

Περιεχόμενα

Λίγα Λόγια Για Τον Συγγραφέα	22
Προλεγόμενα - Ευχαριστίες	23
1 Περί Συνόλων	25
1.1 Βασικοί Ορισμοί	25
1.2 Σχέσεις Εγκλεισμού	25
1.3 Πράξεις Μεταξύ των Συνόλων	26
1.3.1 Συμπλήρωμα Συνόλου	26
1.3.2 Τομή Συνόλων	26
1.3.3 Ένωση Συνόλων	26
1.3.4 Διαφορά Συνόλων	27
1.3.5 Συμμετρική Διαφορά	27
1.3.6 Επιμεριστικές Ιδιότητες	27
1.3.7 Προσεταιριστικές Ιδιότητες	28
1.3.8 Τύποι του <i>de Morgan</i>	28
1.4 Λυμένες Ασκήσεις	28
1.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση	32
2 Καρτεσιανό Γινόμενο	35
2.1 Διατεταγμένο Ζεύγος	35
2.2 Διατεταγμένη n -άδα	35
2.3 Καρτεσιανό Γινόμενο Δύο Συνόλων	35
2.4 Γενίκευση Καρτεσιανού Γινομένου	35
2.5 Λυμένες Ασκήσεις	36
2.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση	37
3 Διμελείς Σχέσεις	39
3.1 Βασικοί Ορισμοί	39
3.2 Είδη Διμελών Σχέσεων	39
3.3 Σχέσεις Ισοδυναμίας	40
3.4 Σχέσεις Διατάξεως	40
3.5 Διατεταγμένα Σύνολα - Βασικοί Ορισμοί	40
3.6 Διατεταγμένα Σύνολα - Βασικά Θεωρήματα	41
3.7 Λυμένες Ασκήσεις	41
3.8 Ασκήσεις Προς Επίλυση	44
4 Οι Πραγματικοί Αριθμοί	47
4.1 Βασικοί Αριθμοί	47
4.2 Βασικά Αριθμοσύνολα	47
4.3 Η Ταυτότητα της Διαίρεσης	47
4.4 Άρτιοι, Περιττοί και Πρώτοι Αριθμοί	47
4.5 Οι Άρρητοι	48
4.6 Δεκαδική Μορφή Αρρήτων	48
4.7 Πραγματικοί Αριθμοί	48

4.8	Λυμένες Ασκήσεις	48
4.9	Ασκήσεις Προς Επίλυση	50
5	Βασικές Πράξεις στους Πραγματικούς Αριθμούς	51
5.1	Η Πρόσθεση	51
5.2	Η Διαφορά (Αφαίρεση)	51
5.3	Ο Πολλαπλασιασμός	52
5.4	Η Διαίρεση	52
5.5	Δυνάμεις με Ακέραιους Εκθέτες	53
	5.5.1 Ιδιότητες των δυνάμεων	53
5.6	Λυμένες Ασκήσεις	54
5.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	54
6	Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού	55
6.1	Ορισμός	55
6.2	Ιδιότητες Απολύτων Τιμών	55
6.3	max και min Πραγματικών Αριθμών	56
6.4	Λυμένες Ασκήσεις	57
6.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	58
7	Ακέραιο Μέρος Πραγματικού Αριθμού	63
7.1	Ορισμός	63
7.2	Θεωρήματα	63
7.3	Λυμένες Ασκήσεις	64
7.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	66
8	Αναλογίες	69
8.1	Ορισμοί	69
8.2	Ιδιότητες των Αναλογιών	69
8.3	Ιδιότητα των Ίσων Κλασμάτων	70
8.4	Λυμένες Ασκήσεις	70
8.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	71
9	Ρίζες	73
9.1	Ορισμοί	73
9.2	Ιδιότητες Ριζών	74
9.3	Δύναμη Πραγματικού Αριθμού Με Ρητό Εκθέτη	74
9.4	Μέσες Τιμές	75
9.5	Λυμένες Ασκήσεις	75
9.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	77
10	Διάταξη Στους Πραγματικούς Αριθμούς	79
10.1	Γνήσια Διάταξη - Ορισμοί	79
10.2	Γνήσια Διάταξη - Ιδιότητες	79
10.3	Διάταξη - Ορισμοί - Ιδιότητες	81
10.4	Θεμελιώδεις Ταυτοτικές Ανισότητες	81
10.5	Θεμελιώδεις Ανισότητες Υπό Συνθήκη	82
10.6	Θεμελιώδεις Ανισοτικές Σχέσεις	82
10.7	Λυμένες Ασκήσεις	82
10.8	Ασκήσεις Προς Επίλυση	84
11	Το Σύνολο των Πραγματικών Αριθμών	85
11.1	Φραγμένα Σύνολα στο \mathbb{R}	85
11.2	Αξιοματική Θεμελίωση των Πραγματικών Αριθμών	86
11.3	Το Άπειρο	86

11.4	Διαστήματα στο \mathbb{R}	86
11.5	Τα Σύνολα \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3	86
11.6	Καρτεσιανό Γινόμενο Διαστημάτων	87
11.7	Γραφική Παράσταση Καρτεσιανού Γινομένου	87
11.8	Τοπολογικές Έννοιες Στο \mathbb{R}	87
11.9	Ιδιότητες στο \mathbb{R}	88
11.10	Αλγεβρικοί και Υπερβατικοί Αριθμοί	89
11.11	Λυμένες Ασκήσεις	89
11.12	Ασκήσεις Προς Επίλυση	90
12	Πραγματικές Συναρτήσεις	93
12.1	Ορισμός	93
12.2	Πεδίο Ορισμού	93
12.3	Πεδίο Τιμών	93
12.4	Εικόνα Συνόλου	94
12.5	Βασικές Μαθηματικές Συναρτήσεις	94
12.6	Ειδικές Συναρτήσεις	95
12.6.1	Η Σταθερή Συνάρτηση	95
12.6.2	Η Συνάρτηση Απολύτου	95
12.6.3	Η Συνάρτηση Ακέραιου Μέρους	95
12.6.4	Η Συνάρτηση <i>max</i>	95
12.6.5	Η Συνάρτηση <i>min</i>	95
12.6.6	Η Χαρακτηριστική Συνάρτηση	96
12.7	Λυμένες Ασκήσεις	96
12.8	Ασκήσεις Προς Επίλυση	97
13	Γραφικές Παραστάσεις Συναρτήσεων	99
13.1	Γράφημα Συνάρτησης	99
13.2	Γραμμικές Μετατοπίσεις	100
13.3	Άλλες Μετατοπίσεις	100
13.4	Ασύμπτωτες Ευθείες	101
13.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	101
14	Πράξεις Μεταξύ Συναρτήσεων	103
14.1	Ισότητα Συναρτήσεων	103
14.2	Αλγεβρικές Πράξεις Μεταξύ Συναρτήσεων	103
14.2.1	Άθροισμα Συναρτήσεων	103
14.2.2	Διαφορά Συναρτήσεων	103
14.2.3	Γινόμενο Συναρτήσεων	103
14.2.4	Πηλίκο Συναρτήσεων	103
14.2.5	Διάταξη Συναρτήσεων	103
14.3	Ιδιότητες Πράξεων	103
14.4	Λυμένες Ασκήσεις	104
14.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	105
15	Σύνθεση Συναρτήσεων	107
15.1	Λυμένες Ασκήσεις	107
15.2	Ασκήσεις Προς Επίλυση	108
16	Κατηγορίες Συναρτήσεων	109
16.1	Φραγμένες Συναρτήσεις	109
16.2	<i>Supremum - Infimum</i>	109
16.3	Άριτες Συναρτήσεις	109
16.4	Περιττές Συναρτήσεις	110

16.5	Συνάρτηση Επί	110
16.6	Αμφιμονοσήμαντη Συνάρτηση	110
16.7	Περιοδικές Συναρτήσεις	110
16.8	Λυμένες Ασκήσεις	110
16.9	Ασκήσεις Προς Επίλυση	113
17 Μονοτονία Πραγματικών Συναρτήσεων		115
17.1	Ορισμοί	115
17.2	Ιδιότητες	115
17.3	Λόγος Μεταβολής	116
17.4	Λυμένες Ασκήσεις	116
17.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	117
18 Ακρότατα Συναρτήσεων		119
18.1	Ορισμοί	119
18.2	Παρατηρήσεις	119
18.3	Λυμένες Ασκήσεις	119
18.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	120
19 Αντίστροφη Συνάρτηση		121
19.1	Ορισμοί	121
19.2	Ιδιότητες	121
19.3	Λυμένες Ασκήσεις	121
19.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	122
20 Η Ευθεία		123
20.1	Ορισμός	123
20.2	Ιδιότητες	123
20.3	Εναλλακτικές Εξισώσεις Ευθείας	124
20.4	Λυμένες Ασκήσεις	125
20.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	125
21 Πολυωνυμικές - Ρητές Συναρτήσεις		127
21.1	Το Τριώνυμο	127
21.2	Κυβική Συνάρτηση	128
21.3	Πολυωνυμική Συνάρτηση	129
21.4	Η Ομογραφική Συνάρτηση	129
21.5	Ρητή Συνάρτηση	130
21.6	Λυμένες Ασκήσεις	130
21.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	131
22 Εκθετικές - Λογαριθμικές Συναρτήσεις		133
22.1	Η Εκθετική Συνάρτηση	133
22.2	Ιδιότητες Εκθετικής Συνάρτησης	133
22.3	Η Λογαριθμική Συνάρτηση	133
22.4	Υπερβολικές Συναρτήσεις	135
22.5	Λυμένες Ασκήσεις	135
22.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	136
23 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις		137
23.1	Αριθμοί και Τόξα	137
23.2	Η Συνάρτηση $\eta\mu x$	138
	23.2.1 Ιδιότητες Ημιτόνου	138
	23.2.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$	139
23.3	Η Συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu x$	139

23.3.1	Ιδιότητες Συνημιτόνου	139
23.3.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	140
23.4	Η Συνάρτηση $\epsilon\varphi x$	140
23.4.1	Ιδιότητες Εφαπτομένης	141
23.4.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \epsilon\varphi x$	141
23.5	Η Συνάρτηση $\sigma\varphi x$	142
23.5.1	Ιδιότητες Συνεφαπτομένης	142
23.5.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \sigma\varphi x$	143
23.6	Η Συνάρτηση $\tau\epsilon\mu x$	143
23.6.1	Ιδιότητες Τέμνουσας	143
23.6.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\epsilon\mu x$	144
23.7	Η Συνάρτηση $\sigma\tau\epsilon\mu x$	144
23.7.1	Ιδιότητες Συντέμνουσας	145
23.7.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \sigma\tau\epsilon\mu(x)$	146
23.8	Βασικές Ιδιότητες	146
23.9	Λυμένες Ασκήσεις	147
23.10	Ασκήσεις Προς Επίλυση	148
24	Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις	149
24.1	Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\eta\mu x$	149
24.1.1	Ιδιότητες Αντιστρόφου Ημιτόνου	149
24.1.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\eta\mu x$	150
24.2	Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x$	150
24.2.1	Ιδιότητες Αντιστρόφου Συνημιτόνου	150
24.2.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x$	150
24.3	Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi x$	151
24.3.1	Ιδιότητες Αντιστρόφου Εφαπτομένης	151
24.3.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi x$	151
24.4	Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\varphi x$	151
24.4.1	Ιδιότητες Αντιστρόφου Συνεφαπτομένης	152
24.4.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\varphi x$	152
24.5	Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\tau\epsilon\mu x$	152
24.5.1	Ιδιότητες Αντιστρόφου Τέμνουσας	152
24.5.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\tau\epsilon\mu x$	153
24.6	Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\tau\epsilon\mu x$	153
24.6.1	Ιδιότητες Αντιστρόφου Συντέμνουσας	153
24.6.2	Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\tau\epsilon\mu x$	154
24.7	Βασικές Ιδιότητες	154
24.8	Λυμένες Ασκήσεις	154
24.9	Ασκήσεις Προς Επίλυση	156
25	Ακολουθίες	157
25.1	Ορισμοί	157
25.2	Συμβολισμός	157
25.3	Παραδείγματα	157
25.4	Τελικές Ιδιότητες	158
25.4.1	Παράδειγμα	158
25.5	Πράξεις μεταξύ ακολουθιών	158
25.6	Λυμένες Ασκήσεις	158
25.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	161
26	Φημισμένες Ακολουθίες	163
26.1	Η Ακολουθία <i>Fibonacci</i>	163
26.2	Οι «Γεωμετρικές» Ακολουθίες	163

26.3	Οι «Αριθμητικές» Ακολουθίες	164
26.4	Η Ακολουθία των Καταλωνικών Αριθμών	164
27	Φραγμένες Ακολουθίες	165
27.1	Ορισμοί	165
27.2	Ιδιότητες	165
27.3	<i>Supremum - Infimum</i>	165
27.4	Λυμένες Ασκήσεις	166
27.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	168
28	Μονοτονία Ακολουθιών	169
28.1	Ορισμοί	169
28.2	Θεωρήματα	169
28.3	Λυμένες Ασκήσεις	169
28.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	170
29	Μηδενικές Ακολουθίες	171
29.1	Ορισμός	171
29.2	Ιδιότητες	171
29.3	Λυμένες Ασκήσεις	172
29.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	174
30	Συγκλίνουσες Ακολουθίες	175
30.1	Ορισμός	175
30.2	Ιδιότητες	175
30.3	Βασικά Όρια	176
	30.3.1 Όριο Κλάσματος	176
	30.3.2 Όριο Ριζών	176
	30.3.3 Συνήθη Όρια	177
	30.3.4 Αριθμητικός Μέσος	177
	30.3.5 Γεωμετρικός Μέσος	177
30.4	Λυμένες Ασκήσεις	177
30.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	180
31	Υπακολουθίες	181
31.1	Ορισμοί	181
31.2	Παράδειγμα	181
31.3	Υπακολουθίες και Σύγκλιση	181
31.4	Ιδιότητες	182
31.5	Λυμένες Ασκήσεις	182
31.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	182
32	Αναδρομικές Ακολουθίες	185
32.1	Αξιώματα Σύγκλισης	185
32.2	Λυμένες Ασκήσεις	185
32.3	Ασκήσεις προς Επίλυση	188
33	Ο αριθμός e	191
33.1	Λυμένες Ασκήσεις	191
33.2	Ασκήσεις Προς Επίλυση	192
34	Ακολουθίες Στο Άπειρο	195
34.1	Ορισμοί	195
34.2	Ιδιότητες	195
34.3	Λυμένες Ασκήσεις	196

34.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	197
35	Ειδικά Θέματα Ακολουθιών	199
35.1	Βασικές Ακολουθίες	199
35.2	Οι Έννοιες $\lim \sup$ και $\lim \inf$	199
35.3	Λυμένες Ασκήσεις	199
35.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	200
36	Αριθμητική Πρόοδος	201
36.1	Ορισμοί	201
36.2	Ιδιότητες	201
36.3	Βασικά Αθροίσματα	202
36.4	Λυμένες Ασκήσεις	202
36.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	205
37	Αρμονική Πρόοδος	207
37.1	Ορισμοί	207
37.2	Ιδιότητες	207
37.3	Λυμένες Ασκήσεις	208
37.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	209
38	Γεωμετρική Πρόοδος	211
38.1	Ορισμοί	211
38.2	Ιδιότητες	211
38.3	Λυμένες Ασκήσεις	212
38.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	215
39	Σειρές	217
39.1	Βασικές Έννοιες	217
39.2	Βασικοί Ορισμοί	217
39.3	Στοιχειώδεις Σειρές	217
39.4	Βασικές Ιδιότητες	218
39.5	Βασικά Θεωρήματα	218
39.6	Λυμένες Ασκήσεις	218
39.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	220
40	Απλός Τόκος	221
40.1	Ορισμοί	221
40.2	Τύποι	221
40.3	Λυμένες Ασκήσεις	222
40.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	222
41	Ανατοκισμός	223
41.1	Διακριτός Ανατοκισμός	223
41.2	Περιοδικός Ανατοκισμός	223
41.3	Συνεχής Ανατοκισμός	223
41.4	Παρούσα Αξία	223
41.5	Ετήσιο Ποσοστιαίο Επιτόκιο	224
41.6	Λυμένες Ασκήσεις	224
41.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	226
42	Επενδύσεις	229
42.1	Ταμειακή ροή	229
42.2	Απόσβεση	229
42.3	Καθαρή Παρούσα Αξία	229

42.4	Εσωτερικός Ρυθμός Απόδοσης	230
42.5	Υπολογισμός <i>IRR</i>	230
42.6	Λυμένες Ασκήσεις	230
42.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	232
43	Ράντες	233
43.1	Ίσες Καταθέσεις	233
43.2	Ράντες	233
43.3	Παρούσα Αξία Ράντας	233
43.4	Χρεωλυσία	234
43.5	Γενική Παρατήρηση	234
43.6	Λυμένες Ασκήσεις	234
43.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	237
44	Όρια Συναρτήσεων	239
44.1	Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων	239
44.2	Πλευρικά Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων	239
44.3	Ιδιότητες Ορίων	240
44.4	Κατ' Εκδοχήν Όρια	240
44.5	Ιδιότητες των Κατ' Εκδοχήν Ορίων	241
44.6	Όρια στο Άπειρο	241
44.7	Βασικά Όρια	242
44.8	Λυμένες Ασκήσεις	243
44.9	Ασκήσεις Προς Επίλυση	243
45	Συνέχεια Συναρτήσεων	245
45.1	Ορισμοί	245
45.2	Χαρακτηριστικές Συνεχείς Συναρτήσεις	245
45.3	Ιδιότητες	246
45.4	Βασικά Θεωρήματα	246
45.5	Λυμένες Ασκήσεις	247
45.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	248
46	Παράγωγοι – Βασικές Έννοιες	249
46.1	Το Πρόβλημα της Εφαπτομένης	249
46.2	Το Πρόβλημα της Μεταβολής	249
46.3	Ρυθμός Μεταβολής	250
46.4	Παράγωγοι Ειδικών Συναρτήσεων	250
46.5	Βασικές Ιδιότητες και Θεωρήματα	250
46.6	Λυμένες Ασκήσεις	250
46.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	253
47	Παραγωγή Συνθέτων Συναρτήσεων	257
47.1	Ο Κανών της Αλυσίδος	257
47.2	Λυμένες Ασκήσεις	257
47.3	Ασκήσεις Προς Επίλυση	259
48	Παράγωγοι Ανωτέρας Τάξεως	261
48.1	Ο Τύπος του <i>Leibnitz</i>	261
48.2	Λυμένες Ασκήσεις	262
48.3	Ασκήσεις Προς Επίλυση	263
49	Γεωμετρικές Έννοιες	265
49.1	Ορισμοί	265
49.2	Βασικοί Τύποι	265

49.3	Λυμένες Ασκήσεις	266
49.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	267
50	Η Μέθοδος <i>Newton – Raphson</i>	269
50.1	Ο Βασικός Τύπος	269
50.2	Γεωμετρική Ερμηνεία της Μεθόδου	269
50.3	Λυμένες Ασκήσεις	269
50.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	270
51	Μονοτονία Συναρτήσεων και Παράγωγοι	271
51.1	Λυμένες Ασκήσεις	271
51.2	Ασκήσεις Προς Επίλυση	271
52	Θεωρήματα Μέσης Τιμής	273
52.1	Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού	273
52.2	Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του <i>Rolle</i>	273
52.3	Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του <i>Cauchy</i>	273
52.4	Λυμένες Ασκήσεις	273
52.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	274
53	Κανόνες του <i>DeL'Hôpital</i>	275
53.1	Η Απροσδιόριστη Μορφή $0/0$	275
53.2	Η Απροσδιόριστη Μορφή $\pm\infty/\pm\infty$	275
53.3	Η Απροσδιόριστη Μορφή $0 \cdot (\pm\infty)$	276
53.4	Η Απροσδιόριστη Μορφή $(\pm\infty) + (\pm\infty)$	276
53.5	Η Απροσδιόριστη Μορφή $(\pm\infty)^{(\pm\infty)}$ ή 0^0	276
53.6	Λυμένες Ασκήσεις	276
53.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	278
54	Ασύμπτωτες Ευθείες	279
54.1	Βασικός Ορισμός	279
54.2	Κατακόρυφες Ασύμπτωτες	279
54.3	Οριζόντιες Ασύμπτωτες	279
54.4	Πλάγιες Ασύμπτωτες	279
54.5	Λυμένες Ασκήσεις	279
54.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	280
55	Η Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση II	283
55.1	Ο Αριθμός e	283
55.2	Ιδιότητες	283
55.3	Σημαντικές Εκθετικές Συναρτήσεις	283
	55.3.1 Συναρτήσεις Εκθετικής Μεγέθυνσης ή Φθίσης	283
	55.3.2 Η Συνάρτηση Μάθησης	284
	55.3.3 Η Λογιστική Συνάρτηση	284
	55.3.4 Η Συνάρτηση <i>Comptez</i>	284
55.4	Η Λογαριθμική Συνάρτηση	284
55.5	Ιδιότητες	284
55.6	Λυμένες Ασκήσεις	285
55.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	285
56	Οικονομικές Συναρτήσεις	287
56.1	Γενική Οικονομική Συνάρτηση	287
56.2	Η Συνάρτηση Παραγωγής	287
56.3	Η Συνάρτηση Κόστους	288
56.4	Η Συνάρτηση Ζήτησης	288

56.5	Η Συνάρτηση Προσφοράς	289
56.6	Σημείο Ισορροπίας	289
56.7	Η Συνάρτηση Εσόδων	289
56.8	Η Συνάρτηση Κέρδους	290
56.9	Βασικές Μακροοικονομικές Συναρτήσεις	290
56.10	Λυμένες Ασκήσεις	291
56.11	Ασκήσεις Προς Επίλυση	296
57	Ελαστικότητες	301
57.1	Ελαστικότητα Σημείου Πραγματικής Συνάρτησης	301
57.2	Βασικές Ιδιότητες	301
57.3	Ελαστικότητα επί Τόξου	302
57.4	Ποσοστιαία Μεταβολή	302
57.5	Βασικός Τύπος για την Ελαστικότητα	302
57.6	Λυμένες Ασκήσεις	302
57.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	304
58	Ελαστικότητες Οικονομικών Συναρτήσεων	307
58.1	Η Ελαστικότητα Σημείου Οικονομικών Συναρτήσεων	307
58.2	Ελαστικότητα Ζήτησης ως προς την Τιμή	307
58.3	Ελαστικότητα Ζήτησης Ως Προς Την Ποσότητα	307
	58.3.1 Κατηγοριοποίηση Ζήτησης ως προς την Ελαστικότητα	308
58.4	Ελαστικότητα Προσφοράς ως προς την Τιμή	308
58.5	Λυμένες Ασκήσεις	309
58.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	312
59	Ρυθμός Μεγέθυνσης	315
59.1	Ρυθμός Μεγέθυνσης	315
	59.1.1 Ιδιότητες του Ρυθμού Μεγέθυνσης	315
59.2	Λυμένες Ασκήσεις	315
59.3	Ασκήσεις Προς Επίλυση	316
60	Το Διαφορικό	317
60.1	Διαφορικό Πρώτης Τάξεως	317
60.2	Ιδιότητες Διαφορικών	317
60.3	Γεωμετρική Ερμηνεία του Διαφορικού	317
60.4	Διαφορικά Ανωτέρας Τάξεως	318
60.5	Σφάλματα	318
60.6	Λυμένες Ασκήσεις	318
60.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	322
61	Πεπλεγμένες Συναρτήσεις	325
61.1	Ορισμός Πεπλεγμένης Συνάρτησης	325
61.2	Παραγωγή Πεπλεγμένων Συναρτήσεων	325
61.3	Παραγωγή Εκθετικών Μορφών	325
61.4	Οριακοί Λόγοι Υποκατάστασης	326
61.5	Λυμένες Ασκήσεις	326
61.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	329
62	Παραγωγή Αντιστρόφων Συναρτήσεων	335
62.1	Παραγωγή Αντιστρόφων Τριγωνομετρικών	335
62.2	Λυμένες Ασκήσεις	335
62.3	Ασκήσεις Προς Επίλυση	337
63	Παραγωγή Παραμετρικών Συναρτήσεων	339

63.1	Παραμετρικές Εξισώσεις	339
63.2	Παράγωγος Παραμετρικής Συνάρτησης	339
63.3	Λυμένες Ασκήσεις	339
63.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	342
64	Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις	343
64.1	Γεωμετρικοί Ορισμοί με Ευθύγραμμο Τμήματα	343
64.2	Γεωμετρικοί Ορισμοί με Εφαπτομένες	343
64.3	Αλγεβρικοί Ορισμοί	344
64.4	Ορισμοί με την Πρώτη Παράγωγο	345
64.5	Θεωρήματα με τη Δεύτερη Παράγωγο	346
64.6	Βασικές Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις	346
64.7	Ιδιότητες	346
64.8	Η Ανισότητα του <i>Jensen</i>	347
64.9	Σημεία Καμπής	347
64.10	Λυμένες Ασκήσεις	348
64.11	Ασκήσεις Προς Επίλυση	351
65	Μέγιστα και Ελάχιστα	355
65.1	Το Κριτήριο της Μονοτονίας	355
65.2	Το Κριτήριο της Δευτέρας Παραγώγου (<i>Fermat</i>)	355
65.3	Το Κριτήριο της n -οστής Παραγώγου	355
65.4	Ολικά Ακρότατα και Κυρτότητα - Κοιλότητα	356
65.5	Λυμένες Ασκήσεις	356
65.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	366
66	Σειρές Συναρτήσεων	373
66.1	Σειρές <i>Taylor</i>	373
66.2	Σειρές <i>MacLaurin</i>	373
66.3	Ο Τύπος του Διωνύμου	374
66.4	Λυμένες Ασκήσεις	374
66.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	379
67	Μελέτη Συναρτήσεως	383
67.1	Λυμένες Ασκήσεις	383
67.2	Ασκήσεις Προς Επίλυση	386
68	Το Αόριστο Ολοκλήρωμα	387
68.1	Ορισμός	387
68.2	Βασικές Προτάσεις	387
68.3	Η Σταθερά της Ολοκλήρωσης	387
68.4	Στοιχειώδη Αόριστα Ολοκληρώματα	387
68.5	Βασικές Ιδιότητες	388
68.6	Λυμένες Ασκήσεις	388
68.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση	389
69	Ολοκλήρωση Με Την Μέθοδο Των Προσδιοριστέων Συντελεστών	391
69.1	Η Μέθοδος	391
69.2	Λυμένες Ασκήσεις	391
69.3	Ασκήσεις Προς Επίλυση	393
70	Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση	395
70.1	Λυμένες Ασκήσεις	395
70.2	Ασκήσεις Προς Επίλυση	398

71 Ολοκληρώματα μέσω της τοξοφρα	399
71.1 Λυμένες Ασκήσεις	399
71.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση	401
72 Παραγοντική Ολοκλήρωση	403
72.1 Ο Βασικός Τύπος	403
72.2 Εμπειρικοί Κανόνες	403
72.3 Λυμένες Ασκήσεις	403
72.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση	409
73 Αναγωγικοί Τύποι	411
73.1 Γενικά	411
73.2 Τριγωνομετρικοί Αναγωγικοί Τύποι	411
73.3 Αναγωγικός Τύπος Ρητής Ολοκλήρωσης	411
73.4 Λυμένες Ασκήσεις	411
73.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση	416
74 Ανάλυση σε Άθροισμα Απλών Κλασμάτων	417
74.1 Γενικά	417
74.2 Ανάλυση σε Απλά Κλάσματα	417
74.3 Τύποι Ανάλυσης σε Απλά Κλάσματα	417
74.4 Προσδιορισμός των σταθερών	418
74.5 Λυμένες Ασκήσεις	418
74.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση	423
75 Βασικά Ρητά Ολοκληρώματα	425
75.1 Γενικά	425
75.2 Το Ολοκλήρωμα O_1	425
75.3 Το Ολοκλήρωμα O_2	425
75.4 Το Ολοκλήρωμα O_3	425
75.5 Το Ολοκλήρωμα O_4	426
75.6 Το Ολοκλήρωμα O_5	426
75.7 Το Ολοκλήρωμα O_6	426
75.8 Λυμένες Ασκήσεις	426
75.9 Ασκήσεις Προς Επίλυση	431
76 Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων	433
76.1 Γενικά	433
76.2 Η Μέθοδος	433
76.3 Λυμένες Ασκήσεις	433
76.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση	436
77 Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων	437
77.1 Γενικά	437
77.2 Τριγωνομετρικά Γινόμενα	437
77.3 Ολοκλήρωση Περιττών Δυνάμεων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων	437
77.4 Ολοκλήρωση Αρτίων Δυνάμεων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων	438
77.5 Ολοκληρώματα Γινομένων Δυνάμεων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων	438
77.6 Ολοκληρώματα Πηλίκων Δυνάμεων Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων	438
77.7 Γενικός Τρόπος Ολοκλήρωσης Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων	439
77.8 Λυμένες Ασκήσεις	439
77.9 Ασκήσεις Προς Επίλυση	443
78 Ολοκλήρωση Αρρήτων Συναρτήσεων I	445
78.1 Ένα Πρωτοβάθμιο Υπόριζο	445

78.2	Πολλά Πρωτοβάθμια Υπόρριζα	445
78.3	Πολλά Απλά Υπόρριζα	445
78.4	Λυμένες Ασκήσεις	446
78.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	447
79	Ολοκλήρωση Αρρήτων Συναρτήσεων II	449
79.1	Τριγωνομετρική Αντικατάσταση	449
79.2	Οι Μετασχηματισμοί του <i>Euler</i>	449
79.3	Λυμένες Ασκήσεις	450
79.4	Ασκήσεις Προς Επίλυση	452
80	Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα	453
80.1	Ορισμός	453
80.2	Βασικά Θεωρήματα	453
80.3	Βασικές Ιδιότητες	454
80.4	Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού	455
80.5	Λυμένες Ασκήσεις	455
80.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	461
81	Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού	465
81.1	Το Θεώρημα της Μέσης Τιμής	465
81.2	Μέση Τιμή Συνάρτησης	465
81.3	Γεωμετρική Ερμηνεία της Μέσης Τιμής	465
81.4	Στατιστική Ερμηνεία της Μέσης Τιμής	465
81.5	Λυμένες Ασκήσεις	466
81.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση	466
82	Παραγωγή Ολοκληρωμάτων	467
82.1	Το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού	467
82.2	Ο Τύπος του <i>Leibnitz</i>	467
82.3	Ο Γενικευμένος Τύπος του <i>Leibnitz</i>	467
82.4	Λυμένες Ασκήσεις	467
82.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση	470
83	Γενικευμένα Ολοκληρώματα «Πρώτου» Είδους	475
83.1	Μορφή I	475
83.2	Μορφή II	475
83.3	Μορφή III	475
83.4	Κριτήρια Σύγκλισης	476
83.5	Παραγωγή και Ολοκλήρωση Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων	477
83.6	Σειρές και Γενικευμένα Ολοκληρώματα	477
83.7	Η Συνάρτηση Γάμμα	477
83.8	Ο Μετασχηματισμός <i>Laplace</i>	478
83.9	Λυμένες Ασκήσεις	478
83.10	Ασκήσεις Προς Επίλυση	492
84	Γεωμετρικές Εφαρμογές των Ολοκληρωμάτων	499
84.1	Υπολογισμός Εμβαδών	499
84.1.1	Καρτεσιανά Εμβαδά Ως Προς Τον Άξονα Των x	499
84.1.2	Καρτεσιανά Εμβαδά Ως Προς Τον Άξονα Των y	500
84.1.3	Παραμετρικό Εμβαδόν	502
84.1.4	«Άπειρα» Εμβαδά	502
84.1.5	Πολικά Εμβαδά	502
84.2	Μήκος Τόξου	502
84.2.1	Καρτεσιανές Συντεταγμένες	503

	21
84.2.2 Πολικές Συντεταγμένες	503
84.3 Λυμένες Ασκήσεις	503
84.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση	511
85 Εφαρμογές των Ολοκληρωμάτων σε Οικονομικά Προβλήματα	515
85.1 Οριακά Μεγέθη και Ρυθμοί Μεταβολής	515
85.2 Πλεόνασμα Καταναλωτή και Πλεόνασμα Παραγωγού	515
85.3 Παρούσες Αξίες	517
85.3.1 Παρούσα Αξία Συνεχούς Χρηματικής Ροής	517
85.3.2 Παρούσα Αξία Αενάου Ροής	517
85.3.3 Παρούσα Αξία σε Δεδομένη Χρονική Στιγμή	517
85.4 Κατανομή Εισοδήματος	517
85.4.1 Ορισμοί	517
85.4.2 Βασικοί Τύποι	518
85.5 Συνεχείς Κατανομές	518
85.5.1 Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας	518
85.5.2 Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής	518
85.5.3 Παράμετροι Συνεχών Κατανομών	518
85.5.4 Ροπογεννήτριες	519
85.5.5 Διάμεσος Κατανομής	519
85.6 Λυμένες Ασκήσεις	519
85.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση	531
Βιβλιογραφία	535
Ευρετήριο	537