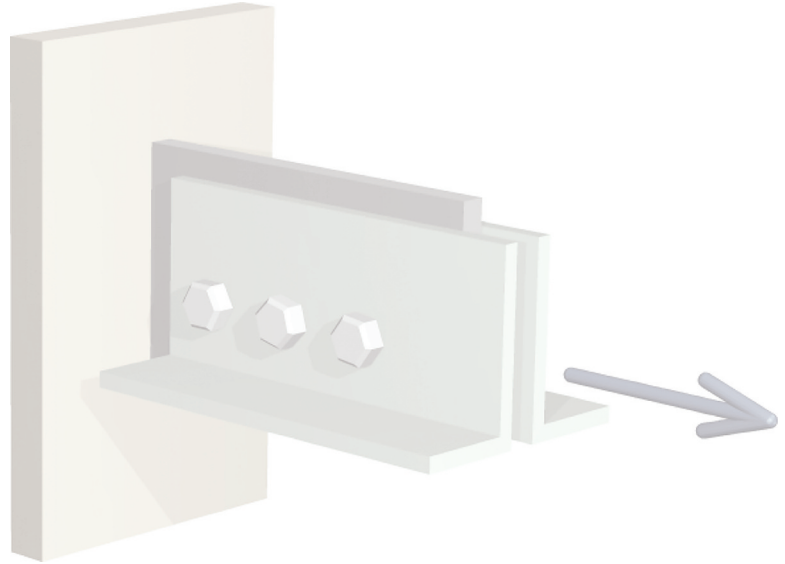


# Τάση



## 1.1 Εισαγωγή

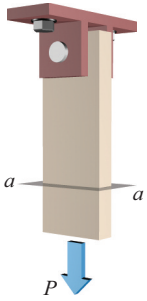
Τα τρία θεμελιώδη πεδία της τεχνικής μηχανικής είναι η στατική, η δυναμική και η μηχανική των υλικών. Η στατική και η δυναμική ασχολούνται κατά κύριο λόγο με τη μελέτη *εξωτερικών* δυνάμεων και κινήσεων που σχετίζονται με σωματίδια και στερεά σώματα (δηλαδή, ιδεατά σώματα στα οποία μπορεί να αγνοηθεί οποιαδήποτε μεταβολή στο μέγεθος ή στο σχήμα λόγω των δυνάμεων). Η μηχανική των υλικών ασχολείται με τη μελέτη των *εσωτερικών* επιδράσεων που προκαλούν εξωτερικά φορτία τα οποία ασκούνται σε παραμορφώσιμα σώματα (δηλαδή, σώματα που μπορούν να επιμηκυνθούν, να καμφθούν ή να περιστραφούν). Γιατί είναι σημαντική η μελέτη των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται σε ένα σώμα; Ο λόγος είναι ότι οι μηχανικοί καλούνται να σχεδιάσουν και να παραγάγουν μια ποικιλία κατασκευών –όπως αυτοκίνητα, αεροπλάνα, πλοία, αγωγοί, γέφυρες, κτίρια, σήραγγες, τοίχοι συγκράτησης, κινητήρες και διάφορες άλλες μηχανολογικές κατασκευές– οι οποίες υπόκεινται σε εσωτερικές δυνάμεις, καμπτικές ροπές και ροπές στρέψης που επηρεάζουν τις ιδιότητες και τη λειτουργία τους. Ανεξαρτήτως της εφαρμογής, ένας ασφαλής και επιτυχημένος σχεδιασμός πρέπει να απαντά στα ακόλουθα τρία βασικά ερωτήματα που σχετίζονται με μηχανική:

- 1. Αντοχή:** Έχει το σώμα αρκετή αντοχή ώστε να παραλάβει τα φορτία που θα ασκηθούν σε αυτό; Θα υποστεί θραύση; Θα συνεχίσει να λειτουργεί κατάλληλα υπό την επίδραση επαναλαμβανόμενων φορτίων;
- 2. Δυσκαμψία:** Θα παραμορφωθεί το σώμα σε τέτοιο βαθμό ώστε να μην μπορεί να εκτελέσει την προβλεπόμενη λειτουργία του;
- 3. Σταθερότητα ή ευστάθεια:** Θα λυγίσει το σώμα εκτός αρχικού σχήματος σε κάποιο υψηλό φορτίο, ώστε να μην είναι πλέον σε θέση να συνεχίσει να εκτελεί την προβλεπόμενη λειτουργία του;

Η αντιμετώπιση αυτών των ερωτημάτων απαιτεί την αξιολόγηση τόσο του μεγέθους των εσωτερικά αναπτυσσόμενων δυνάμεων όσο και των αναπτυσσόμενων παραμορφώσεων στο σώμα, καθώς και την κατανόηση των μηχανικών χαρακτηριστικών του ίδιου του υλικού που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του δομικού ή μηχανολογικού στοιχείου.

Η μηχανική των υλικών αποτελεί ένα βασικό πεδίο σε πολλούς τομείς των μηχανικών. Το παρόν βιβλίο επικεντρώνεται σε διάφορα είδη δομικών στοιχείων: όπως είναι οι ράβδοι που υπόκεινται σε αξονικά φορτία, οι άξονες σε στρέψη, οι δοκοί σε κάμψη και τα υποστυλώματα σε θλίψη. Πολλές σχέσεις και κανόνες για τον σχεδιασμό που

απαντώνται στους μηχανολογικούς κώδικες και τις προδιαγραφές σχετικά με την κατασκευή μηχανολογικών και δομικών στοιχείων βασίζονται στις αρχές της μηχανικής των υλικών. Με μια ισχυρή θεμελίωση των εννοιών της μηχανικής των υλικών και με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων, ο φοιτητής έχει τα κατάλληλα εφόδια ώστε να προχωρήσει σε πιο προχωρημένα μαθήματα μηχανολογικού σχεδιασμού.

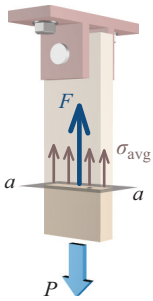


**ΣΧΗΜΑ 1.1α** Ράβδος με αξονικό φορτίο  $P$ .

## 1.2 Ορθή τάση υπό αξονική φόρτιση

Σε κάθε θεματική ενότητα, υπάρχουν ορισμένες θεμελιώδεις έννοιες που κατέχουν πρωταρχική σημασία προκειμένου η κατανόηση του αντικείμενου του θέματος να είναι ικανοποιητική. Στη μηχανική των υλικών, μια τέτοια έννοια είναι αυτή της **τάσης**. Με τους απλούστερους ποιοτικούς όρους, η τάση είναι η ένταση της εσωτερικής δύναμης. Η δύναμη είναι ένα διανυσματικό μέγεθος και, ως ένα διάνυσμα, έχει και μέτρο και κατεύθυνση. Η ένταση υποδηλώνει μια περιοχή στην οποία κατανέμεται η δύναμη. Ως εκ τούτου, η τάση μπορεί να οριστεί ως

$$\text{Τάση} = \frac{\text{Δύναμη}}{\text{Εμβαδόν περιοχής}} \quad (1.1)$$



**ΣΧΗΜΑ 1.1β** Μέση τάση.

Για την εισαγωγή της έννοιας της **ορθής τάσης**, θεωρούμε μια ορθογώνια ράβδο που δέχεται την επίδραση μιας αξονικής δύναμης (Σχήμα 1.1α). Μια **αξονική δύναμη** είναι ένα φορτίο με κατεύθυνση κατά μήκος του διαμήκους άξονα του στοιχείου. Οι αξονικές δυνάμεις που τείνουν να επιμηκύνουν ένα στοιχείο ονομάζονται **εφελκυστικές δυνάμεις** και οι δυνάμεις που τείνουν να μειώσουν το μήκος ενός στοιχείου αποκαλούνται **θλιπτικές δυνάμεις**. Η αξονική δύναμη  $P$  στο Σχήμα 1.1α είναι εφελκυστική. Για τη μελέτη των εσωτερικών επιδράσεων, θεωρούμε μια ιδεατή τομή στη ράβδο με τη χρήση ενός εγκάρσιου στον κύριο άξονα της ράβδου επιπέδου, όπως το επίπεδο  $a-a$  του Σχήματος 1.1α, προκειμένου να μελετηθεί από πλευράς ισορροπίας το κάτω μισό της ράβδου (Σχήμα 1.1β). Δεδομένου ότι αυτό το επίπεδο στο οποίο λαμβάνεται η ιδεατή τομή είναι κάθετο στον διαμήκη άξονα της ράβδου, η εκτιθέμενη επιφάνεια ονομάζεται **διατομή**.

Η τεχνική κατά την οποία λαμβάνουμε μια ιδεατή τομή ενός αντικείμενου προκειμένου να αποκαλυφθούν οι εσωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε μια επίπεδη επιφάνεια αναφέρεται συχνά ως **μέθοδος των τομών**. Το επίπεδο στο οποίο λαμβάνεται η ιδεατή τομή ονομάζεται **επίπεδο τομής**. Για τη μελέτη των εσωτερικών δυνάμεων, κάποιος θα μπορούσε απλώς να πει κάτι ανάλογο με το «τμήστε τη δοκό ή τη ράβδο σε απόσταση...» υπονοώντας να γίνει χρήση της μεθόδου των τομών. Αυτή η τεχνική θα χρησιμοποιηθεί στο σύνολο της μελέτης της μηχανικής των υλικών, για τη διερεύνηση των εσωτερικών επιδράσεων που οφείλονται σε εξωτερικές δυνάμεις οι οποίες ασκούνται σε ένα στερεό σώμα.

Η ισορροπία του κάτω τμήματος της ράβδου επιτυγχάνεται με την ανάπτυξη μιας κατανομής των εσωτερικών δυνάμεων στην εκτιθέμενη διατομή. Η αναπτυσσόμενη κατανομή αντιστοιχεί σε συνισταμένη εσωτερική δύναμη  $F$  η οποία είναι κάθετη στην εκτιθέμενη επιφάνεια, έχει ίδιο μέτρο με την  $P$  και είναι συγγραμική με την  $P$ . Η ένταση της εσωτερικής συνισταμένης δύναμης  $F$  που ασκείται στο υλικό αναφέρεται ως τάση.

Σε αυτή την περίπτωση, η τάση ασκείται σε μια επιφάνεια η οποία είναι **κάθετη** στον φορέα της εσωτερικής δύναμης  $F$ . Μία τάση αυτού του είδους ονομάζεται **ορθή τάση** και δηλώνεται με το ελληνικό γράμμα  $\sigma$ . Για τον προσδιορισμό του μέτρου της ορθής τάσης στη ράβδο, η μέση ένταση της εσωτερικής δύναμης στη διατομή μπορεί να υπολογιστεί ως

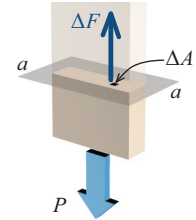
$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{F}{A} \quad (1.2)$$

όπου το  $A$  είναι το εμβαδόν της διατομής της ράβδου.

**Η σύμβαση για το πρόσημο για τις ορθές τάσεις ορίζεται ως εξής:**

- Θετικό πρόσημο υποδεικνύει μια ορθή εφελκυστική τάση.
- Αρνητικό πρόσημο δηλώνει μια ορθή θλιπτική τάση.

Θεωρήστε τώρα μια μικρή περιοχή εμβαδού  $\Delta A$  στην εκτιθέμενη διατομή της ράβδου, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.1γ**, και έστω ότι το  $\Delta F$  αναπαριστά τη συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων που μεταφέρονται σε αυτή τη μικρή περιοχή. Τότε, η μέση ένταση της εσωτερικής δύναμης που μεταφέρεται στην περιοχή  $\Delta A$  βρίσκεται με διαίρεση του  $\Delta F$  με το εμβαδόν  $\Delta A$ . Εάν οι εσωτερικές δυνάμεις που μεταφέρονται στην τομή θεωρηθούν ότι έχουν ομοιόμορφη κατανομή, τότε η περιοχή  $\Delta A$  μπορεί να γίνεται ολοένα και μικρότερη, έως ότου οριακά, η εκτιθέμενη επιφάνεια προσεγγίσει ένα σημείο. Η αντίστοιχη δύναμη  $\Delta F$  γίνεται επίσης διαρκώς μικρότερη. Η τάση στο σημείο της διατομής στο οποίο συγκλίνει το  $\Delta A$  ορίζεται ως



**ΣΧΗΜΑ 1.1γ** Τάση σε ένα σημείο.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.3)$$

Εάν η κατανομή της τάσης πρέπει να είναι ομοιόμορφη, όπως στην Εξίσωση (1.2), τότε η συνισταμένη δύναμη πρέπει να δρα μέσω του κεντροειδούς του εμβαδού της διατομής. Για μεγάλους μήκους λεπτά στοιχεία με αξονικό φορτίο όπως αυτά που απαντώνται σε ράβδους και σε παρόμοια στοιχεία, θεωρείται συνήθως ότι η ορθή τάση έχει ομογενή κατανομή, εκτός από τα σημεία στα οποία ασκείται το εξωτερικό φορτίο. Η κατανομή της τάσης σε στοιχεία με αξονικό φορτίο δεν είναι ομοιόμορφη κοντά σε οπές, εγκοπές ή άλλου είδους ιδιομορφίες. Αυτές οι καταστάσεις θα συζητηθούν σε επόμενες ενότητες που αφορούν τη συγκέντρωση τάσεων. Στο παρόν σύγγραμμα, γίνεται κατανοητό ότι οι αξονικές δυνάμεις ασκούνται στα κεντροειδή των διατομών, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό.

### Μονάδες τάσης

Δεδομένου ότι η ορθή τάση υπολογίζεται διαιρώντας την εσωτερική δύναμη με το εμβαδόν της αντίστοιχης διατομής, η τάση έχει διαστάσεις δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας. Όταν χρησιμοποιούνται οι καθιερωμένες μονάδες των ΗΠΑ, η τάση εκφράζεται συνήθως σε λίβρες ανά τετραγωνική ίντσα (psi) ή kips ανά τετραγωνική ίντσα (ksi) όπου  $1 \text{ kip} = 1.000 \text{ lb}$ . Όταν χρησιμοποιείται το Διεθνές Σύστημα Μονάδων, με το διεθνώς γνωστό ακρωνύμιο SI (από το Γαλλικό *Système International d'Unités*), η τάση εκφράζεται σε pascals (Pa) και υπολογίζεται ως δύναμη σε Newton (N) διά το εμβαδόν σε τετραγωνικά μέτρα ( $\text{m}^2$ ). Σε τυπικές μηχανολογικές εφαρμογές, το pascal αποτελεί μια πολύ μικρή μονάδα και επομένως η τάση εκφράζεται συνηθέστερα σε megapascals (MPa), όπου  $1 \text{ MPa} = 1.000.000 \text{ Pa}$ . Μια χρήσιμη εναλλακτική λύση κατά τον υπολογισμό της τάσης σε MPa είναι η έκφραση της δύναμης σε Newton και του εμβαδού σε τετραγωνικά χιλιοστά ( $\text{mm}^2$ ). Επομένως,

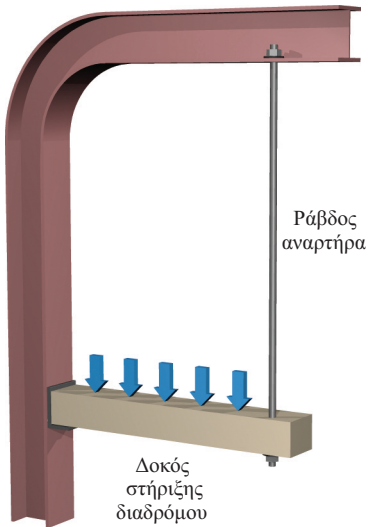
$$1 \text{ MPa} = 1.000.000 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2 \quad (1.4)$$

### Σημαντικά ψηφία

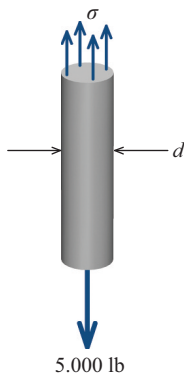
Στο παρόν σύγγραμμα, οι τελικές αριθμητικές απαντήσεις παρουσιάζονται συνήθως με τρία σημαντικά ψηφία όταν ένας αριθμός ξεκινά με τα ψηφία 2 έως 9 και με τέσσερα σημαντικά ψηφία όταν ο αριθμός ξεκινά με το ψηφίο 1. Οι ενδιάμεσες τιμές καταγράφονται γενικά με επιπλέον ψηφία, ώστε να ελαχιστοποιείται η απώλεια της αριθμητικής ακρίβειας λόγω στρογγυλοποίησης.

Κατά την ανάπτυξη εννοιών που σχετίζονται με την τάση σε αντιπροσωπευτικά προβλήματα και ασκήσεις, είναι πρακτικό να χρησιμοποιείται η έννοια του **στερεού στοιχείου**. Ανάλογα με τον τρόπο στήριξής του, ένα στερεό στοιχείο μπορεί να κινείται κάθετα ή οριζόντια ή μπορεί να στρέφεται γύρω από μια θέση στήριξης. Το στερεό στοιχείο θεωρείται ότι έχει άπειρη αντοχή.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1



ΣΧΗΜΑ 1



Διάγραμμα ελεύθερου σώματος της ράβδου αναρτήρα.

ΣΧΗΜΑ 2

Μία χαλύβδινη ράβδος 0,5 in χρησιμοποιείται ώστε να συγκρατεί το ένα άκρο μιας δοκού (Σχήμα 1). Η δύναμη που παραλαμβάνεται από τη ράβδο είναι ίση με 5.000 lb. Προσδιορίστε την ορθή τάση στη ράβδο. (Αγνοήστε το βάρος της ράβδου.)

### Λύση

Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα ελεύθερου σώματος της ράβδου. Η άκαμπτη ράβδος έχει κυκλική διατομή και το εμβαδόν της υπολογίζεται ως

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (0,5 \text{ in.})^2 = 0,19635 \text{ in.}^2$$

όπου  $d$  = διάμετρος της ράβδου.

Δεδομένου ότι η δύναμη στη ράβδο είναι ίση με 5.000 lb, η ορθή τάση στη ράβδο μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\sigma = \frac{F}{A} = 5.000 \text{ lb} / 0,19635 \text{ in.}^2 = 25.464,73135 \text{ psi}$$

Αν και αυτή η απάντηση είναι αριθμητικά σωστή, δεν θα ήταν σωστό να αναφέρετε ως τελική απάντηση μια τάση ίση με 25.464,73135 psi. Ένας αριθμός με τόσο πολλά ψηφία συνεπάγεται ακρίβεια την οποία δεν είμαστε σε θέση να επιτύχουμε. Σε αυτή την περίπτωση, τόσο η διάμετρος της ράβδου όσο και η δύναμη δίνονται με ακρίβεια ενός μόνο σημαντικού ψηφίου. Ωστόσο, η τιμή της τάσης που έχουμε υπολογίσει εδώ έχει 10 σημαντικά ψηφία.

Στη μηχανική, είναι σύνηθες οι τελικές απαντήσεις να στρογγυλοποιούνται στα τρία σημαντικά ψηφία (εάν το πρώτο ψηφίο δεν είναι το 1) ή στα τέσσερα σημαντικά ψηφία (εάν το πρώτο ψηφίο είναι το 1). Χρησιμοποιώντας αυτή την κατευθυντήρια γραμμή, η ορθή τάση στη ράβδο θα παρουσιάζεται ως

$$\sigma = 25.500 \text{ psi}$$

**Απ.**

Σε πολλές περιπτώσεις, γίνεται προσπάθεια οι εικόνες σε αυτό το βιβλίο να απεικονίζουν αντικείμενα σε ρεαλιστική τριδιάστατη προοπτική. Όποτε είναι δυνατόν, έχει γίνει προσπάθεια ώστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος να παρουσιάζονται εντός του πραγματικού πλαισίου του σώματος ή της κατασκευής. Σε αυτές τις εικόνες, το διάγραμμα ελεύθερου σώματος εμφανίζεται με πιο έντονο χρώμα, ενώ άλλα τμήματα του σώματος ή της κατασκευής έχουν πιο αχνό χρώμα.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2

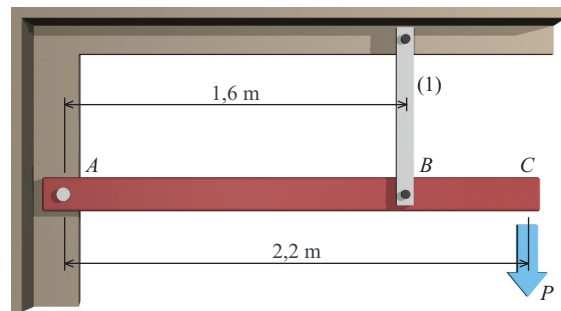
Η μη παραμορφώσιμη ράβδος ABC υποστηρίζεται από έναν πείρο στο σημείο A και το αξονικό στοιχείο (1), με εμβαδόν διατομής 540 mm<sup>2</sup> (Σχήμα 1). Το βάρος της άκαμπτης ράβδου ABC μπορεί να αγνοηθεί. (Σημείωση: 1 kN = 1.000 N.)

- Προσδιορίστε την ορθή τάση στο στοιχείο (1) εάν στο C εφαρμοστεί ένα φορτίο  $P = 8 \text{ kN}$ .
- Εάν η μέγιστη ορθή τάση στο στοιχείο (1) πρέπει να έχει όριο τα 50 MPa, ποιο είναι το μέγιστο μέτρο του φορτίου  $P$  που μπορεί να ασκηθεί στη μη- παραμορφώσιμη ράβδο στο C;

## Οργανώστε τη λύση

### (Μέρος α)

Προτού υπολογιστεί η ορθή τάση στο στοιχείο (1), πρέπει να προσδιοριστεί η αξονική του δύναμη. Για τον υπολογισμό αυτής της δύναμης, θεωρήστε διάγραμμα ελεύθερου σώματος της άκαμπτης ράβδου ABC και γράψτε την εξίσωση ισοροπίας των ροπών ως προς τον πείρο A (Σχήμα 2).

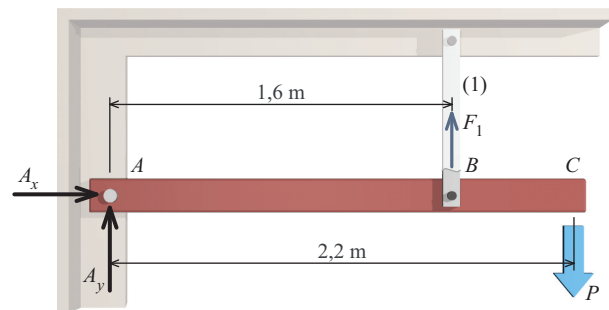


ΣΧΗΜΑ 1

## Λύση

### (Μέρος α)

Για την άκαμπτη ράβδο ABC, γράψτε την εξίσωση ισοροπίας για το άθροισμα των ροπών ως προς τον πείρο A. Έστω ότι  $F_1$  είναι εσωτερική δύναμη στο στοιχείο (1) και υποθέστε ότι η  $F_1$  είναι εφελκυστική δύναμη. Οι θετικές ροπές στην εξίσωση ισοροπίας καθορίζονται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Τότε



Διάγραμμα ελεύθερου σώματος της συμπαγούς ράβδου ABC.

ΣΧΗΜΑ 2

$$\sum M_A = -(8 \text{ kN})(2,2 \text{ m}) + (1,6 \text{ m})F_1 = 0$$

$$\therefore F_1 = 11 \text{ kN}$$

Η ορθή τάση στο στοιχείο (1) μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = (11 \text{ kN})(1.000 \text{ N/kN}) / 540 \text{ mm}^2 = 20.370 \text{ N/mm}^2 = 20.4 \text{ MPa}$$

**Απ.**

(Προσέξτε ότι  $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$ )

## Οργανώστε τη λύση

### (Μέρος β)

Χρησιμοποιώντας την τάση που δίνεται, υπολογίστε τη μέγιστη δύναμη την οποία μπορεί να παραλάβει με ασφάλεια το στοιχείο (1). Μόλις υπολογιστεί αυτή η δύναμη, χρησιμοποιήστε την εξίσωση ισοροπίας των ροπών για να προσδιορίσετε το φορτίο P.

## Λύση

### (Μέρος β)

Προσδιορίστε τη μέγιστη επιτρεπόμενη δύναμη για το στοιχείο (1):

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\therefore F_1 = \sigma_1 / A_1 = (50 \text{ MPa})(540 \text{ mm}^2) = (50 \text{ N/mm}^2)(540 \text{ mm}^2) = 27.000 \text{ N} = 27 \text{ kN}$$

Υπολογίστε το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο P από την εξίσωση ισοροπίας των ροπών:

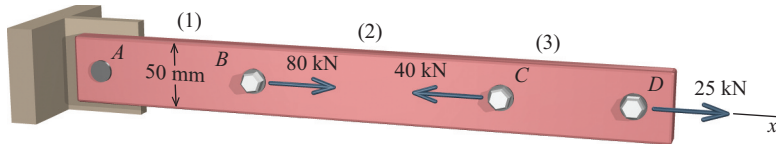
$$\sum M_A = -(2,2 \text{ m})P + (1,6 \text{ m})(27 \text{ kN}) = 0$$

$$\therefore P = 19,64 \text{ kN}$$

**Απ.**

# ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3



ΣΧΗΜΑ 1

Μια χαλύβδινη ράβδος πλάτους 50 mm δέχεται την επίδραση αξονικών φορτίων στα σημεία B, C και D (Σχήμα 1). Εάν το μέτρο της ορθής τάσης στη ράβδο δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 60 MPa, προσδιορίστε το ελάχιστο πάχος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη ράβδο.

### Οργανώστε τη λύση

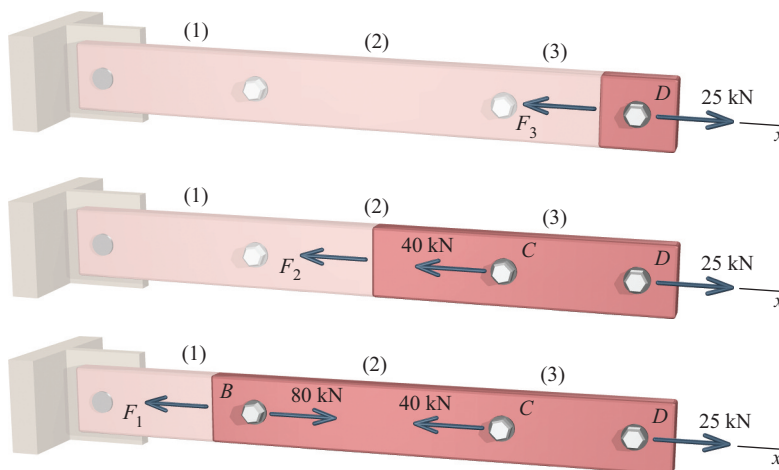
Σχεδιάστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος τα οποία αποκαλύπτουν την εσωτερική δύναμη σε καθένα από τα τρία τμήματα. Σε κάθε τμήμα, προσδιορίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της εσωτερικής αξονικής δύναμης που απαιτείται ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας. Χρησιμοποιήστε την εσωτερική αξονική δύναμη με το μεγαλύτερο μέτρο και την επιτρεπόμενη ορθή τάση, για να υπολογίσετε το ελάχιστο εμβαδόν διατομής που απαιτείται για τη ράβδο. Διαιρέστε το εμβαδόν της διατομής με το πλάτος των 50 mm για να υπολογίσετε το ελάχιστο πάχος της ράβδου.

### Λύση

Ξεκινήστε σχεδιάζοντας το διάγραμμα ελεύθερου σώματος (ΔΕΣ) που θα αποκαλύπτει την εσωτερική δύναμη στο τμήμα (3) (Σχήμα 2). Δεδομένου ότι η δύναμη αντίδρασης στο A δεν έχει υπολογιστεί, θα είναι ευκολότερο να τμήσετε τη ράβδο στο τμήμα (3) και να εξετάσετε το τμήμα της ράβδου που ξεκινά από την τομή και εκτείνεται ως το ελεύθερο άκρο της ράβδου στο D. Υπάρχει μια άγνωστη εσωτερική αξονική δύναμη  $F_3$  στο τμήμα (3) και θα ήταν χρήσιμο να καθοριστεί μια συνεπής σύμβαση για αυτού του είδους τα προβλήματα.

### Συμβουλή επίλυσης προβλημάτων

Όταν εξετάζετε το ΔΕΣ σε ένα αξονικό στοιχείο, υποθέστε ότι η εσωτερική δύναμη είναι εφελκυστική και σχεδιάστε το διάνυσμα της δύναμης με κατεύθυνση μακριά από την τομή. Εάν η τιμή της εσωτερικής δύναμης υπολογιστεί ότι είναι ένας θετικός αριθμός, τότε επιβεβαιώνεται η υπόθεση του εφελκυσμού. Εάν η τιμή υπολογιστεί ως αρνητικός αριθμός, τότε η εσωτερική δύναμη είναι στην πραγματικότητα θλιπτική.



ΣΧΗΜΑ 2

Με βάση μια τομή *FBD* σε ένα αξονικό τμήμα (3), η εξίσωση ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -F_3 + 25 \text{ kN} = 0 \\ \therefore F_3 &= 25 \text{ kN} = 25 \text{ kN (T)}\end{aligned}$$

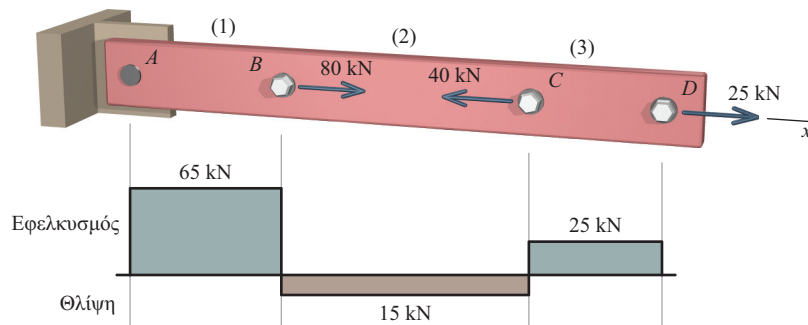
Επαναλάβετε αυτή τη διαδικασία για μια τομή *FBD* που αποκαλύπτει την εσωτερική δύναμη στο τμήμα (2):

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -F_2 - 40 \text{ kN} + 25 \text{ kN} = 0 \\ \therefore F_2 &= -15 \text{ kN} = 15 \text{ kN (C)}\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, επαναλάβετε για μια τομή *FBD* που αποκαλύπτει την εσωτερική δύναμη στο τμήμα (1):

$$\begin{aligned}\sum F &= -F_1 + 80 \text{ kN} - 40 \text{ kN} + 25 \text{ kN} = 0 \\ \therefore F_1 &= 65 \text{ kN (T)}\end{aligned}$$

Μία καλή πρακτική αποτελεί πάντοτε η κατασκευή ενός απλού σχεδίου το οποίο συνοψίζει γραφικά τις εσωτερικές αξονικές δυνάμεις κατά μήκος της ράβδου. Το διάγραμμα της αξονικής δύναμης απεικονίζει ως θετικές τις εσωτερικές εφελκυστικές δυνάμεις και ως αρνητικές τις εσωτερικές θλιπτικές δυνάμεις (**Σχήμα 3**).



**Διάγραμμα αξονικής δύναμης όπου φαίνονται οι εσωτερικές δυνάμεις σε καθένα από τα επιμέρους τμήματα της ράβδου.**

**ΣΧΗΜΑ 3**

Το ζητούμενο εμβαδόν της διατομής θα υπολογιστεί σύμφωνα με την απόλυτη τιμή της εσωτερικής δύναμης με το μέγιστο μέτρο. Η ορθή τάση στη ράβδο πρέπει να έχει όριο τα 60 MPa. Προκειμένου ο υπολογισμός να γίνει ευκολότερος, χρησιμοποιείται η μετατροπή  $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$ . επομένως,  $60 \text{ MPa} = 60 \text{ N/mm}^2$  και έχουμε

$$\sigma = \frac{F}{A} \therefore A \geq \frac{F}{\sigma} = \frac{(65 \text{ kN})(1.000 \text{ N/kN})}{60 \text{ N/mm}^2} = 1.083,333 \text{ mm}^2$$

Δεδομένου ότι η χαλύβδινη ράβδος έχει πλάτος 50 mm, το ελάχιστο πάχος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη ράβδο είναι

$$t_{min} \geq \frac{1.083,333 \text{ mm}^2}{50 \text{ mm}} = 21,667 \text{ mm} = 21,7 \text{ mm}$$

**Απ.**

Στην πράξη, το πάχος της ράβδου θα στρογγυλοποιούνται στο επόμενο μεγαλύτερο πρότυπο μέγεθος.

### Ανασκόπηση

Ελέγξτε ξανά τους υπολογισμούς σας, δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στις μονάδες. Να δείχνετε πάντοτε τις μονάδες στους υπολογισμούς σας, επειδή είναι ένας εύκολος και γρήγορος τρόπος για να ανακαλύψετε λάθη. Είναι λογικές οι απαντήσεις; Εάν το πάχος της ράβδου ήταν 0,0217 mm αντί για 21,7 mm, θα ήταν λογική η λύση σας σύμφωνα με τη διαίσθησή σας;

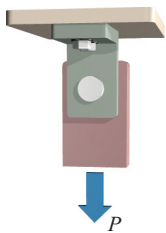
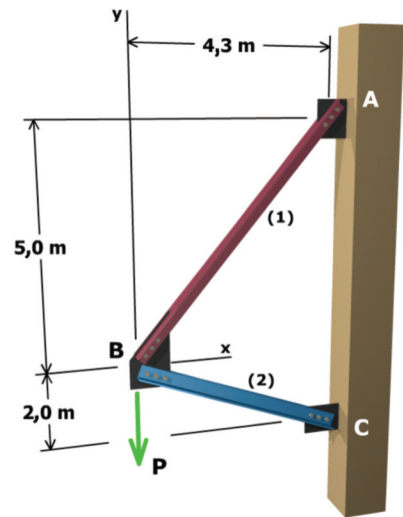
## Μάθηση με πρακτική εφαρμογή

### Παράδειγμα

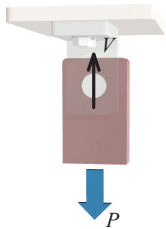
**M1.4** Δύο αξονικά στοιχεία χρησιμοποιούνται για να στηρίξουν ένα φορτίο  $P$  που εφαρμόζεται στην άρθρωση  $B$ .

- Το στοιχείο (1) έχει εμβαδόν διατομής  $A_1 = 3.080 \text{ mm}^2$  και επιτρεπόμενη ορθή τάση  $80 \text{ MPa}$ .
- Το στοιχείο (2) έχει εμβαδόν διατομής  $A_2 = 4.650 \text{ mm}^2$  και επιτρεπόμενη ορθή τάση  $75 \text{ MPa}$ .

Προσδιορίστε το μέγιστο φορτίο  $P$  που μπορεί να υποστηριχθεί, χωρίς την υπέρβαση καμίας από τις επιτρεπόμενες ορθές τάσεις.



**ΣΧΗΜΑ 1.2α** Σύνδεση απλής διάτμησης με πείρο.



**ΣΧΗΜΑ 1.2β** Διάγραμμα ελεύθερου σώματος όπου φαίνεται η μεταφορά μιας διατμητικής τάσης από έναν πείρο.

### 1.3 Άμεση διατμητική τάση

Τα φορτία που ασκούνται σε μια κατασκευή μεταφέρονται γενικά στα επιμέρους στοιχεία της διαμέσου των συνδέσεων που περιλαμβάνουν ενδεχομένως ήλους, κοχλίες, πείρους, ήλους (καρφιά) ή συγκολλήσεις. Σε όλες αυτές τις συνδέσεις, μία από τις πιο σημαντικές τάσεις που αναπτύσσονται είναι η *διατμητική τάση*. Στην προηγούμενη ενότητα, η ορθή τάση ορίστηκε ως η ένταση μιας εσωτερικής δύναμης που δρα σε μια επιφάνεια *κάθετη* στην κατεύθυνση της εσωτερικής δύναμης. Η διατμητική τάση αποτελεί επίσης την ένταση μιας εσωτερικής δύναμης, όμως ασκείται σε μια επιφάνεια που είναι παράλληλη προς την εσωτερική δύναμη.

Για να εξετάσουμε την έννοια της διατμητικής τάσης, θεωρούμε μια απλή σύνδεση στην οποία η δύναμη που φέρει ένα αξονικό στοιχείο μεταφέρεται σε ένα στήριγμα μέσω ενός στερεού κυκλικού πείρου (**Σχήμα 1.2α**). Το φορτίο μεταφέρεται από το αξονικό στοιχείο στο στήριγμα με μια **διατμητική δύναμη** (δηλαδή, μια δύναμη που τείνει να τμήσει) κατανεμημένη σε μια εγκάρσια διατομή του πείρου. Το αντίστοιχο διάγραμμα ελεύθερου σώματος του αξονικού στοιχείου με τον πείρο φαίνεται στο **Σχήμα 1.2β**. Σε αυτό το διάγραμμα, η συνισταμένη διατμητική δύναμη  $V$  έχει αντικαταστήσει την κατανομή των διατμητικών δυνάμεων στην εγκάρσια διατομή του πείρου. Η ισορροπία απαιτεί η συνισταμένη διατμητική δύναμη  $V$  να είναι ίση με το εφαρμοζόμενο φορτίο  $P$ . Δεδομένου ότι μόνο μία διατομή του πείρου μεταφέρει φορτίο μεταξύ του αξονικού στοιχείου και του στηρίγματος, ο πείρος λέγεται ότι βρίσκεται σε **απλή διάτμηση**.

Από τον ορισμό της τάσης που δίνεται από την Εξίσωση (1.1), η μέση διατμητική τάση στην εγκάρσια διατομή του πείρου μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A_V} \quad (1.5)$$

όπου  $A_V$  = το εμβαδόν που μεταφέρει τη διατμητική τάση. Το ελληνικό γράμμα  $\tau$  χρησιμοποιείται συνήθως για να δηλώσει τη διατμητική τάση. Μια σύμβαση για το πρόσημο της διατμητικής τάσης θα παρουσιαστεί σε μια από τις επόμενες ενότητες του παρόντος συγγράμματος.

Η τάση σε ένα σημείο της εγκάρσιας διατομής του πείρου μπορεί να βρεθεί κάνοντας χρήση της ίδιας διαδικασίας λαμβάνοντας το αντίστοιχο όριο όπως αυτό που χρησιμοποιήθηκε για την ανάπτυξη της Εξίσωσης (1.3) για την ορθή τάση σε ένα σημείο. Επομένως,



$$\tau = \lim_{\Delta A_V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A_V} \quad (1.6)$$

Θα αποδειχθεί αργότερα στο παρόν σύγγραμμα ότι οι διατμητικές τάσεις δεν μπορούν να κατανέμονται ομοιόμορφα στην εγκάρσια διατομή ενός πείρου ή ενός κοχλίου και ότι η μέγιστη διατμητική τάση στην εγκάρσια διατομή μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μέση διατμητική τάση που βρίσκεται χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (1.5). Ο σχεδιασμός απλών συνδέσεων, ωστόσο, βασίζεται συνήθως στη θεώρηση μιας μέσης τιμής τάσης και αυτή τη διαδικασία θα ακολουθήσουμε στο παρόν σύγγραμμα.

Το κλειδί για τον προσδιορισμό της διατμητικής τάσης στις συνδέσεις είναι η απεικόνιση της επιφάνειας ή των επιφανειών αστοχίας που θα δημιουργηθούν, εάν οι συνδετήρες (δηλαδή οι πείροι, οι κοχλίες, οι ήλοι ή οι συγκολλησίες) στην πραγματικότητα θραυθούν. Η περιοχή διάτμησης  $A_V$  που μεταφέρει τη διατμητική δύναμη είναι η περιοχή που αποκαλύπτεται όταν ο συνδετήρας θραυθεί. Δύο συνήθη είδη επιφανειών αστοχίας πείρων σε διάτμηση φαίνονται στα **Σχήματα 1.3** και **1.4**. Εργαστηριακά δοκίμια πείρων που έχουν αστοχήσει σε ένα επίπεδο διάτμησης φαίνονται στο Σχήμα 1.3. Αντίστοιχα, ένα δοκίμιο πείρου που έχει αστοχήσει σε δύο παράλληλα επίπεδα διάτμησης φαίνεται στο Σχήμα 1.4.



Jeffery S. Thomas

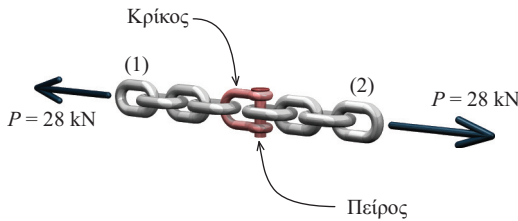
**ΣΧΗΜΑ 1.3** Αστοχία απλής διάτμησης σε δοκίμια πείρων.



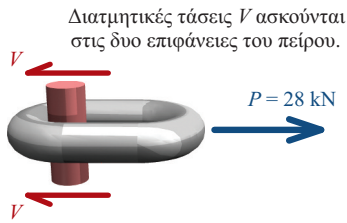
Jeffery S. Thomas

**ΣΧΗΜΑ 1.4** Αστοχία διπλής διάτμησης σε ένα δοκίμιο πείρου.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4



ΣΧΗΜΑ 1



Διάγραμμα ελεύθερου σώματος του πείρου.

ΣΧΗΜΑ 2

Τα στοιχεία (1) και (2) της αλυσίδας συνδέονται με έναν κρίκο και έναν πείρο (Σχήμα 1). Εάν η αξονική δύναμη στις αλυσίδες είναι ίση με  $P = 28 \text{ kN}$  και η επιτρεπόμενη διατμητική τάση στον πείρο ισούται με  $\tau_{\text{επιτρ}} = 90 \text{ MPa}$ , προσδιορίστε την ελάχιστη αποδεκτή διάμετρο  $d$  για τον πείρο.

### Οργανώστε τη λύση

Για την επίλυση του προβλήματος, φανταστείτε αρχικά τις επιφάνειες που θα αποκαλυφθούν εάν ο πείρος θραυεί λόγω του εφαρμοζόμενου φορτίου  $P$ . Στις επιφάνειες του πείρου θα αναπτυχθεί διατμητική τάση, η οποία θα είναι ανάλογη του φορτίου  $P$  μέχρι τη θραύση. Ακολούθως, πρέπει να υπολογιστεί το απαιτούμενο εμβαδόν της περιοχής διάτμησης προκειμένου να παραλειφθεί από τον πείρο η αναπτυσσόμενη διατμητική δύναμη που ασκείται σε καθεμία από τις επιφάνειές του και από το εμβαδόν αυτό μπορεί να υπολογιστεί η ελάχιστη διάμετρός του.

### Λύση

Σχεδιάστε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος (ΔΕΣ) του πείρου, ο οποίος συνδέει την αλυσίδα (2) με τον κρίκο (Σχήμα 2). Δύο διατμητικές δυνάμεις

$V$  αναπτύσσονται ως αντίδραση στο εφαρμοζόμενο φορτίο  $P = 28 \text{ kN}$ . Η διατμητική δύναμη  $V$  που δρα σε κάθε επιφάνεια πρέπει να ισούται με το μισό του εφαρμοζόμενου φορτίου  $P$ , ως εκ τούτου,  $V = 14 \text{ kN}$ .

Στη συνέχεια, το εμβαδόν κάθε επιφάνειας είναι το εμβαδόν της διατομής του πείρου. Η μέση διατμητική τάση που ασκείται σε καθεμία από τις επιφάνειες αστοχίας του πείρου είναι συνεπώς η διατμητική δύναμη  $V$  διά το εμβαδόν της διατομής του πείρου. Δεδομένου ότι η μέση διατμητική τάση πρέπει να έχει όριο τα  $90 \text{ MPa}$ , η ελάχιστη τιμή εμβαδού διατομής που απαιτείται ώστε να ικανοποιείται η προϋπόθεση της επιτρεπόμενης διατμητικής τάσης μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\tau = \frac{V}{A_{\text{πείρου}}} \quad \therefore A_{\text{πείρου}} \geq \frac{V}{\tau_{\text{επιτρ}}} = \frac{(14 \text{ kN})(1.000 \text{ N/kN})}{90 \text{ N/mm}^2} = 155,556 \text{ mm}^2$$

Η ελάχιστη απαιτούμενη διάμετρος πείρου για χρήση στον κρίκο μπορεί να προσδιοριστεί από το εμβαδόν της διατομής που απαιτείται ως:

$$A_{\text{πείρου}} \geq \frac{\pi}{4} d_{\text{πείρου}}^2 = 155,556 \text{ mm}^2 \quad \therefore d_{\text{πείρου}} \geq 14,07 \text{ mm} \quad \text{ας πούμε, } d_{\text{πείρου}} = 15 \text{ mm} \quad \text{Απ.}$$

Σε αυτή τη σύνδεση, δύο διατομές του πείρου υπόκεινται σε διατμητικές δυνάμεις  $V$ . Κατά συνέπεια, ο πείρος βρίσκεται σε **διπλή διάτμηση**.

## Μάθηση με πρακτική εφαρμογή

### Παράδειγμα

**M1.5** Ένας πείρος στο C και μια κυλινδρική ράβδος αλουμινίου στο B στηρίζουν την άκαμπτη ράβδο BCD. Εάν η επιτρεπόμενη διατμητική τάση του πείρου είναι ίση με  $50 \text{ MPa}$ , πόση είναι η ελάχιστη απαιτούμενη διάμετρος του πείρου;

