ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Το πλαίσιο

Η ανάπτυξη μαθηματικών υποδειγμάτων (μοντέλων) στις επιστήμες και στη μηχανική βοηθά στην κατανόηση των φυσικών φαινομένων. Τα υποδείγματα αυτά συχνά καταλήγουν σε μια εξίσωση που περιέχει κάποιες παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **διαφορική εξίσωση**. Δύο παραδείγματα υποδειγμάτων που αναπτύχθηκαν στη μαθηματική ανάλυση είναι η ελεύθερη πτώση ενός σώματος και η διάσπαση ενός ραδιενεργού υλικού.

Στην περίπτωση της ελεύθερης πτώσης, ένα αντικείμενο αφήνεται από κάποιο ύψος πάνω από το έδαφος και πέφτει υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας.† Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, ο οποίος λέει ότι «το γινόμενο της μάζας ενός αντικειμένου επί την επιτάχυνσή του είναι ίσο με την ολική δύναμη που ασκείται σε αυτό», μπορεί να εφαρμοστεί στο αντικείμενο που πέφτει. Αυτό οδηγεί στην εξίσωση (Σχήμα 1.1)

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg\,,$$

όπου m η μάζα του αντικειμένου, h η απόστασή του από το έδαφος, d^2h/dt^2 η επιτάχυνσή του, g είναι η (σταθερή) επιτάχυνση της βαρύτητας και $-mg$ η δύναμη της βαρύτητας. Είναι μια διαφορική εξίσωση που περιέχει τη δεύτερη παράγωγο της άγνωστης απόστασης h ως συνάρτησης του χρόνου.

Ευτυχώς, η παραπάνω εξίσωση επιλύεται εύκολα ως προς h. Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι απλώς να διαιρέσουμε με m και να ολοκληρώσουμε δύο φορές ως προς t. Έχουμε λοιπόν,

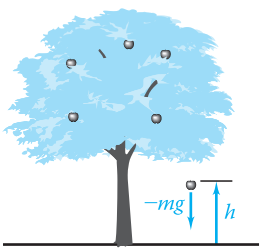
$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g\,,$$

συνεπώς

$$\frac{dh}{dt} = -gt + c_1$$

και

$$h = h(t) = \frac{-gt^2}{2} + c_1t + c_2\,.$$



Σχήμα 1.1 Μήλο σε ελεύθερη πτώση

†Εδώ υποθέτουμε ότι η βαρύτητα είναι η *μοναδική* δύναμη που ασκείται στο αντικείμενο και ότι η δύναμη αυτή είναι σταθερή. Πιο γενικευμένα υποδείγματα θα λάμβαναν υπόψη και άλλες δυνάμεις, όπως την αντίσταση του αέρα.

Θα δούμε ότι οι σταθερές ολοκληρώσεως, c_1 και c_2, προσδιορίζονται εάν γνωρίζουμε την *αρχική* απόσταση και την *αρχική* ταχύτητα του αντικειμένου. Έχουμε τότε έναν τύπο για την απόσταση του αντικειμένου, τη χρονική στιγμή t.

Στην περίπτωση της ραδιενεργού διάσπασης (Σχήμα 1.2), ξεκινάμε από την υπόθεση ότι ο ρυθμός διάσπασης είναι ανάλογος της υπάρχουσας ποσότητας ραδιενεργού υλικού. Αυτό οδηγεί στην εξίσωση

$$\frac{dA}{dt} = -kA\,, \qquad k > 0\,,$$

όπου $A(>0)$ είναι η άγνωστη ποσότητα ραδιενεργού υλικού που υπάρχει τη χρονική στιγμή t και k είναι η σταθερά αναλογίας. Για να λύσουμε αυτή τη διαφορική εξίσωση, την ξαναγράφουμε στη μορφή

$$\frac{1}{A}dA = -k\,dt$$

και ολοκληρώνουμε ώστε να πάρουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{A}dA &= \int -k\,dt\\ \ln A + C_1 &= -kt + C_2\,.\end{aligned}$$

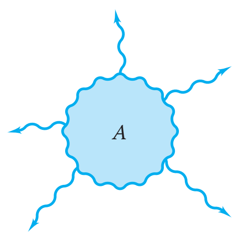
Λύνουμε ως προς A και παίρνουμε

$$A = A(t) = e^{\ln A} = e^{-kt}e^{C_2 - C_1} = Ce^{-kt},$$

όπου C είναι ο συνδυασμός των σταθερών ολοκληρώσεως $e^{C_2 - C_1}$. Η τιμή του C, όπως θα δούμε αργότερα, προσδιορίζεται εάν είναι δεδομένη η *αρχική* ποσότητα ραδιενεργού υλικού. Έχουμε τότε έναν τύπο για την ποσότητα του ραδιενεργού υλικού σε κάθε μελλοντική στιγμή t.

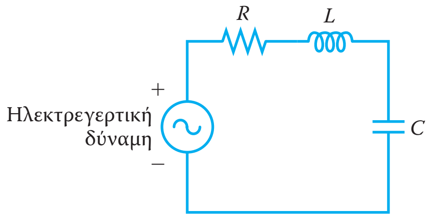
Αν και τα παραπάνω παραδείγματα λύθηκαν εύκολα με μεθόδους που μαθαίνουμε στη μαθηματική ανάλυση, μας δίνουν κάποια ιδέα για τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων γενικότερα. Πρώτον, ας λάβουμε υπόψη ότι η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι μια *συνάρτηση*, όπως η $h(t)$ ή $A(t)$, και όχι απλώς ένας αριθμός. Δεύτερον, η ολοκλήρωση[†] είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων (αυτό δεν είναι παράδοξο!). Τρίτον, δεν είναι αναμενόμενο να πάρουμε μια μοναδική λύση σε μια διαφορική εξίσωση, εφόσον θα προκύψουν αυθαίρετες «σταθερές ολοκλήρωσης». Η δεύτερη παράγωγος d^2h/dt^2 στην εξίσωση ελεύθερης πτώσης οδήγησε σε δύο σταθερές, c_1 και c_2, και η πρώτη παράγωγος στην περίπτωση της εξίσωσης διάσπασης οδήγησε, τελικά, σε μια σταθερά, C.

Οποτεδήποτε σε ένα μαθηματικό υπόδειγμα υπεισέρχεται ο **ρυθμός μεταβολής** μιας μεταβλητής ως προς μια άλλη, είναι επόμενο να προκύπτει μια διαφορική εξίσωση. Δυστυχώς, σε αντίθεση με τα παραδείγματα της ελεύθερης πτώσης και της ραδιενεργού διάσπασης, η διαφορική εξίσωση μπορεί να είναι πολύ περίπλοκη και δύσκολο να αναλυθεί.



Σχήμα 1.2 Ραδιενεργός διάσπαση

[†]Για μια επανάληψη στις τεχνικές ολοκλήρωσης, βλ. Παράρτημα Α.



Σχήμα 1.3 Σχηματική παράσταση ενός RLC κυκλώματος σε σειρά

Οι διαφορικές εξισώσεις εμφανίζονται σε μια ποικιλία περιπτώσεων, που περιλαμβάνουν όχι μόνο τις φυσικές επιστήμες αλλά και ετερόκλιτα πεδία, όπως οικονομία, ιατρική, ψυχολογία και επιχειρησιακή έρευνα. Θα απαριθμήσουμε λίγα ειδικά παραδείγματα.

1. Στην τραπεζική πρακτική, αν $P(t)$ είναι το ποσό σε δολάρια ενός καταθετικού λογαριασμού ο οποίος αποφέρει ένα ετήσιο επιτόκιο $r\,\%$ *ανατοκιζόμενο σε συνεχή βάση*, τότε το P ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

(1) $$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{100}P\,, \quad t \text{ σε έτη.}$$

2. Μια κλασική εφαρμογή των διαφορικών εξισώσεων απαντά στη μελέτη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος που αποτελείται από έναν αντιστάτη, μια επαγωγή και έναν πυκνωτή, στο οποίο εφαρμόζεται μια ηλεκτρεγερτική δύναμη (βλ. Σχήμα 1.3). Εδώ, μια εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff† οδηγεί στην εξίσωση

(2) $$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)\,,$$

όπου L είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής, R η αντίσταση, C η χωρητικότητα, $E(t)$ η ηλεκτρεγερτική δύναμη, $q(t)$ το φορτίο του πυκνωτή και t ο χρόνος.

3. Στην ψυχολογία, ένα υπόδειγμα εκμάθησης ενός θέματος σχετίζεται με την εξίσωση

(3) $$\frac{dy/dt}{y^{3/2}(1-y)^{3/2}} = \frac{2p}{\sqrt{n}}\,.$$

Εδώ η μεταβλητή y παριστάνει το επίπεδο δεξιότητας του μαθητευόμενου συναρτήσει του χρόνου t. Οι σταθερές p και n εξαρτώνται από τον μαθητευόμενο και τη φύση του θέματος.

4. Στη μελέτη των ταλαντούμενων χορδών και της διάδοσης των κυμάτων, βρίσκουμε τη *μερική* διαφορική εξίσωση

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,^{\ddagger}$$

όπου t είναι ο χρόνος, x η θέση κατά μήκος της χορδής, c η ταχύτητα του κύματος και u η μετατόπιση της χορδής, *η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου και της θέσης*.

†Θα εξετάσουμε τους νόμους του Kirchhoff στην Ενότητα 3.5.

‡*Ιστορική Σημείωση:* Αυτή η μερική διαφορική εξίσωση ανακαλύφθηκε για πρώτη φορά από τον Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) το 1747.

Για τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων, αρχικά χρειαζόμαστε κάποια κοινή ορολογία. Εάν μια εξίσωση περιέχει την παράγωγο μιας μεταβλητής ως προς μια άλλη, τότε η πρώτη ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή** και η δεύτερη **ανεξάρτητη μεταβλητή**. Έτσι, στην εξίσωση

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0 \,, \tag{5}$$

t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και x είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Αναφερόμαστε στα a και k ως τους **συντελεστές** της εξίσωσης (5). Στην εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y \,, \tag{6}$$

x και y είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές και u είναι η εξαρτημένη μεταβλητή.

Μια διαφορική εξίσωση, που περιέχει μόνο συνήθεις παραγώγους ως προς μία και μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή, λέγεται **συνήθης διαφορική εξίσωση**. Μια διαφορική εξίσωση, που έχει μερικές παραγώγους ως προς περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές, είναι μια **μερική διαφορική εξίσωση**. Η εξίσωση (5) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση και η εξίσωση (6) είναι μια μερική διαφορική εξίσωση.

Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη των μεγιστοβάθμιων παραγώγων που υπάρχουν στην εξίσωση. Η εξίσωση (5) είναι εξίσωση δεύτερης τάξης διότι d^2x/dt^2 είναι η παράγωγος που υπάρχει με το μέγιστο βαθμό. Η εξίσωση (6) είναι πρώτης τάξης διότι περιέχει μόνο παραγώγους πρώτης τάξης.

Θα ήταν χρήσιμο να ταξινομήσουμε τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις σε γραμμικές και μη γραμμικές. Ας θυμηθούμε ότι είναι ιδιαίτερα εύκολο να φανταστούμε ευθείες (στις δύο διαστάσεις) και επίπεδα (στις τρεις διαστάσεις) σε σύγκριση με μη γραμμικά αντικείμενα, όπως τριτοβάθμιες καμπύλες ή δευτεροβάθμιες επιφάνειες. Επί παραδείγματι, όλα τα σημεία μιας ευθείας μπορούν να βρεθούν αρκεί να γνωρίζουμε ακριβώς δύο απ' αυτά. Αντίστοιχα, οι *γραμμικές* διαφορικές εξισώσεις είναι ευκολότερο να λυθούν από ότι οι μη γραμμικές. Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις $ax + by = c$ και $ax + by + cz = d$ έχουν το γνώρισμα οι μεταβλητές τους να εμφανίζονται *μόνο σε προσθετικούς συνδυασμούς της πρώτης δύναμής τους*. Κατ' αναλογία, μια **γραμμική διαφορική εξίσωση** είναι αυτή στην οποία η εξαρτημένη μεταβλητή y και οι παράγωγοί της εμφανίζονται σε προσθετικούς συνδυασμούς των πρώτων δυνάμεών τους.

Πιο συγκεκριμένα, μια διαφορική εξίσωση είναι **γραμμική** αν έχει τη μορφή

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x) \,, \tag{7}$$

όπου οι όροι $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, . . . , $a_0(x)$ και $F(x)$ εξαρτώνται μόνο από την ανεξάρτητη μεταβλητή x. Οι προσθετικοί συνδυασμοί επιτρέπεται να έχουν πολλαπλασιαστικούς συντελεστές που εξαρτώνται από το x. Δεν υπάρχουν περιορισμοί ως προς αυτή την εξάρτηση από το x. Εάν μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεν είναι γραμμική, τότε λέγεται **μη γραμμική**. Για παράδειγμα, η

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y^3 = 0$$

είναι μια μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης λόγω του όρου y^3, ενώ η

$$t^3\frac{dx}{dt} = t^3 + x$$

είναι γραμμική (αν και έχει τους όρους t^3). Η εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} = \cos x$$

είναι μη γραμμική λόγω του όρου $y\,dy/dx$.

Αν και ως επί το πλείστον οι εξισώσεις που συναντά κανείς στην πράξη συνήθως εμπίπτουν στην κατηγορία των *μη γραμμικών*, το να γνωρίζει κανείς πώς να χειρίζεται απλούστερες γραμμικές εξισώσεις είναι ένα σημαντικό πρώτο βήμα (ακριβώς όπως οι εφαπτόμενες ευθείες μάς βοηθούν να καταλάβουμε περίπλοκες καμπύλες με το να παρέχουν τοπικές προσεγγίσεις).

1.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στα Προβλήματα 1–12, δίνεται μια διαφορική εξίσωση καθώς και ο τομέας ή το πρόβλημα από το οποίο προέκυψε. Ταξινομήστε την καθεμία ως συνήθη διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ) ή ως μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ), δώστε την τάξη της και υποδείξτε την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή. Αν η εξίσωση είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση, να αναφέρετε αν η εξίσωση είναι γραμμική ή μη γραμμική.

1. $5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 9x = 2\cos 3t$

(Μηχανικές ταλαντώσεις, ηλεκτρικά κυκλώματα, σεισμολογία)

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(Εξίσωση Hermite, κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής)

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(2-3x)}{x(1-3y)}$

(ανταγωνισμός μεταξύ δύο ειδών, οικολογία)

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(Εξίσωση Laplace, θεωρία δυναμικού, ηλεκτρισμός, θερμότητα, αεροδυναμική)

5. $y\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] = C$, όπου C είναι σταθερά

(το πρόβλημα του βραχιστόχρονου,† λογισμός μεταβολών)

6. $\dfrac{dx}{dt} = k(4-x)(1-x)$, όπου k είναι σταθερά

(ταχύτητες χημικών αντιδράσεων)

7. $\dfrac{dp}{dt} = kp(P-p)$, όπου k και P είναι σταθερές

(λογιστική καμπύλη, επιδημιολογία, οικονομία)

8. $\sqrt{1-y}\,\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} = 0$

(εξίσωση Kidder, ροή αερίων μέσα σε πορώδες μέσο)

9. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

(αεροδυναμική, ανάλυση τάσεων)

10. $8\dfrac{d^4y}{dx^4} = x(1-x)$

(εκτροπή ακτίνων)

11. $\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r} + kN$, όπου k είναι σταθερά

(πυρηνική διάσπαση)

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 0.1(1-y^2)\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

(εξίσωση van der Poll, τρίοδος σωλήνας κενού)

Στα Προβλήματα 13–16, να γράψετε μια διαφορική εξίσωση που ταιριάζει με τη φυσική περιγραφή.

13. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού p των βακτηρίων τη χρονική στιγμή t είναι ανάλογος του πληθυσμού τη στιγμή t.

14. Η ταχύτητα ενός σωματιδίου τη στιγμή t το οποίο κινείται κατά μήκος μιας ευθείας είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της θέσης του x.

15. Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας T του καφέ τη στιγμή t είναι ανάλογη της διαφοράς θερμοκρασίας M του αέρα τη στιγμή t και της θερμοκρασίας του καφέ τη στιγμή t.

16. Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας A του άλατος στο χρόνο t είναι ανάλογη του τετραγώνου της μάζας του υπάρχοντος άλατος τη στιγμή t.

17. **Αγώνας Επιτάχυνσης.** Δύο οδηγοί, η Alison και ο Kevin, συμμετέχουν σε έναν αγώνα επιτάχυνσης. Ξεκινώντας από κατάσταση ηρεμίας, ο καθένας συνεχίζει με σταθερή επιτάχυνση. Η Alison καλύπτει το τελευταίο $1/4$ της απόστασης σε 3 δευτερόλεπτα, ενώ ο Kevin καλύπτει το τελευταίο $1/3$ της απόστασης σε 4 δευτερόλεπτα. Ποιος κερδίζει και με ποια χρονική διαφορά;

†*Ιστορική Σημείωση:* Το 1630 ο Γαλιλαίος διατύπωσε το πρόβλημα του βραχιστόχρονου (*βράχιστος χρόνος* = ελάχιστος χρόνος), δηλαδή του καθορισμού της διαδρομής κατά μήκος της οποίας ένα σώμα πέφτει από ένα σημείο προς ένα άλλο στον ελάχιστο χρόνο. Προτάθηκε ξανά από τον John Bernoulli το 1696 και λύθηκε από τον ίδιο το επόμενο έτος.

1.2 Λύσεις και Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Μια συνήθης διαφορική εξίσωση τάξης n είναι μια ισότητα η οποία συσχετίζει την ανεξάρτητη μεταβλητή με την n-οστή παράγωγο (συνήθως και με κατώτερης τάξης παραγώγους) της εξαρτημένης μεταβλητής. Για παράδειγμα

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=x^3 \text{ (δεύτερης τάξης, } x \text{ ανεξάρτητη, } y \text{ εξαρτημένη)}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}-y=0 \text{ (δεύτερης τάξης, } t \text{ ανεξάρτητη, } y \text{ εξαρτημένη)}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4}=xt \text{ (τέταρτης τάξης, } t \text{ ανεξάρτητη, } x \text{ εξαρτημένη).}$$

Έτσι, μια γενική μορφή μιας εξίσωσης τάξης n με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0, \tag{1}$$

όπου F είναι συνάρτηση που εξαρτάται από τις x, y και τις παραγώγους της y έως και την n-οστή τάξη· δηλαδή από τις $x, y, \ldots, d^ny/dx^n$. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση ισχύει για όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα I ($a<x<b$, όπου τα a ή b θα μπορούσαν να είναι το άπειρο). Σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να απομονώσουμε τον όρο μέγιστης τάξης d^ny/dx^n και να γράψουμε την εξίσωση (1) στη μορφή

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{2}$$

η οποία προτιμάται συχνά σε σχέση με την (1) για θεωρητικούς και υπολογιστικούς λόγους.

Άμεση Λύση

Ορισμός 1. Μία συνάρτηση $\phi(x)$ η οποία, όταν αντικαταστήσει την y στην εξίσωση (1) [ή στην (2)], ικανοποιεί την εξίσωση για όλα τα x του διαστήματος I ονομάζεται **άμεση λύση** της εξίσωσης στο I.

Παράδειγμα 1

Δείξτε ότι η $\phi(x)=x^2-x^{-1}$ είναι μια άμεση λύση της γραμμικής εξίσωσης

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x^2}y=0, \tag{3}$$

αλλά η $\psi(x)=x^3$ δεν είναι.

Λύση

Οι συναρτήσεις $\phi(x)=x^2-x^{-1}$, $\phi'(x)=2x+x^{-2}$ και $\phi''(x)=2-2x^{-3}$ ορίζονται για όλα τα $x\neq 0$. Αντικατάσταση της y με $\phi(x)$ στην εξίσωση (3) δίνει

$$(2-2x^{-3})-\frac{2}{x^2}(x^2-x^{-1})=(2-2x^{-3})-(2-2x^{-3})=0\,.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $x \neq 0$, η συνάρτηση $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ είναι μια άμεση λύση της (3) στο $(-\infty, 0)$ και επίσης στο $(0, \infty)$.

Για $\psi(x) = x^3$ έχουμε $\psi'(x) = 3x^2$, $\psi''(x) = 6x$ και η αντικατάστασή τους στην (3) δίνει

$$6x - \frac{2}{x^2}x^3 = 4x = 0\,,$$

που ισχύει μόνο στο σημείο $x = 0$ και όχι σε διάστημα. Συνεπώς η $\psi(x)$ δεν είναι λύση. ◆

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι για *οποιαδήποτε* επιλογή των σταθερών c_1 και c_2, η συνάρτηση

$$\phi(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$$

είναι μια άμεση λύση της γραμμικής εξίσωσης

$$y'' - y' - 2y = 0\,. \tag{4}$$

Λύση

Έχουμε $\phi'(x) = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x}$ και $\phi''(x) = c_1e^{-x} + 4c_2e^{2x}$. Αντικατάσταση των ϕ, ϕ' και ϕ'' αντί των y, y' και y'' στην εξίσωση (4) δίνει

$$\begin{aligned}&(c_1e^{-x} + 4c_2e^{2x}) - (-c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x}) - 2(c_1e^{-x} + c_2e^{2x})\\ &= (c_1 + c_1 - 2c_1)e^{-x} + (4c_2 - 2c_2 - 2c_2)e^{2x} = 0\,.\end{aligned}$$

Επειδή η ισότητα ισχύει για όλα τα x στο $(-\infty, \infty)$, τότε η $\phi(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ είναι μια άμεση λύση της (4) στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ για κάθε επιλογή των σταθερών c_1 και c_2. ◆

Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2, οι μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων δεν δίνουν πάντα άμεσες λύσεις της εξίσωσης. Είναι πιθανό να πρέπει να αρκεστούμε σε μια λύση που δίνεται πεπλεγμένα. Ας θεωρήσουμε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι η σχέση

$$y^2 - x^3 + 8 = 0 \tag{5}$$

ορίζει μια πεπλεγμένη λύση της μη γραμμικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y} \tag{6}$$

στο διάστημα $(2, \infty)$.

Λύση

Λύνοντας την (5) ως προς y, παίρνουμε $y = \pm\sqrt{x^3 - 8}$. Ας δοκιμάσουμε την $\phi(x) = \sqrt{x^3 - 8}$ για να δούμε αν είναι μια άμεση λύση. Επειδή $d\phi/dx = 3x^2/\left(2\sqrt{x^3 - 8}\right)$, τόσο η ϕ, όσο και η $d\phi/dx$ ορίζονται στο $(2, \infty)$. Αντικατάστασή τους στην (6) δίνει

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 8}} = \frac{3x^2}{2\left(\sqrt{x^3 - 8}\right)}\,,$$

η οποία όντως ισχύει για κάθε x στο $(2, \infty)$. [Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η $\psi(x) = -\sqrt{x^3 - 8}$ είναι επίσης μια άμεση λύση της (6).] ◆

Πεπλεγμένη Λύση

Ορισμός 2. Μια σχέση $G(x, y) = 0$ λέμε ότι είναι μια **πεπλεγμένη λύση** της εξίσωσης (1) στο διάστημα I αν ορίζει μία ή περισσότερες άμεσες λύσεις στο I.

Παράδειγμα 4

Δείξτε ότι η σχέση

$$x + y + e^{xy} = 0 \tag{7}$$

είναι μια πεπλεγμένη λύση της μη γραμμικής εξίσωσης

$$(1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0\,. \tag{8}$$

Λύση

Πρώτον, παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να λύσουμε ευθέως την (7) ώστε να πάρουμε το y συναρτήσει μόνο του x. Καταλαβαίνουμε όμως ότι για να ισχύει η (7), μια ορισμένη μεταβολή στο x συνεπάγεται μια μεταβολή στο y, και έτσι η σχέση (7) ορίζει, τουλάχιστον έμμεσα, μια συνάρτηση $y(x)$. Το τελευταίο είναι δύσκολο να αποδειχθεί άμεσα, μπορεί όμως να επαληθευτεί με τη χρήση του **θεωρήματος της πεπλεγμένης συνάρτησης**[†] του προχωρημένου λογισμού, που εξασφαλίζει ότι μια τέτοια συνάρτηση $y(x)$ υπάρχει και ότι είναι επίσης παραγωγίσιμη (βλ. Πρόβλημα 30).

Αν γνωρίζουμε ότι η y είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, μπορούμε να εφαρμόσουμε την τεχνική της πεπλεγμένης παραγώγισης. Πράγματι, από την (7), παραγωγίζοντας ως προς x και εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου και τον κανόνα της αλυσίδας, παίρνουμε,

$$\frac{d}{dx}(x + y + e^{xy}) = 1 + \frac{dy}{dx} + e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ή

$$(1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0\,,$$

που είναι η ίδια με τη διαφορική εξίσωση (8). Συνεπώς η σχέση (7) είναι μια πεπλεγμένη λύση σε κάποιο διάστημα, όπως εγγυάται το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης. ◆

Παράδειγμα 5

Να επαληθεύσετε ότι για κάθε τιμή της σταθεράς C η εξίσωση $4x^2 - y^2 = C$ είναι πεπλεγμένη λύση της

$$y\frac{dy}{dx} - 4x = 0\,. \tag{9}$$

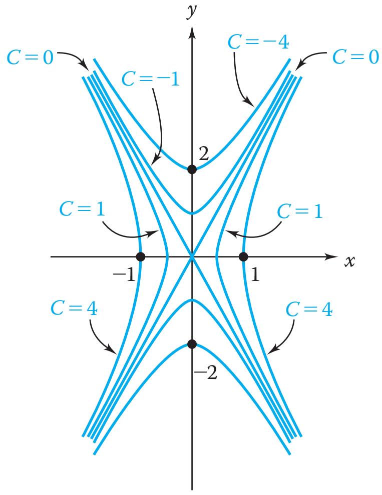
Να σχεδιάσετε τις καμπύλες λύσης για $C = 0, \pm 1, \pm 4$. (Το σύνολο όλων αυτών των λύσεων ονομάζεται *μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων*.)

Λύση

Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση $4x^2 - y^2 = C$ ως προς x, βρίσκουμε

$$8x - 2y\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

[†]Βλ. *Vector Calculus*, 6th ed., των J. E. Marsden και A. J. Tromba (Freeman, San Francisco, 2013).



Σχήμα 1.4 Πεπλεγμένες λύσεις της $4x^2 - y^2 = C$

που είναι ισοδύναμη με την (9). Στο Σχήμα 1.4 απεικονίζονται οι πεπλεγμένες λύσεις για $C = 0, \pm 1, \pm 4$. Οι καμπύλες είναι υπερβολές με κοινές ασύμπτωτες $y = \pm 2x$. Προσέξτε ότι οι καμπύλες πεπλεγμένων λύσεων (με το C να είναι τυχαίο) καλύπτουν ολόκληρο το επίπεδο και για $C \neq 0$ δεν τέμνονται. Για $C = 0$, η πεπλεγμένη λύση δίνει δύο άμεσες λύσεις $y = 2x$ και $y = -2x$, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. ◆

Για συντομία, από εδώ και στο εξής χρησιμοποιούμε τον όρο *λύση*, εννοώντας είτε άμεση είτε πεπλεγμένη λύση.

Στην αρχή της Ενότητας 1.1, είδαμε ότι η λύση της εξίσωσης *δεύτερης* τάξης της ελεύθερης πτώσης χρειάστηκε δύο αυθαίρετες σταθερές (παραμέτρους) ολοκλήρωσης c_1, c_2:

$$h(t) = \frac{-gt^2}{2} + c_1 t + c_2 \,,$$

ενώ η λύση της διαφορικής εξίσωσης *πρώτης* τάξης της ραδιενεργού διάσπασης περιείχε μια σταθερά C:

$$A(t) = Ce^{-kt} \,.$$

Είναι προφανές ότι η ολοκλήρωση της απλής διαφορικής εξίσωσης *τέταρτης* τάξης

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

εισάγει στη λύση τέσσερις αυθαίρετες σταθερές:

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \,.$$

Σε επόμενη ενότητα θα αποδειχθεί ότι, γενικά, οι μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων n-τάξης εισάγουν n αυθαίρετες σταθερές. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις θα μπορούμε να υπολογίσουμε αυτές τις σταθερές εάν γνωρίζουμε τις n αρχικές τιμές $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$.

Στην περίπτωση εξίσωσης πρώτης τάξης, οι αρχικές συνθήκες περιορίζονται στη συνθήκη

$$y(x_0) = y_0 \,,$$

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Ορισμός 3. Με τον όρο **πρόβλημα αρχικών τιμών** για μια διαφορική εξίσωση n-τάξης

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 ,$$

εννοούμε: Να βρεθεί μια λύση της διαφορικής εξίσωσης σε ένα διάστημα I, η οποία ικανοποιεί στο x_0 τις n αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 , \\ \frac{dy}{dx}(x_0) &= y_1 , \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) &= y_{n-1} , \end{aligned}$$

όπου $x_0 \in I$ και $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ είναι δεδομένες σταθερές.

και στην περίπτωση εξίσωσης δεύτερης τάξης, οι αρχικές συνθήκες έχουν τη μορφή

$$y(x_0) = y_0 , \qquad \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1 .$$

Ο όρος *αρχικές συνθήκες* προέρχεται από τη μηχανική, στην οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή x παριστάνει τον *χρόνο* και έχει επικρατήσει να συμβολίζεται ως t. Εάν λοιπόν t_0 είναι η αρχική χρονική στιγμή, $y(t_0) = y_0$ συμβολίζει την αρχική θέση ενός σώματος και $y'(t_0)$ είναι η αρχική του ταχύτητα.

Παράδειγμα 6

Να δείξετε ότι η $\phi(x) = \sin x - \cos x$ είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \cdot \qquad y(0) = -1 , \qquad \frac{dy}{dx}(0) = 1 . \tag{10}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι και οι τρεις συναρτήσεις $\phi(x) = \sin x - \cos x$, $d\phi/dx = \cos x + \sin x$ και $d^2\phi/dx^2 = -\sin x + \cos x$ ορίζονται στο $(-\infty, \infty)$. Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση, παίρνουμε

$$(-\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0 ,$$

που ισχύει για όλα τα $x \in (-\infty, \infty)$. Συνεπώς η $\phi(x)$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (10) στο $(-\infty, \infty)$. Αν ελέγξουμε κατά πόσο ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε

$$\phi(0) = \sin 0 - \cos 0 = -1 ,$$

$$\frac{d\phi}{dx}(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1 ,$$

οι οποίες συμφωνούν με τις συνθήκες στη (10). Επομένως η $\phi(x)$ είναι η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών. ◆

Παράδειγμα 7

Όπως αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 2, η συνάρτηση $\phi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ είναι λύση της

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

για οποιαδήποτε επιλογή των σταθερών c_1 και c_2. Να προσδιορίσετε τις c_1 και c_2 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες

$$y(0) = 2 \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dx}(0) = -3$$

Λύση

Για να βρούμε τις σταθερές c_1 και c_2, υπολογίζουμε πρώτα την $d\phi/dx$ και παίρνουμε $d\phi/dx = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}$. Αντικαθιστώντας στις αρχικές μας συνθήκες παίρνουμε το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} \phi(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 2 \ , \\ \dfrac{d\phi}{dx}(0) = -c_1 e^0 + 2c_2 e^0 = -3 \ , \end{cases} \qquad \text{ή} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \ , \\ -c_1 + 2c_2 = -3 \ . \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε $3c_2 = -1$, άρα $c_2 = -1/3$. Επειδή $c_1 + c_2 = 2$, βρίσκουμε $c_1 = 7/3$. Επομένως η λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών είναι $\phi(x) = (7/3)e^{-x} - (1/3)e^{2x}$. ◆

Διατυπώνουμε τώρα ένα θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για προβλήματα αρχικών τιμών πρώτης τάξης. Υποθέτουμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ .$$

Το δεξιό μέλος $f(x, y)$ πρέπει οπωσδήποτε να είναι καλά ορισμένο στις αρχικές τιμές $x = x_0$ για το x και $y_0 = y(x_0)$ για το y. Επιπλέον, οι υποθέσεις του θεωρήματος απαιτούν τόσο η f, όσο και η $\partial f/\partial y$ να είναι *συνεχείς* ως προς x σε κάποιο διάστημα $a < x < b$ που περιέχει το x_0 και ως προς y σε κάποιο διάστημα $c < y < d$ που περιέχει το y_0. Ας σημειωθεί ότι το σύνολο των σημείων του xy-επιπέδου που ικανοποιούν τις σχέσεις $a < x < b$ και $c < y < d$ είναι ένα *ορθογώνιο*. Το Σχήμα 1.5 της σελίδας 32 δείχνει αυτό το «ορθογώνιο της συνέχειας» με το αρχικό σημείο (x_0, y_0) καθώς και το γράφημα ενός τμήματος της λύσης στο εσωτερικό του.

Ύπαρξη και Μοναδικότητα της Λύσης

Θεώρημα 1. Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

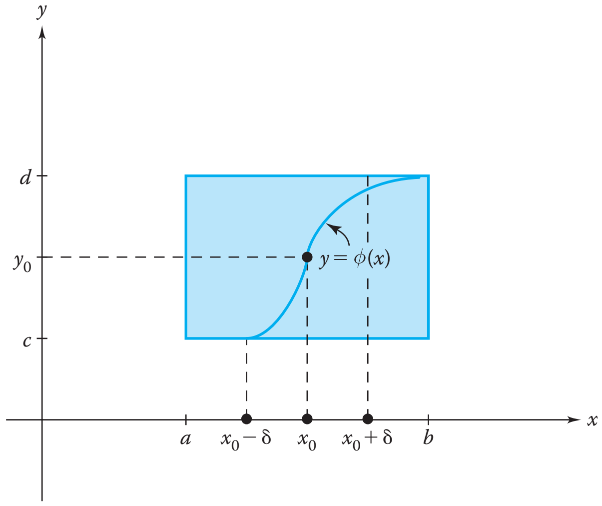
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \ .$$

Αν f και $\partial f/\partial y$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο ορθογώνιο

$$R = \{(x, y) \colon a < x < b, c < y < d\}$$

το οποίο περιέχει το σημείο (x_0, y_0), τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση $\phi(x)$ σε κάποιο διάστημα $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, όπου δ είναι ένας θετικός αριθμός.[†]

[†]Πρέπει να σημειωθεί ότι η συνέχεια της f και μόνο σε ένα τέτοιο ορθογώνιο είναι αρκετή για να εγγυηθεί την ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα αρχικών τιμών σε κάποιο ανοιχτό διάστημα που περιέχει το x_0, όμως η μοναδικότητα μπορεί να μην ισχύει (βλ. Παράδειγμα 9).



Σχήμα 1.5 Σχεδιάγραμμα για το θεώρημα ύπαρξης–μοναδικότητας

Το προηγούμενο θεώρημα μας λέει δύο πράγματα. Πρώτον, όταν μια εξίσωση ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχει μια λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών. Λογικά, είναι επιθυμητό να γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε έχει λύση, προτού αφιερώσουμε πολύ χρόνο προσπαθώντας να τη λύσουμε. Δεύτερον, να γνωρίζουμε αν, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, υπάρχει **μοναδική** λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών. Η μοναδικότητα αυτή σημαίνει ότι αν καταφέρουμε να βρούμε μια λύση, τότε αυτή είναι και η *μόνη* λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. Γραφικά, το θεώρημα μας λέει ότι υπάρχει μόνο μία λύση της οποίας η καμπύλη διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0). Με άλλα λόγια, γι' αυτή την εξίσωση πρώτης τάξης δεν υπάρχουν δύο λύσεις που μπορεί να τέμνονται κάπου μέσα στο ορθογώνιο. Να σημειωθεί ότι η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης ισχύει μόνο σε *κάποια* περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Δυστυχώς, το θεώρημα δεν μας αποκαλύπτει το εύρος (2δ) αυτής της περιοχής (παρά μόνο ότι είναι μη μηδενικό). Το Πρόβλημα 18 επεκτείνεται πάνω σ' αυτό το θέμα.

Το Πρόβλημα 19 δίνει ένα παράδειγμα εξίσωσης που δεν έχει λύση. Το Πρόβλημα 29 είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών του οποίου η λύση δεν είναι μοναδική. Σ' αυτές τις περιπτώσεις βέβαια, δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.

Όταν τα προβλήματα αρχικών τιμών περιγράφουν φυσικά φαινόμενα, πολλοί στην πράξη υποθέτουν ότι τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 1 ισχύουν. Πράγματι, για να αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών λογικό υπόδειγμα, περιμένουμε από αυτό να έχει μια λύση, αφού στο φυσικό κόσμο «κάτι συμβαίνει». Επιπλέον, η λύση θα πρέπει σε αυτές τις περιπτώσεις να είναι μοναδική, αφού η επανάληψη του πειράματος κάτω από τις ίδιες ακριβώς συνθήκες οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα.[†]

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 περιλαμβάνει τη μετατροπή του προβλήματος αρχικών τιμών σε μια ολοκληρωτική εξίσωση και κατόπιν χρήση της μεθόδου του Picard για την κατασκευή μιας ακολουθίας διαδοχικών προσεγγίσεων που συγκλίνουν στη λύση. Η μετατροπή σε ολοκληρωτική εξίσωση και η μέθοδος του Picard συζητούνται στην Εργασία Α στο τέλος του Κεφαλαίου 13.[‡]

Παράδειγμα 8

Για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\textbf{(11)} \qquad 3\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3 \ , \qquad y(1) = 6 \ ,$$

προκύπτει από το Θεώρημα 1 η ύπαρξη μοναδικής λύσης;

[†]Πρόκειται για μια περίπτωση όπου υιοθετούμε ένα ντετερμινιστικό (αιτιοκρατικό) και όχι ένα νοητικό υπόδειγμα.

[‡]Όλες οι αναφορές στα Κεφάλαια 11–13 αναφέρονται στο εμπλουτισμένο κείμενο, *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems,* 7th ed.