-ελαχίστου της παραγράφου 5 [(7\*\*)-(8\*\*)].

Τέλος, προσοχή δίνεται στα αποτελέσματα της παραγράφου 11 από όπου προκύπτει, ανάμεσα σε άλλα, ότι ο κανονικός μηχανισμός τιμών προβάλλει –εφόσον οι παραδοχές μας ισχύουν– τις τεχνικά πλέον αποδοτικές εντατικότητες παραγωγής. Αυτό δεν φαίνεται παράλογο αφού έχουμε απλείψει όλες τις περιπλοκές που δημιουργεί το χρήμα.

Η παρούσα εργασία παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το χειμώνα του 1932 στο μαθηματικό σεμινάριο του πανεπιστημίου του Princeton. Η δημοσίευσή της έγινε μετά από προτροπή του κ. K. Menger, προς τον οποίο ο συγγραφέας εκφράζει τις ευχαριστίες του.

1. Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα: υπάρχουν  $n$  αγαθά  $G_1, \dots, G_n$  που μπορούν να παραχθούν με  $m$  διαδικασίες  $P_1, \dots, P_m$ . Ποιες διαδικασίες θα χρησιμοποιηθούν (ως «κερδοφόρες») και ποιες τιμές αγαθών θα προκύψουν; Το πρόβλημα προφανώς δεν είναι τετριμμένο, επειδή καθένα από τα μέρη του μπορεί να απαντηθεί μόνον αφού πρώτα απαντηθεί το άλλο, δηλ. η λύση του είναι άρρητη. Αναλυτικά παρατηρούμε ότι:

- (a) Εφόσον είναι δυνατόν να είναι  $m > n$ , το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί με τη γνωστή λύση των εξισώσεων. Προς αποφυγή περαιτέρω περιπλοκών προϋποθέτουμε ότι:
- (b) υπάρχουν σταθερές αποδόσεις (κλίμακος),

(c) οι φυσικοί συντελεστές παραγωγής, συμπεριλαμβανομένης της εργασίας, μπορούν να επεκτείνονται σε απεριόριστες ποσότητες.

Το ουσιαστικό φαινόμενο, που επιθυμούμε να συλλάβουμε, είναι το εξής: αγαθά παράγονται μέσω αγαθών (δες την εξίσωση (7) παρακάτω) και θέλουμε να προσδιορίσουμε: (i) τις διαδικασίες που θα χρησιμοποιηθούν· (ii) τη σχετική ταχύτητα με την οποία θα αυξάνεται η συνολική ποσότητα αγαθών· (iii) τις τιμές που θα προκύψουν· (iv) το ύψος του επιτοκίου.

Προκειμένου να απομονώσουμε αυτό το φαινόμενο πλήρως, προϋποθέτουμε ακόμη ότι:

(d) κατανάλωση αγαθών λαμβάνει χώρα μόνο μέσω εκείνων των διαδικασιών παραγωγής οι οποίες περιλαμβάνουν τα αναγκαία προς το ζην αγαθά που καταναλώνονται από εργάτες και υπαλλήλους.

Με άλλα λόγια, προϋποθέτουμε ότι όλο το εισόδημα πέραν του αναγκαίου για τα προς το ζην επανεπενδύεται. Είναι προφανές σε τι είδους θεωρητικά μοντέλα αντιστοιχούν οι παραπάνω προϋποθέσεις.

2. Σε κάθε διαδικασία  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ποσότητες  $a_{ij}$  (εκφρασμένες με κάποιες μονάδες) αναλώνονται και ποσότητες  $b_{ij}$  παράγονται από τα αντίστοιχα προϊόντα  $G_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Η διαδικασία μπορεί να συμβολιστεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$P_i: \sum_{j=1}^n a_{ij} G_i \rightarrow \sum_{j=1}^n b_{ij} G_j. \quad (1)$$

Σημειώνεται ότι:

(e) κεφαλαιουχικά αγαθά υπεισέρχονται και στα δύο σκέλη της (1)· η λόγω χρήσης φθορά κεφαλαιουχικών αγαθών περιγράφεται με την εισαγωγή διαφορετικών βαθμί-

δων φθοράς ως διαφορετικών αγαθών, χρησιμοποιώντας μια ξεχωριστή διαδικασία  $P_i$  για καθεμιά από αυτές.

(f) κάθε διαδικασία είναι διάρκειας μιας μονάδας χρόνου. Διαδικασίες μεγαλύτερης διάρκειας διασπώνται σε απλές διαδικασίες μοναδιαίας διάρκειας, εισάγοντας, εφόσον είναι αναγκαίο, ενδιάμεσα προϊόντα ως πρόσθετα αγαθά.

(g) Η (1) είναι σε θέση να περιγράψει την ειδική περίπτωση όπου το αγαθό  $G_j$  μπορεί να παραχθεί μόνο μαζί με ορισμένα άλλα, δηλ. με τα πάντα από κοινού με αυτό παραγόμενα προϊόντα.

Στην πραγματική οικονομία, αυτές οι διαδικασίες  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , χρησιμοποιούνται με ορισμένες *εντατικότητες*  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Αυτό σημαίνει ότι για τη συνολική παραγωγή οι ποσότητες των εξισώσεων (1) πρέπει να πολλαπλασιαστούν με  $x_i$ . Γράφουμε συμβολικά:

$$E = \sum_{i=1}^m x_i P_i. \quad (2)$$

Η  $x_i = 0$  σημαίνει ότι η διαδικασία  $P_i$  δεν χρησιμοποιείται. Ενδιαφερόμαστε για εκείνες τις καταστάσεις όπου η συνολική οικονομία μεγεθύνεται χωρίς αλλαγή δομής, όπου δηλ. οι αναλογίες των εντατικοτήτων  $x_1 : \dots : x_m$  παραμένουν αμετάβλητες, αν και τα ίδια τα  $x_1, \dots, x_m$  επιτρέπεται να μεταβάλλονται. Σε μια τέτοια περίπτωση αυτά πολλαπλασιάζονται με ένα κοινό συντελεστή  $\alpha$  ανά μονάδα χρόνου. Αυτός ο συντελεστής είναι ο *συντελεστής μεγέθυνσης της συνολικής οικονομίας*.

3. Οι αριθμητικοί άγνωστοι του προβλήματός μας είναι:

- (i) οι *εντατικότητες*  $x_1, \dots, x_m$  των διαδικασιών  $P_1, \dots, P_m$ ,
- (ii) ο *συντελεστής μεγέθυνσης* της συνολικής οικονομίας  $\alpha$ ,
- (iii) οι *τιμές*  $y_1, \dots, y_n$  των αγαθών  $G_1, \dots, G_n$ ,

(iv) ο συντελεστής επιτοκίου  $\theta (= 1 + \frac{z}{100}$ , όπου το  $z$  είναι το επιτόκιο σε εκατοστά ανά μονάδα χρόνου). Προφανώς είναι:

$$x_i \geq 0, \quad (3)$$

$$y_j \geq 0, \quad (4)$$

και επειδή μία λύση με  $x_1 = \dots = x_m = 0$ , ή  $y_1 = \dots = y_n = 0$  θα ήταν χωρίς νόημα, ισχύει:

$$\sum_{i=1}^m x_i > 0 \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j > 0. \quad (6)$$

Οι οικονομικές εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\alpha \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i \leq \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \quad (7)$$

και εάν στην (7) ισχύει το  $<$ , τότε

$$y_j = 0 \quad (7')$$

$$\theta \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \geq \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j \quad (8)$$



και εάν στην (8) ισχύει το  $>$ , τότε

$$x_i = 0. \quad (8')$$

Το νόημα των (7), (7') είναι: είναι αδύνατο να καταναλώνεται στη συνολική διαδικασία (2) από κάποιο αγαθό  $G_j$  περισσότερο από όσο παράγεται. Εάν, όμως, καταναλώνεται λιγότερο, εάν δηλ. υπάρχει περίσσεια παραγωγής του  $G_j$ , το  $G_j$  γίνεται ελεύθερο αγαθό και η τιμή του είναι  $y_j = 0$ .

Το νόημα των (8), (8') είναι: στην κατάσταση ισορροπίας δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί κέρδος σε καμιά διαδικασία  $P_i$  (ή στην αντίθετη περίπτωση τιμές και επιτόκιο θα αυξάνονταν — είναι φανερό πώς πρέπει να νοηθεί αυτή η αφαίρεση). Εάν, όμως, υπάρχει ζημία, εάν δηλ. η διαδικασία  $P_i$  είναι μη κερδοφόρα, τότε η  $P_i$  δεν θα χρησιμοποιηθεί και η εντατικότητα της  $x_i = 0$ .

Οι ποσότητες  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  θεωρούνται γνωστές, ενώ τα  $x_i$ ,  $y_j$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  είναι άγνωστα. Συνεπώς υπάρχουν  $m + n + 2$  άγνωστοι, όμως, επειδή στην περίπτωση των  $x_i$ ,  $y_j$  ρόλο παίζουν μόνο οι αναλογίες  $x_1 : \dots : x_m$ ,  $y_1 : \dots : y_n$ , οι άγνωστοι μειώνονται σε  $m + n$ . Έναντι αυτών υπάρχουν  $m + n$  συνθήκες (7) + (7') και (8) + (8'). Επειδή όμως αυτές οι σχέσεις δεν είναι ισότητες, αλλά μάλλον περίπλοκες ανισότητες, το γεγονός ότι ο αριθμός των συνθηκών είναι ίσος με τον αριθμό των αγνώστων δεν αποτελεί εγγύηση ότι το σύστημα μπορεί να λυθεί.

Η δυαδική συμμετρία των εξισώσεων (3), (5), (7), (7') των μεταβλητών  $x_i$ ,  $\alpha$  και του όρου «μη χρησιμοποιούμενη διαδικασία» αφενός, και των εξισώσεων (4), (6), (8), (8') των μεταβλητών  $y_j$ ,  $\beta$  και του όρου «ελεύθερα αγαθά» αφετέρου, φαίνεται αξιοσημείωτη.

4. Ο σκοπός μας είναι να λύσουμε τις (3)-(8'). Θα προχωρήσουμε να δείξουμε ότι:

*Λύσεις των (3)-(8') υπάρχουν οπωσδήποτε, αν και αρκετές λύσεις θα είναι με διαφορετικά  $x_1 : \dots : x_m$  ή με διαφορετικά  $y_1 : \dots : y_n$ . Το πρώτο είναι δυνατόν, επειδή ακριβώς δεν έχουμε εξαιρέσει την περίπτωση όπου περισσότερα  $P_i$  περιγράφουν την ίδια διαδικασία ή περισσότερα  $P_i$  συνδυάζονται για να σχηματίσουν μια άλλη. Το δεύτερο είναι δυνατόν, επειδή επιτρέπεται μερικά αγαθά  $G_j$  να εισέρχονται στην κάθε διαδικασία  $P_i$  μόνο με σταθερή αναλογία προς ορισμένα άλλα. Αλλά και πέραν αυτών των άνευ σημασίας δυνατοτήτων θα υπάρχουν –για λιγότερο προφανείς λόγους– αρκετές λύσεις  $x_1 : \dots : x_m, y_1 : \dots : y_n$ . Αντίθετα, σημαντικό είναι ότι τα  $\alpha, \beta$  οφείλουν να έχουν την ίδια τιμή για όλες τις λύσεις· δηλ. τα  $\alpha, \beta$  προσδιορίζονται μονοσήμαντα.*

Θα διαπιστώσουμε ακριβώς, ότι τα  $\alpha$  και  $\beta$  μπορούν να προσδιοριστούν αμέσως με έναν απλό τρόπο (δες τις παραγράφους 10 και 11).

Για να απλοποιήσουμε τους συλλογισμούς μας θα δεχτούμε ότι ισχύει πάντα:

$$a_{ij} + b_{ij} > 0. \quad (9)$$

(Τα  $a_{ij}, b_{ij}$  είναι θετικά πάντα  $\geq 0$ ). Επειδή τα  $a_{ij}, b_{ij}$  επιτρέπεται να είναι όσο θέλουμε μικρά, αυτός ο περιορισμός δεν ενοχλεί πολύ, αν και πρέπει να τεθεί ώστε να εξασφαλιστεί το *μονοσήμαντον* των  $\alpha, \beta$ , διότι διαφορετικά το  $W^1$  θα διασπάτο σε μη συναρτώμενα μέρη.

---

1\*. Το  $W$  προέρχεται από το γερμανικό *Wirtschaft* = Οικονομία. Βλέπε στο άρθρο των J. G. Kemeny, O. Morgenstern, G. L. Thompson, «A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy», *Econometrica*, τόμ. 24, 1956, σ. 128. (Υποσ. του μεταφραστή).

Ας θεωρήσουμε τώρα μια υποθετική λύση  $x_i$ ,  $\alpha$ ,  $y_j$ ,  $\theta$ , των (3)-(8'). Εάν είχαμε στην (7) πάντα  $<$ , τότε θα έπρεπε να είχαμε πάντα  $y_j = 0$  (λόγω της (7')), γεγονός ασυμβίβαστο με την (6). Εάν είχαμε στην (8) πάντα  $>$ , θα έπρεπε να είχαμε πάντα  $x_i = 0$  (λόγω της (8')), γεγονός ασυμβίβαστο με την (5). Συνεπώς, στην (7) το  $\leq$  ισχύει πάντα, αλλά το  $=$  τουλάχιστο μια φορά· στην (8) το  $\geq$  ισχύει πάντα, αλλά το  $=$  τουλάχιστο μια φορά.

Επομένως

$$\alpha = \min_{j=1, \dots, n} \left[ \frac{\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i} \right] \quad (10)$$

$$\theta = \max_{j=1, \dots, m} \left[ \frac{\sum_{j=1}^n b_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j} \right] \quad (11)$$

Άρα τα  $x_i$ ,  $y_j$  προσδιορίζουν τα  $\alpha$ ,  $\theta$  μονοσήμαντα. (Το δεξιό σκέλος των (10), (11) δεν μπορεί ποτέ να πάρει τη χωρίς νόημα μορφή  $\frac{0}{0}$  λόγω των (3)-(6) και (9)). Μπορούμε συνεπώς να θέσουμε τις (7) + (7') και (8) + (8') μόνον ως όρους των  $x_i$ ,  $y_j$ :  $y_j = 0$  για κάθε  $j = 1, \dots, n$ , για το οποίο το:

$$\frac{\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i}$$

δεν παίρνει την ελάχιστη τιμή του (για όλα τα  $j = 1, \dots, n$ ) ... (7\*). Το  $x_i = 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, m$ , για το οποίο το:

$$\frac{\sum_{j=1}^n b_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j}$$

δεν παίρνει τη μέγιστη τιμή του (για όλα τα  $i = 1, \dots, m$ ) ... (8\*).

Τα  $x_1, \dots, x_m$  στην (7\*) και τα  $y_1, \dots, y_n$  στην (8\*) πρέπει να θεωρούνται δεδομένα. Έχουμε, συνεπώς, να λύσουμε τις (3)-(6), (7) και (8) ως προς  $x_i, y_j$ .

5. Έστω  $X'$  ένα σύνολο των μεταβλητών  $(x'_1, \dots, x'_m)$ , που πληρούν τις αντίστοιχες των (3), (5):

$$x'_i \geq 0, \quad (3')$$

$$\sum_{i=1}^m x'_i > 0 \quad (5')$$

και έστω  $Y'$  ένα σύνολο των μεταβλητών  $(y'_1, \dots, y'_n)$ , που πληρούν τις αντίστοιχες των (4), (6):

$$y'_j \geq 0, \quad (4')$$

$$\sum_{j=1}^n y'_j > 0. \quad (6')$$

Έστω, επιπλέον,

$$\Phi(X', Y') = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x'_i y'_j}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_i y'_j}.$$

Έστω  $X = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  η (υποθετική) λύση,  $X' = (x'_1, \dots, x'_m)$ ,  $Y' = (y'_1, \dots, y'_n)$  τυχαίες μεταδλητές που όμως πληρούν τις (3)-(6) και τις (3')-(6') αντίστοιχα τότε είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι οι (7\*) και (8\*) μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

$\Phi(X, Y')$  παίρνει την ελάχιστη τιμή του ως προς  $Y'$  εάν

$$Y' = Y \quad (7^{**})$$

$\Phi(X', Y)$  παίρνει τη μέγιστη τιμή του ως προς  $X'$  εάν

$$X' = X. \quad (8^{**})$$

Το ζήτημα αν υπάρχει λύση των (3)-(8') μετατρέπεται στο ζήτημα αν υπάρχει λύση των (7\*\*), (8\*\*) και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

(\*) *Θεωρήστε την  $(X', Y')$  στο πεδίο ορισμού που φράζεται από τις (3')-(6'). Να ευρεθεί ένα σαγμοειδές σημείο  $X' = X$ ,  $Y' = Y$ , όπου δηλ.  $(X, Y')$  παίρνει την ελάχιστη τιμή του ως προς  $Y'$ , και ταυτόχρονα  $(X', Y)$  τη μέγιστη τιμή του ως προς  $X'$ .*

Από τις (7), (7\*), (10) και (8), (8\*), (11) αντίστοιχα, προκύπτει:

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \right] y_j}{\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i \right] y_j} = \Phi(x, y) \text{ και}$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j \right] x_i}{\sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right] x_i} = \Phi(x, y)$$

αντίστοιχα.

Άρα:

(\*\*) Εάν το πρόβλημά μας μπορεί να λυθεί, εάν δηλ.  $\Phi(X', Y')$  έχει ένα σαγμοειδές σημείο  $X' = X, Y' = Y$  (δες παραπάνω) τότε:

$$\alpha = \beta = \Phi(X, Y) = \eta \text{ τιμή στο σαγμοειδές σημείο. (13)}$$

6. Λόγω της ομοιογένειας το  $\Phi(X', Y')$  (ως προς τα  $X', Y'$ , δηλ. ως προς τα  $x'_1, \dots, x'_m$  και  $y'_1, \dots, y'_m$ ) το πρόβλημά μας δεν επηρεάζεται εάν αντικαταστήσουμε με τις τυποποιήσεις

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (5^*)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad (6^*)$$