Κεφάλαιο 1
Μαθηματικό Υπόβαθρο

1.1 Οι αριθμοί στο δεκαδικό και άλλα συστήματα αρίθμησης

Το ακόλουθο θεώρημα καθορίζει τον τρόπο αναπαράστασης αριθμών στα διάφορα συστήματα αρίθμησης.

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω β ακέραιος μεγαλύτερος από το 1. Τότε, κάθε m θετικός ακέραιος μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο ως*

$$m = a_k\beta^k + a_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + a_1\beta^1 + a_0\beta^0 = a_k\beta^k + a_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + a_1\beta^1 + a_0$$

όπου k ένας μη αρνητικός ακέραιος και $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ μη αρνητικοί ακέραιοι μικρότεροι από το β και $a_0 \neq 0$. ◇

Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται ανάπτυγμα βάσης β του αριθμού m. Οι βάσεις $\beta = 2$ (δύο), $\beta = 8$ (οκτώ), $\beta = 16$ (δεκαέξι) είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην επιστήμη των υπολογιστών και στις τηλεπικοινωνίες. Τέτοια συστήματα αναπαράστασης αριθμών λέγονται συστήματα θέσης, και με τις παραπάνω βάσεις έχουμε το δυαδικό, το οκταδικό, το δεκαεξαδικό σύστημα αναπαράστασης του ακεραίου. Στον πολιτισμό των Μάγια χρησιμοποιούσαν σύστημα αναπαράστασης των αριθμών με βάση το 20 και οι Αρχαίοι Βαβυλώνιοι με βάση το 60.

Όταν γράφουμε 735 στο δεκαδικό σύστημα, εννοούμε

$$(735)_{10} = 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

ενώ στο οκταδικό

$$(735)_8 = 7 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 5 \times 8^0 = (477)_{10}.$$

Ωστόσο,

$$(735)_{10} = (1DD)_{16} = 1 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 13 \times 16^0$$

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

και

$$(735)_{10} = (111011101)_2 = 1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$$

Για τη μετατροπή της δυαδικής αναπαράστασης ενός αριθμού σε δεκαεξαδική και αντίστροφα βασιζόμαστε στο γεγονός ότι κάθε δεκαεξαδικό ψηφίο μπορεί να αναπαρασταθεί με 4 δυαδικά ψηφία (bits). Οπότε,

$(\ldots)_{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$(\ldots)_{16}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
$(\ldots)_8$	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
$(\ldots)_2$	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Πίνακας 1.1: Δεκαδική, δεκαεξαδική, οκταδική και δυαδική αναπαράσταση των αριθμών από 0 έως 15.

$$(\underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1101}_{D}\ \underbrace{1101}_{D})_2 = (1DD)_{16}$$

$$(2B3EC)_{16} = \left(\underbrace{0010}_{2}\ \underbrace{1011}_{B}\ \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1110}_{E}\ \underbrace{1100}_{C}\right)_2$$

Ανάλογα, κάθε οκταδικό ψηφίο μπορεί να αναπαρασταθεί με 3 δυαδικά ψηφία (bits). Οπότε,

$$(\underbrace{111}_{7}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{101}_{5})_2 = (735)_8$$

$$\left(\underbrace{1}_{001}\ \underbrace{3}_{011}\ \underbrace{3}_{011}\ \underbrace{7}_{111}\right)_8 = (001\ 011\ 011\ 111)_2\,.$$

Για τη μετατροπή της δεκαδικής αναπαράστασης ενός αριθμού σε δυαδική, οκταδική ή δεκαεξαδική βασιζόμαστε στον Ευκλείδειο Αλγόριθμο της Διαίρεσης.

$$\begin{aligned}
735 &= 2\times367+1\\
367 &= 2\times183+1\\
183 &= 2\times91+1\\
91 &= 2\times45+1\\
45 &= 2\times22+1\\
22 &= 2\times11+0\\
11 &= 2\times5+1\\
5 &= 2\times2+1\\
2 &= 2\times1+0\\
1 &= 2\times0+1
\end{aligned}$$

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

$$(735)_{10} = (0010\ 1101\ 1111)_2$$

$$\begin{aligned} 735 &= 8 \times 91 + 7 \\ 91 &= 8 \times 11 + 3 \\ 11 &= 8 \times 1 + 3 \\ 1 &= 8 \times 0 + 1 \end{aligned}$$

$$(735)_{10} = (1337)_8$$

$$\begin{aligned} 735 &= 16 \times 45 + 15 \\ 45 &= 16 \times 2 + 13 \\ 2 &= 16 \times 0 + 2 \end{aligned}$$

$$(735)_{10} = 2 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = (2DF)_{16}$$

Σε κάθε περίπτωση, τα διαδοχικά υπόλοιπα από πάνω προς τα κάτω είναι τα ψηφία του αριθμού από τα δεξιά προς τα αριστερά.

Για τους αριθμούς με ψηφία δεξιά της δεκαδικής (ή δυαδικής) υποδιαστολής, το ανάπτυγμα μπορεί να έχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος ψηφίων. Το μέρος του αριθμού που είναι δεξιά της υποδιαστολής αναπτύσσεται σε αρνητικές δυνάμεις της βάσης. Για παράδειγμα:

$$\frac{91}{2} = (45.5)_{10} = 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}$$

$$\frac{91}{2} = (45.5)_{10} = (101101.1)_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1}$$

$$\frac{91}{2} = (45.5)_{10} = (2D.8)_{16} = 2 \times 16^1 + 15 \times 2^0 + 8 \times 16^{-1}$$

$$\frac{1}{10} = (0.1)_{10} = 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}$$

$$\frac{1}{10} = (0.0001100110011001101\ldots)_2 = 1\times2^{-4}+1\times2^{-5}+1\times2^{-8}+1\times2^{-9}+1\times2^{-12}+1\times2^{-13}+\cdots$$

$$\frac{1}{10} = (0.1999999999999999999\ldots)_{16} = 1\times16^{-1}+9\times16^{-2}+9\times16^{-3}+\cdots+9\times16^{-19}+9\times16^{-20}.$$

1.2 Βασικές έννοιες από τη Μαθηματική Ανάλυση

1.2.1 Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Θεωρούμε πραγματικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

Θεώρημα 1.2.1 (Θεώρημα Bolzano) *Εάν η* $y = f(x)$ *είναι συνεχής στο* $[a, b]$ *και ισχύει*

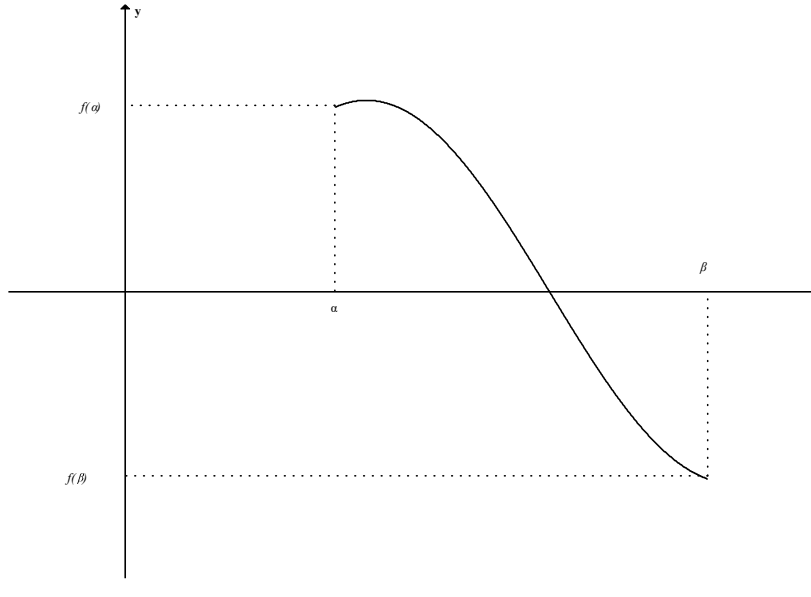
$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$$

και τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ *:*

$$f(\xi) = 0.$$

◇

Εάν, επιπλέον, η συνάρτηση διατηρεί τη μονοτονία της στο διάστημα $[a, b]$, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.



Σχήμα 1.1: Θεώρημα Bolzano.

Ορισμός 1.2.1 *Εάν η* $y = f(x)$ *είναι συνεχής στο* $[a, b]$*, τότε η συνάρτηση πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με μία σταθερά* L *εάν ισχύει*

$$\|f(\xi_1) - f(\xi_2)\| \leq L\|\xi_1 - \xi_2\| \ \forall \xi_1, \xi_2 \in [a, b].$$

Εάν η συνάρτηση ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή με $L \leq 1$*, ονομάζεται συστολή.* ◇

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

Η συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε η συνάρτηση αυτή θα ονομάζεται παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Η διαφορισιμότητα είναι σημειακό χαρακτηριστικό αλλά μπορούμε να δούμε και την παράγωγο ως συνάρτηση. Η παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς τη μεταβλητή x είναι η συνάρτηση f' με τιμή στο x,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Το πεδίο ορισμού της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το παραπάνω όριο υπάρχει. Οπότε, είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Αν η παράγωγος υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, τότε λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη. Για την παράγωγο ως συνάρτηση συμβολίζουμε:

$$y', f', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}f(x), (....)'.$$

Για την τιμή της παραγώγου σε ένα σημείο:

$$y'(a), f'(a), y'\Big|_{x=a}, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}, \frac{df}{dx}\Big|_{x=a}.$$

Για τη δεύτερη ή μεγαλύτερης τάξης παράγωγο συμβολίζουμε:

$$f''(x), f^{(k)}(x), f''(a), f^{(k)}(a), \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^ky}{dx^k}, \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=a}, \frac{d^ky}{dx^k}\Big|_{x=a}.$$

Αν f είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής, το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Η εφαπτομένη ευθεία της $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

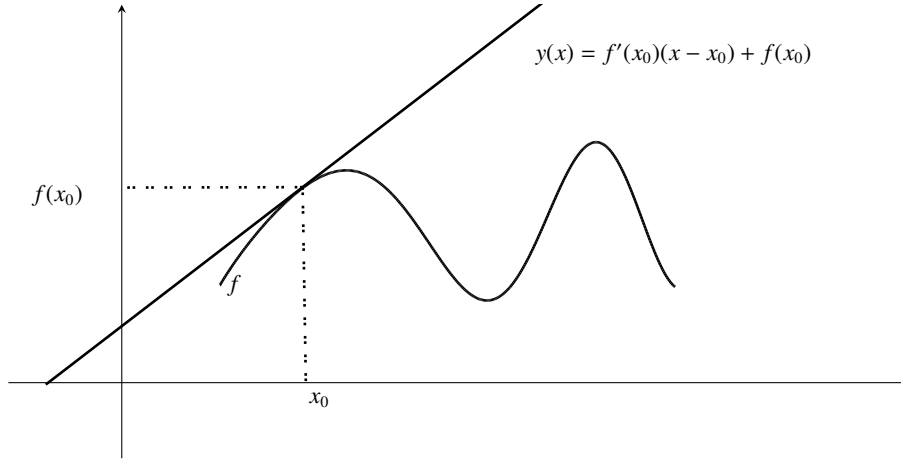
Δηλαδή, η εφαπτομένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $f'(x_0)$. Αυτή η τιμή λέγεται και κλίση του σημείου της καμπύλης.

Θεώρημα 1.2.2 (Θεώρημα Μέσης Τιμής) *Εάν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b) τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

◇

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική



Σχήμα 1.2: Η εφαπτόμενη ευθεία της $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Είναι γνωστό ότι το πρόσημο της πρώτης παράγωγου μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα I του πεδίου ορισμού της καθορίζει τη συμπεριφορά της συνάρτησης στο διάστημα αυτό. Η μονοτονία μιας συνάρτησης μπορεί να ελεγχθεί με την πρώτη παράγωγό της.

- Εάν $\frac{dy}{dx} > 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ είναι αύξουσα στο I ($\forall x_1, x_2 \in I : x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$).
- Εάν $\frac{dy}{dx} < 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ είναι φθίνουσα στο I ($\forall x_1, x_2 \in I : x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$).
- Εάν $\frac{dy}{dx} = 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ σταθερή στο I ($\forall x \in I,\ f(x) = c$).

Η καμπυλότητα μιας συνάρτησης μπορεί να ελεγχθεί με τη δεύτερη παράγωγό της.

- Εάν $\frac{d^2y}{dx^2} > 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ κοίλα προς τα πάνω (κυρτή, convex). ($\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0,1] : f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$).
- Εάν $\frac{d^2y}{dx^2} < 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ κοίλα προς τα κάτω (κοίλη, concave). ($\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0,1] : f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$).
- Εάν $\frac{d^2y}{dx^2} < 0, \forall x < c$ και $\frac{d^2y}{dx^2} > 0, \forall x > c$ (ή αντίστροφα), τότε έχω σημείο αλλαγής καμπυλότητας. Δηλαδή, έχουμε σημείο καμπής (εφόσον ορίζεται η πρώτη παράγωγος).

Στην περίπτωση που οι ανισότητες ($\leq, \geq$) αντικατασταθούν με ($<, >$), τότε μιλάμε για γνησίως ή αυστηρώς μονοτονία ή καμπυλότητα.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο πεδίο ορισμού της D. Τότε ένα εσωτερικό σημείο c του πεδίου D αποτελεί:

- Τοπικό μέγιστο (local maximum): $f(x) \leq f(c)\ \forall x \in I$ όπου $I \subseteq D,\ \ c \in I$.
- Τοπικό ελάχιστο (local minimum): $f(x) \geq f(c)\ \forall x \in I$ όπου $I \subseteq D,\ \ c \in I$.
- Ολικό μέγιστο (global maximum): $f(x) \leq f(c)\ \forall x \in D$.
- Ολικό ελάχιστο (global minimum): $f(x) \geq f(c)\ \forall x \in D$.

Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο διάστημα αυτό.

Πιθανά τοπικά ακρότατα αποτελούν τα κρίσιμα σημεία (σημεία μηδενισμού της 1ης παραγώγου και σημεία στα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος) και τα άκρα του πεδίου ορισμού της (ή των διαστημάτων που το συνθέτουν).

Οπότε, εάν $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = 0 \Rightarrow f(x)$ έχει πιθανά τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο.

Για τα κρίσιμα σημεία εξετάζουμε τις τιμές της παραγώγου δεξιά και αριστερά του σημείου αυτού. Ισχύει:

- $\left(\frac{dy}{dx} < 0, x < c\right) \wedge \left(\frac{dy}{dx} > 0, x > c\right) \Rightarrow c$ τοπικό ελάχιστο.
- $\left(\frac{dy}{dx} > 0, x < c\right) \wedge \left(\frac{dy}{dx} < 0, x > c\right) \Rightarrow c$ τοπικό μέγιστο.

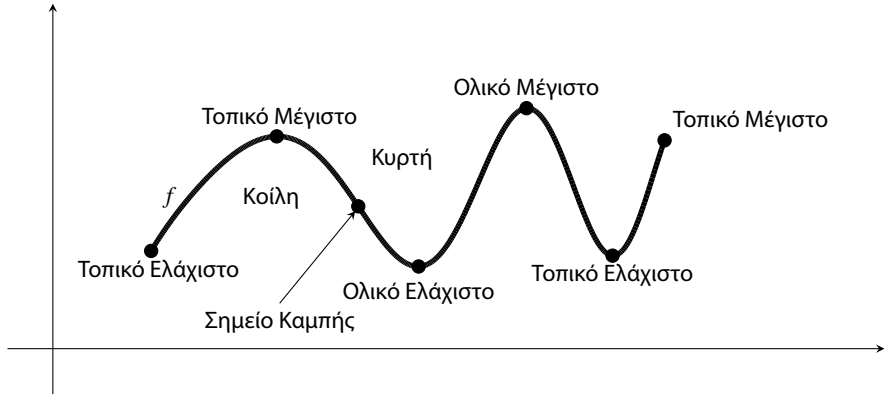
Για τα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος, ενώ οι τιμές της δεύτερης παραγώγου δεν μηδενίζεται, ισχύει:

- $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=c} > 0,\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = 0 \Rightarrow c$ τοπικό ελάχιστο.
- $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=c} < 0,\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = 0 \Rightarrow c$ τοπικό μέγιστο.

Γενικά, αν ισχύει $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=c} = \ldots = \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=c} = 0$ και $\left.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right|_{x=c} \neq 0$, τότε:

- Εάν n άρτιος, συμπεραίνουμε ότι το c είναι σημείο καμπής.
- Εάν n περιττός, ισχύει:
  - Εάν $\left.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right|_{x=c} > 0$ τότε το c είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.
  - Εάν $\left.\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right|_{x=c} < 0$ τότε το c είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική



Σχήμα 1.3: Ακρότατα και καμπυλότητα.

1.2.2 Συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών

Έστω η συνάρτηση $f(\tilde{x})$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, το σύνολο των σημείων του χώρου $(x, y, f(x, y))$, για $\tilde{x} = (x, y)$ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, καλείται γραφική της παράσταση. Η γραφική παράσταση της f καλείται επίσης επιφάνεια $z = f(x, y)$. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου xy για το οποίο μια συνάρτηση $f(x, y)$ έχει σταθερή τιμή $f(x, y) = c$ καλείται ισοσταθμική καμπύλη (level curve).

Ανάλογα ορίζεται και η ισοσταθμική επιφάνεια για τη συνάρτηση τριών μεταβλητών $w = f(x, y, z)$ αλλά και για συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών $f(\tilde{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ όπου $\tilde{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^{\mathsf{T}}$.

Η μερική παράγωγος της $f(x, y)$ ως προς x στο σημείο (x_0, y_0) ισούται με το όριο

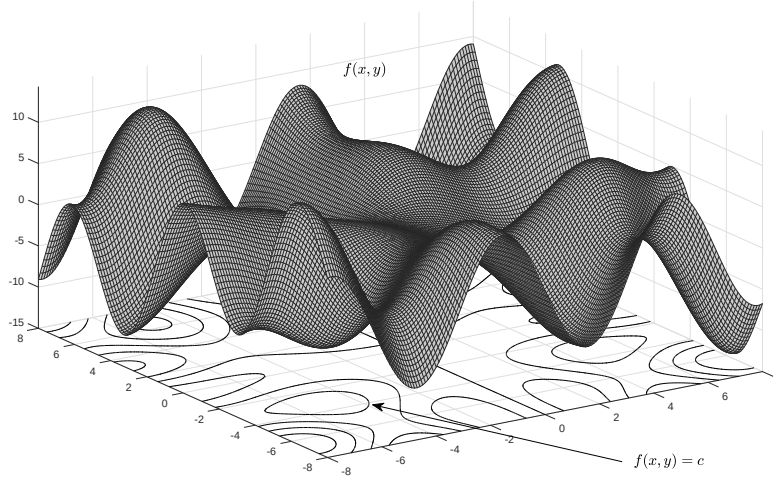
$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{(x - x_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

δεδομένου ότι το όριο υπάρχει.

Γεωμετρικά η τιμή της μερικής παραγώγου ως προς x στο σημείο (x_0, y_0) είναι η κλίση της καμπύλης $z = f(x, y_0)$ στο σημείο $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Η εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο P είναι η ευθεία του επιπέδου $y = y_0$ που διέρχεται από το P με τέτοια κλίση (η κλίση ευθείας είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας που έχει η ευθεία με το επίπεδο xy). Η μερική παράγωγος ως προς x στο σημείο (x_0, y_0) είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f ως προς το x όταν κρατάμε σταθερό το y ίσο με y_0. Πρόκειται δηλαδή για τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στην κατεύθυνση του άξονα xx' στο (x_0, y_0).

Ανάλογα ορίζονται οι μερικές παράγωγοι προς τη μεταβλητή y αλλά και για τις συναρτήσεις τριών ή και περισσοτέρων μεταβλητών ως προς τις μεταβλητές τους.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική



Σχήμα 1.4: Γραφική παράσταση και ισοσταθμικές καμπύλες.

Επίσης, με διαδοχικές παραγωγίσεις ορίζονται οι μερικές παράγωγοι δεύτερης αλλά και υψηλότερης τάξης και συμβολίζονται ανάλογα:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Το διάνυσμα κλίσης (ή κλίση ή βαθμίδα) της συνάρτησης $f(x,y)$ στο σημείο $P_0\,(x_0, y_0)$ είναι το διάνυσμα

$$\nabla f\,(x_0, y_0) = \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \right]^T. \tag{1.1}$$

Ονομάζεται και grad ή ανάδελτα της συνάρτησης. Σε κάθε σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της $f(x,y)$, η κλίση της ∇f είναι ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στην ισοσταθμική καμπύλη που διέρχεται από το σημείο αυτό.

Ανάλογα γενικεύουμε για συναρτήσεις τριών ή και περισσοτέρων μεταβλητών.

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T.$$

Για την κλίση ισχύει:

- Σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει τη μεγαλύτερη αύξηση στη διεύθυνση του διανύσματος κλίσης ∇f.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική