Κεφάλαιο 65

Μέγιστα και Ελάχιστα

65.1 Το Κριτήριο της Μονοτονίας

Τα παρακάτω θεωρήματα μας επιτρέπουν να εντοπίζουμε τοπικά μέγιστα και ελάχιστα με τη βοήθεια της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 65.1 *Εάν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x_0 και όχι κατ' ανάγκη στο x_0 αλλά συνεχής στο x_0 και $f'(x) > 0$ για $x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x > x_0$ τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.*

Θεώρημα 65.2 *Εάν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x_0 και όχι κατ' ανάγκη στο x_0 αλλά συνεχής στο x_0 και $f'(x) < 0$ για $x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x > x_0$ τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.*

65.2 Το Κριτήριο της Δευτέρας Παραγώγου ($Fermat$)

Θεώρημα 65.3 *Έστω συνάρτηση $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η $f(x)$ είναι διπλά παραγωγίσιμη. Εάν*

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0}$$

τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Εάν

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} < 0}$$

τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Στην περίπτωση που $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} = 0$ το θεώρημα δεν δίδει απάντηση.

65.3 Το Κριτήριο της ν-οστής Παραγώγου

Το επόμενο θεώρημα απαντάει πλήρως στο ερώτημα ανεύρεσης των σημείων τοπικού μεγίστου – ελαχίστου.

Θεώρημα 65.4 *Έστω συνάρτηση $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων. Το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, εάν και μόνον εάν:*

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} = 0, \ldots, \left(\frac{d^{\nu-1}f}{dx^{\nu-1}}\right)_{x=x_0} = 0}$$

$$\boxed{\text{και} \quad \left(\frac{d^{\nu}f}{dx^{\nu}}\right)_{x=x_0} > 0 \quad \text{με} \quad \nu \quad \text{άρτιο}}$$

Το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου, εάν και μόνον εάν:

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}=0,\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0}=0,\ldots,\left(\frac{d^{\nu-1}f}{dx^{\nu-1}}\right)_{x=x_0}=0}$$

$$\boxed{\text{και}\quad\left(\frac{d^{\nu}f}{dx^{\nu}}\right)_{x=x_0}<0\quad\text{με}\quad\nu\quad\text{άρτιο}}$$

Το x_0 είναι σημείο καμπής, εάν και μόνον εάν:

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}=0,\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0}=0,\ldots,\left(\frac{d^{\nu-1}f}{dx^{\nu-1}}\right)_{x=x_0}=0}$$

$$\boxed{\text{και}\quad\left(\frac{d^{\nu}f}{dx^{\nu}}\right)_{x=x_0}\neq 0\quad\text{με}\quad\nu\quad\text{περιττό}}$$

65.4 Ολικά Ακρότατα και Κυρτότητα – Κοιλότητα

Η κυρτότητα – κοιλότητα είναι ένα χρησιμότατο εργαλείο για τον εντοπισμό ολικών ακροτάτων. Σχετικά είναι τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 65.5 *Έστω f πραγματική συνάρτηση, κοίλη σε ένα διάστημα $[a,b]$. Έστω $x_0 \in (a,b)$ έτσι ώστε $f'(x_0)=0$ τότε το x_0 είναι σημείο ολικού μεγίστου στο $[a,b]$.*

Θεώρημα 65.6 *Έστω f πραγματική συνάρτηση, κυρτή σε ένα διάστημα $[a,b]$. Έστω $x_0 \in (a,b)$ έτσι ώστε $f'(x_0)=0$ τότε το x_0 είναι σημείο ολικού ελαχίστου στο $[a,b]$.*

65.5 Λυμένες Ασκήσεις

65.1 Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=|x|$.

Λύση: Η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$$

και η παράγωγός της είναι

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

Επομένως, η συνάρτηση παρουσιάζει στο 0 τοπικό ελάχιστο (το οποίο εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι και ολικό ελάχιστο), παρότι η $f'(0)$ δεν υπάρχει.

65.2 Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x^{2/3}(x-3)$.

Λύση: Η παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x)=\frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Παρατηρούμε ότι αυτή δεν ορίζεται για $x=0$ και επομένως, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το κριτήριο του $Fermat$. Μελετώντας όμως τη μονοτονία της συνάρτησης, έχουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $(-\infty,0)$, φθίνουσα στο $\left(0,\frac{6}{5}\right)$ και αύξουσα στο $\left(\frac{6}{5},+\infty\right)$. Επειδή η f είναι και συνεχής, έπεται ότι στο 0 έχουμε τοπικό μέγιστο και στο $\frac{6}{5}$ τοπικό ελάχιστο.

65.3 Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = (3-x)^6$.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της ν-οστής παραγώγου. Κατ᾽ αρχάς $f'(x) = -6(3-x)^5$, η οποία μηδενίζεται για $x = 3$. Ακόμα έχουμε

$$f''(x) = 30(3-x)^4 \Rightarrow f''(3) = 0$$

$$f'''(x) = -120(3-x)^3 \Rightarrow f'''(3) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 360(3-x)^2 \Rightarrow f^{(4)}(3) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = -720(3-x) \Rightarrow f^{(5)}(3) = 0$$

$$f^{(6)}(x) = 720 \Rightarrow f^{(6)}(3) > 0$$

και επομένως, έχουμε τοπικό ελάχιστο.

65.4 Έστωσαν f και g δύο συναρτήσεις συνεχείς και παραγωγίσιμες με την ιδιότητα $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$. Να αποδειχθεί ότι εάν οι f και g παρουσιάζουν στο x_0 τοπικό ελάχιστο και $f''(x_0) \neq 0$, $g''(x_0) \neq 0$ τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Λύση: Αφού στο x_0 έχουμε τοπικό ελάχιστο και $f''(x_0) \neq 0$, $g''(x_0) \neq 0$ ισχύει: $f'(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0, g''(x_0) > 0$. Για τη συνάρτηση $f \cdot g$ έχουμε

$$[f \cdot g]'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = 0$$

και

$$[f \cdot g]''(x_0) = f''(x_0)g(x_0) + 2f'(x_0)g'(x_0) + f(x_0)g''(x_0) =$$

$$= f''(x_0)g(x_0) + f(x_0)g''(x_0) > 0$$

αφού $g''(x_0) > 0, f''(x_0) > 0$. Άρα στο x_0 έχουμε τοπικό ελάχιστο για τη $f \cdot g$.

65.5 Η συνάρτηση κόστους ενός προϊόντος είναι $C(q) = 40q + 20000$ και η συνάρτηση τιμής

$$p(q) = 160 - \frac{q}{100},$$

όπου q οι παραγόμενες μονάδες. Βρείτε το q που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Λύση: Ισχύει η βασική οικονομική εξίσωση:

$$\text{Κέρδος} = \text{Έσοδα} - \text{Κόστος}$$

Μεταφράζοντας αυτήν τη σχέση μαθηματικά, έχουμε:

$$P(q) = R(q) - C(q) = p \cdot q - C(q) =$$

$$= 160q - \frac{q^2}{100} - 40 \cdot q - 20000$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$\frac{dP}{dq} = 120 - \frac{q}{50}$$

και επομένως, ένα υποψήφιο για ακρότατο σημείο βρίσκεται από τη σχέση:

$$120 - \frac{q}{50} = 0 \Rightarrow q = 6000$$

Επειδή δε $\frac{d^2P}{dq^2} = -\frac{1}{50} < 0$ έπεται ότι η τιμή $q = 6000$ αποτελεί τοπικό μέγιστο. Επιπλέον, αφού $\frac{d^2P}{dq^2} =< 0$ για κάθε q στο πεδίο ορισμού, η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη και άρα στο $q = 6000$ έχουμε και ολικό μέγιστο.

65.6 Δίνεται η συνάρτηση των ολικών εσόδων μιας επιχείρησης:

$$TR(Q) = -Q^3 + 38Q^2 - 30Q$$

όπου Q είναι η ποσότητα προϊόντος που διατίθεται στην αγορά.

(α) Να προσδιορισθεί η ποσότητα στην οποία η συνάρτηση των μέσων εσόδων έχει τοπικό ακρότατο.

(β) Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα μέσα έσοδα η ελαστικότητα των ολικών εσόδων ισούται με την μονάδα.

Λύση: (α) Η συνάρτηση των μέσων εσόδων είναι:

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} = \frac{-Q^3 + 38Q^2 - 30Q}{Q} = -Q^2 + 38Q - 30$$

Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο μηδενισμού της πρώτης της παραγώγου:

$$\begin{aligned} AR'(Q) &= \left(-Q^2 + 38Q - 30\right)' = -2Q + 38 \\ -2Q + 38 &= 0 \Leftrightarrow Q = 19 \end{aligned}$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι: $AR''(Q) = -2 < 0$, για κάθε Q, επομένως η συνάρτηση είναι κοίλη και άρα έχουμε, για $Q = 19$, ολικό μέγιστο.

(β) Η ελαστικότητα των ολικών εσόδων είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{TR}(Q) &= \frac{Q}{TR(Q)} TR'(Q) = \frac{Q}{-Q^3 + 38Q^2 - 30Q} \left(-Q^3 + 38Q^2 - 30Q\right)' = \\ &= \frac{1}{-Q^2 + 38Q - 30} \left(-3Q^2 + 76Q - 30\right) = \frac{-3Q^2 + 76Q - 30}{-Q^2 + 38Q - 30} \end{aligned}$$

Για $Q = 19$, έχουμε:

$$\frac{-3Q^2 + 76Q - 30}{-Q^2 + 38Q - 30} = \frac{-3 \cdot 19^2 + 76 \cdot 19 - 30}{-19^2 + 38 \cdot 19 - 30} = \frac{331}{331} = 1$$

65.7 Έστωσαν $C(x), R(x)$ οι συναρτήσεις κόστους και εσόδων μίας παραγομένης ποσότητος x. Δείξατε ότι η ποσότητα x_0, που μεγιστοποιεί το μέσο κέρδος, καθιστά το μέσο κέρδος ίσο με το οριακό.

Λύση: Η συνάρτηση κέρδους είναι $P(x) = R(x) - C(x)$, ενώ η συνάρτηση μέσου κέρδους είναι

$$AP(x) = \frac{P(x)}{x} = \frac{R(x) - C(x)}{x}$$

Εάν x_0 είναι η ποσότητα που μεγιστοποιεί το μέσο κέρδος τότε

$$\frac{dAP(x_0)}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\dfrac{dR(x_0)}{dx} - \dfrac{dC(x_0)}{dx}\right] x_0 - [R(x_0) - C(x_0)]}{x_0^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dR(x_0)}{dx} - \frac{dC(x_0)}{dx} = \frac{R(x_0) - C(x_0)}{x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dP(x_0)}{dx} = AP(x_0)$$

65.8 Σε μία εταιρεία που προωθεί προϊόντα, οι κάτωθι παράμετροι περιγράφουν τη διαδικασία αποθήκευσης προϊόντων: V η ετήσια ποσότητα πωλήσεων, q η ποσότητα προϊόντος ανά παραγγελία, b το κόστος εκτέλεσης παραγγελίας, a το σταθερό κόστος, p το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα και i το επιτόκιο αποθήκευσης. Να βρεθεί η ποσότητα q που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος, όταν η μέση αποθήκευση είναι $\frac{q}{2}$.

Λύση: Το σύνολο των παραγγελιών που γίνονται δίδεται από τη σχέση $\frac{V}{q}$ και επομένως, το κόστος τους είναι $\frac{V}{q} \cdot b$. Το κόστος της συνολικής αποθήκευσης είναι $\frac{ipq}{2}$. Επομένως, το συνολικό κόστος δίδεται από τη σχέση:

$$C(q) = a + \frac{ipq}{2} + \frac{V}{q} \cdot b$$

Για να βρούμε το υποψήφιο για ακρότατο σημείο, λύνουμε την εξίσωση

$$\frac{dC}{dq} = 0 \Rightarrow -\frac{bV}{q^2} + \frac{ip}{2} = 0$$

και έχουμε

$$q = \sqrt{\frac{2bV}{ip}}$$

Επειδή δε,

$$\frac{d^2C}{dq^2} = \frac{2bV}{q^3} > 0,$$

έπεται ότι η παραπάνω ποσότητα ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους και άρα είναι η ζητουμένη.

65.9 Ένα οικονομικό μέγεθος ανατοκιζόμενο συνεχώς με επιτόκιο r γίνεται μετά από χρόνο t, $A(t)$. Εάν t^* είναι ο χρόνος που μεγιστοποιεί την παρούσα αξία του μεγέθους, δείξατε ότι:

$$\frac{A'(t^*)}{A(t^*)} = r \textbf{ και } \frac{A''(t^*)}{A(t^*)} < r^2$$

Λύση: Η παρούσα αξία δίδεται από τον τύπο $V(t) = A(t)e^{-rt}$. Μεγιστοποιώντας ως προς t, έχουμε:

$$\frac{dV(t^*)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2V(t^*)}{dt^2} < 0$$

όπου t^* η χρονική στιγμή που παρουσιάζεται το μέγιστο. Από την πρώτη σχέση έχουμε:

$$\frac{dV(t^*)}{dt} = 0 \Rightarrow A'(t^*)e^{-rt^*} - rA(t^*)e^{-rt^*} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A'(t^*)}{A(t^*)} = r$$

Από τη δεύτερη σχέση έχουμε:

$$\frac{d^2V(t^*)}{dt^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A''(t^*)e^{-rt^*} - rA'(t^*)e^{-rt^*} - rA'(t^*)e^{-rt^*} + r^2A(t^*)e^{-rt^*} < 0$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη σχέση, έχουμε:

$$A''(t^*)e^{-rt^*} - r[A(t^*)r]e^{-rt^*} - r[A(t^*)r]e^{-rt^*} + r^2A(t^*)e^{-rt^*} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A''(t^*)}{A(t^*)} < r^2$$

65.10 Το έσοδο από την υλοτόμηση ενός δάσους, σε τρέχουσες τιμές είναι $R(t) = \lambda e^{\sqrt{t}}, \lambda > 0$. Αν υπάρχει ένας συνεχής πληθωρισμός r βρείτε τη χρονική στιγμή t^* που μεγιστοποιεί την παρούσα αξία του εσόδου.

Λύση: Ζητάμε να μεγιστοποιήσουμε την παρούσα αξία του εσόδου. Αυτή δίδεται από τον τύπο:

$$V(t) = R(t)e^{-rt} = \lambda e^{\sqrt{t}} e^{-rt} = \lambda e^{\sqrt{t} - rt}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του $Fermat$. Διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \lambda e^{\sqrt{t} - rt} \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} - r \right) = 0$$

αφού το πρώτο μέρος είναι διάφορο του μηδενός, έπεται ότι:

$$\left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} - r \right) = 0 \Rightarrow t^* = \frac{1}{4r^2}$$

ακόμα έχουμε για τη δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d}{dt}[\lambda e^{\sqrt{t} - rt}] \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} - r \right) + \lambda e^{\sqrt{t} - rt} \left(-\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} \right)$$

και θέτοντας $t = t^*$, έχουμε:

$$\frac{d^2V}{dt^2} = 0 + \lambda e^{\sqrt{t^*} - rt^*} \left(-\frac{1}{4} t^{* - \frac{3}{2}} \right) < 0$$

και επομένως, έχουμε μέγιστο για $t = t^*$.

65.11 Η συνάρτηση ενός οικονομικού μεγέθους έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που η ελαστικότητα του αντιστοίχου μέσου μεγέθους ισούται με -1.

Λύση: Έστω $f(x)$ ένα οικονομικό μέγεθος. Έστω ακόμα ότι αυτό παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$. Το αντίστοιχο μέσο μέγεθος είναι $Af(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ και η ελαστικότητά του:

$$\varepsilon_{Af}(x) = \frac{\dfrac{dAf}{dx}}{\dfrac{Af(x)}{x}} = \frac{\dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}}{\dfrac{f(x)}{x^2}} =$$

$$= \frac{f'(x)x - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)x}{f(x)} - 1$$

Αντικαθιστώντας για $x = x_0$ έχουμε,

$$\varepsilon_{Af}(x_0) = \frac{f'(x_0)x_0}{f(x_0)} - 1 = 0 - 1 = -1$$

αφού, $f'(x_0) = 0$.

65.12 Σε μία αγορά πλήρους ανταγωνισμού, οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς είναι:

$$D(p) = 4 - 5p \quad , \quad S(p) = -7 + 10p$$

Αν η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία m ευρώ ανά μονάδα πωλουμένου προϊόντος, να υπολογισθεί:

α) Η τιμή της m που μεγιστοποιεί τα ολικά έσοδα από τη φορολογία.

β) Η μείωση λόγω φόρου της προσφερομένης ποσότητος.

Υποθέτουμε ότι όλη η φορολογία θα επιβαρύνει μόνον τον παραγωγό.

Λύση: α) Αν η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία m ευρώ σε κάθε μονάδα που πωλείται τότε η τιμή που θα εισπράττουν οι προμηθευτές γίνεται $p - m$ και η συνάρτηση προσφοράς $S(p) = -7 + 10(p - m)$. Αφού η αγορά λειτουργεί σε πλήρη ανταγωνισμό, η τιμή που θα διαμορφώνεται προκύπτει από το σημείο ισορροπίας p^*, όπου,

$$D(p^*) = S(p^*) \text{ ή } 4 - 5p^* = -7 + 10(p^* - m) \text{ ή } p^* = \frac{11 + 10m}{15}$$

Οι ολικές εισπράξεις από τη φορολογία θα είναι

$$T(m) = mS(p^*) = m\left(-7 + 10 \cdot \left(\frac{11 + 10m}{15} - m\right)\right)$$

Ζητάμε m^* έτσι ώστε τα φορολογικά έσοδα να γίνονται μέγιστα. Θα πρέπει

$$\left(\frac{dT}{dm}\right)_{m=m^*} = 0 \text{ και } \left(\frac{d^2T}{dm^2}\right)_{m=m^*} < 0$$

Αλλά

$$\left(\frac{dT}{dm}\right)_{m=m^*} = 0 \Rightarrow \frac{1 - 20m}{3} = 0 \Rightarrow m^* = \frac{1}{20}$$

και

$$\left(\frac{d^2T}{dm^2}\right)_{m=m^*} = -\frac{20}{3} < 0$$

οπότε, για $m^* = \frac{1}{20}$, έχουμε τα μέγιστα φορολογικά έσοδα.

β) Η προσφερομένη πριν τη φορολογία ποσότητα είναι: $S = -7 + 10p$, όπου p είναι το σημείο ισορροπίας πριν τη φορολογία, δηλαδή

$$D(p) = S(p) \Rightarrow 4 - 5p = -7 + 10p \Rightarrow p = \frac{11}{15}$$

Επομένως,

$$S = -7 + 10 \cdot \frac{11}{15} = \frac{1}{3}.$$

Η προσφερομένη ποσότητα μετά τη φορολογία είναι:

$$S_T = -7 + 10 \cdot \left(\frac{11 + 10 \cdot \frac{1}{20}}{15} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{6}$$

Άρα, η ποσότητα που χάνεται λόγω φορολογίας είναι: $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

65.13 Μέχρι πρόσφατα το χάμπουργκερ στα γήπεδα στοίχιζε 2 ευρώ. Το κυλικείο πουλούσε κατά μέσο όρο 10000 χάμπουργκερ σε κάθε παιχνίδι. Όταν η τιμή ανέβαινε στα 2.4 οι πωλήσεις έπεφταν κατά μέσο όρο στα 8000 χάμπουργκερ ανά παιχνίδι. Το κυλικείο έχει σταθερό κόστος 1000 ευρώ ανά παιχνίδι και μεταβλητό κόστος 0.6 ευρώ για κάθε χάμπουργκερ. Υποθέτοντας ότι η καμπύλη ζήτησης είναι γραμμική, βρείτε την τιμή του χάμπουργκερ που μεγιστοποιεί το κέρδος ανά παιχνίδι.

Λύση: Αφού η ζήτηση είναι γραμμική, έχει τον τύπο $q = D(p) = ap + b$. Θα προσδιορίσουμε τις παραμέτρους a και b. Αντικαθιστώντας τις τιμές των χάμπουργκερ και τις αντίστοιχες ζητήσεις έχουμε:

$$10000 = 2a + b$$

$$8000 = 2.4a + b$$

από όπου $a = -5000$ και $b = 20000$. Άρα η συνάρτηση ζήτησης είναι $D(p) = -5000p + 20000$. Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi(p) = R(p) - C(p) = pq - (0.6q + 1000) =$$

$$= p(-5000p + 20000) - (0.6(-5000p + 20000) + 1000) =$$

$$= -13000 + 23000p - 5000p^2$$

και επομένως

$$\frac{d\Pi}{dp} = 0 \Rightarrow 23000 - 10000p = 0 \Rightarrow p = 2.3$$

και αφού $\frac{d^2\Pi}{dp^2} = -10000 < 0$, η παραπάνω τιμή είναι η ζητουμένη τιμή που μεγιστοποιεί το κέρδος.

65.14 Να βρεθεί η τιμή του m για την οποία η ευθεία $y = mx + 1$ αποτελεί την καλύτερη «παρεμβολή» για τα σημεία $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(6, 8)$.

Λύση: Το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων είναι

$$g(m) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - mx_i - 1)^2 =$$

$$= (3 - 2m - 1)^2 + (5 - 4m - 1)^2 + (8 - 6m - 1)^2$$

Ζητάμε m_0 έτσι ώστε η παραπάνω σχέση να γίνει ελαχίστη. Θα πρέπει

$$g'(m_0) = 0 \qquad , \qquad g''(m_0) > 0$$

αλλά

$$g'(m_0) = 112m - 124 = 0 \Rightarrow m_0 = \frac{124}{112}$$

και

$$g''(m_0) = 112 > 0$$

και επομένως, η $m_0 = \frac{124}{112}$ είναι η ζητουμένη τιμή.

65.15 Κάθε εβδομάδα, 1200 επιβάτες χρησιμοποιούν το τρένο αν το εισιτήριο είναι 2000 ευρώ. Κάθε μείωση του εισιτηρίου κατά 100 ευρώ αυξάνει τους επιβάτες κατά 100. Ποια είναι η τιμή του εισιτηρίου που μεγιστοποιεί τα έσοδα;

Λύση: Υποθέτουμε ότι η ζήτηση είναι γραμμική και έχει τον τύπο: $q = ap + b$. Θα προσδιορίσουμε τις παραμέτρους a και b. Όταν $p = 2000$ τότε $q = 1200$ και όταν $p = 1900$, $q = 1300$ και επομένως, έχουμε το σύστημα:

$$1200 = a \cdot 2000 + b$$

$$1300 = a \cdot 1900 + b$$

απ᾽ όπου έχουμε: $a = -1$ και $b = 3200$ και η συνάρτηση ζήτησης γίνεται $q = -p + 3200$. Τα έσοδα θα είναι

$$R(p) = p \cdot q = p \cdot (-p + 3200) = -p^2 + 3200p$$

Ακόμα

$$\frac{dR}{dp} = -2p + 3200 = 0 \Rightarrow p = 1600$$

και

$$\frac{d^2R}{dp^2} = -2 < 0$$

Επομένως, τιμή εισιτηρίου ίση με 1600 ευρώ μεγιστοποιεί τα έσοδα.

65.16 Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη και (x_0, y_0) σταθερό σημείο. Δείξατε ότι η ελαχίστη απόσταση, από το συγκεκριμένο σημείο μέχρι τη γραφική παράσταση της f, «υλοποιείται» επί της κανονικής ευθείας της f, η οποία διέρχεται από το (x_0, y_0).

Λύση: Έστω $(x, f(x))$ τυχαίο σημείο του γραφήματος της $f(x)$. Η απόστασή του από το σημείο (x_0, y_0) είναι:

$$d(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2}$$

Έστω ακόμα σημείο x^*, στο οποίο η παραπάνω απόσταση γίνεται ελαχίστη. Θα πρέπει $d'(x^*) = 0$ ή ισοδύναμα:

$$2(x^* - x_0) + 2(f(x^*) - y_0)f'(x^*) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x^*) = -\frac{x^* - x_0}{f(x^*) - y_0}$$

Η ευθεία τώρα που ορίζεται από τα σημεία (x_0, y_0) και $(x^*, f(x^*))$ έχει κλίση:

$$\lambda = \frac{f(x^*) - y_0}{x^* - x_0}$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση, εύκολα βλέπουμε ότι $\lambda \cdot f'(x^*) = -1$, και άρα η συγκεκριμένη ευθεία είναι η κανονική ευθεία από το (x_0, y_0) στο γράφημα της $f(x)$.

65.17 Ορίζουμε:

Q**: Η παραγόμενη ποσότητα ενός προϊόντος.**

$\Pi(Q)$**: Η συνάρτηση κέρδους.**

φ**: Ο συντελεστής φόρου, ανά μονάδα προϊόντος.**

Q^* **: Η παραγόμενη ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος.**

Δείξατε ότι:

a**)** $\dfrac{dQ^*}{d\varphi} < 0$

b**)** $\dfrac{d\Pi(Q^*)}{d\varphi} = -Q^*$

Λύση: Είναι προφανές ότι το κέρδος βρίσκεται εάν από τα έσοδα αφαιρέσουμε το κόστος και τη φορολογία. Επομένως:

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) - \varphi Q$$

Έστω ότι όταν η παραγόμενη ποσότητα γίνει Q^* τότε το κέρδος μεγιστοποιείται. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{d\Pi}{dQ}\right)_{Q=Q^*} = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{d^2\Pi}{dQ^2}\right)_{Q=Q^*} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} R'(Q^*) - C'(Q^*) - \varphi = 0 & (f1) \\[2ex] R''(Q^*) - C''(Q^*) < 0 & (f2) \end{array}$$

Ας απαντήσουμε τώρα στο ερώτημα a). Παραγωγίζοντας τη σχέση ($f1$), ως προς φ, έχουμε:

$$\frac{d}{d\varphi}[R'(Q^*) - C(Q^*) - \varphi] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dR'}{dQ^*} \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - \frac{dC'}{dQ^*} \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - \frac{d\varphi}{d\varphi} = 0 \Rightarrow$$

$$R''(Q^*) \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - C''(Q^*) \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - 1 = 0$$

Λυνοντας ως προς $\frac{dQ^*}{d\varphi}$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση ($f2$), έχουμε τελικά:

$$\frac{dQ^*}{d\varphi} = \frac{1}{R''(Q^*) - C''(Q^*)} < 0$$

Ας έρθουμε τώρα στο ερώτημα *b*). Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση κέρδους, ως προς φ, έχουμε:

$$\frac{d\Pi(Q^*)}{d\varphi} = \frac{dR(Q^*)}{d\varphi} - \frac{dC(Q^*)}{d\varphi} - \frac{d(\varphi Q^*)}{d\varphi} =$$

$$= \frac{dR}{dQ^*} \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - \frac{dC}{dQ^*} \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - Q^* - \varphi \frac{dQ^*}{d\varphi} =$$

$$= [R'(Q^*) - C'(Q^*)] \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - Q^* - \varphi \frac{dQ^*}{d\varphi} =$$

$$= [R'(Q^*) - C'(Q^*) - \varphi] \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - Q^*$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την $(f1)$, έχουμε τελικά:

$$\frac{d\Pi(Q^*)}{d\varphi} = -Q^*$$

65.18 Ένας καταναλωτής έχει τρέχον εισόδημα y_1 και αναμένει να γίνει μελλοντικά y_2. Σκοπεύει να καταναλώσει τώρα c_1 και στο μέλλον c_2. Εάν το επιτόκιο είναι r, βρείτε την κατανάλωση c_1 που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση χρησιμότητος:

$$U = \ln c_1 + \frac{1}{1+\delta} \ln c_2, \qquad \delta > 0$$

Λύση: Ο καταναλωτής έχει να αντιμετωπίσει δύο ενδεχόμενα. Είτε $c_1 > y_1$, οπότε χρειάζεται να δανειστεί είτε $c_1 < y_1$, οπότε μπορεί να αποταμιεύσει. Στην πρώτη περίπτωση, θα καταναλώσει στο μέλλον αυτά που θα του περισσέψουν από την αποπληρωμή του δανείου και επομένως

$$c_2 = y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)$$

στη δεύτερη περίπτωση, θα καταναλώσει αυτά που θα εισπράξει μαζί με τους τόκους από την αποταμίευση αυτών των χρημάτων, που του είχαν περισσέψει, και άρα:

$$c_2 = y_2 + (1+r)(y_1 - c_1)$$

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε τελικά:

$$c_2 = y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)$$

και η συνάρτηση χρησιμότητος γίνεται:

$$U = \ln c_1 + \frac{1}{1+\delta} \ln[y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)]$$

Έχουμε τώρα

$$\frac{dU}{dc_1} = \frac{1}{c_1} - \frac{1+r}{1+\delta} \cdot \frac{1}{y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)}$$

και άρα

$$\frac{dU}{dc_1} = 0 \Rightarrow c_1^* = \frac{(1+\delta)[(1+2)y_1 + y_2]}{(2+\delta)(1+r)}$$

Η δεύτερη παράγωγος μας δίνει:

$$\left(\frac{d^2U}{dc_1^2}\right)_{c_1 = c_1^*} = -\frac{(\delta+2)^3(r+1)^2}{(\delta+1)^2((r+1)y_1 + y_2)^2} < 0$$

και άρα στο c_1^* έχουμε το μέγιστο.