Κεφάλαιο 65

Μέγιστα και Ελάχιστα

65.1 Το Κριτήριο της Μονοτονίας

Τα παρακάτω θεωρήματα μας επιτρέπουν να εντοπίζουμε τοπικά μέγιστα και ελάχιστα με τη βοήθεια της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 65.1 *Εάν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x_0 και όχι κατάνάγκη στο x_0 αλλά συνεχής στο x_0 και $f'(x) > 0$ για $x < x_0$ και $f'(x) < 0$ για $x > x_0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.*

Θεώρημα 65.2 *Εάν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x_0 και όχι κατάνάγκη στο x_0 αλλά συνεχής στο x_0 και $f'(x) < 0$ για $x < x_0$ και $f'(x) > 0$ για $x > x_0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.*

65.2 Το Κριτήριο της Δευτέρας Παραγώγου. ($Fermat$)

Θεώρημα 65.3 *Έστω συνάρτηση $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η $f(x)$ είναι διπλά παραγωγίσιμη. Εάν*

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0}$$

τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Εάν

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} < 0}$$

τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Στην περίπτωση που $\left(\dfrac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} = 0$ το θεώρημα δεν δίδει απάντηση.

65.3 Το Κριτήριο της ν-οστής Παραγώγου

Το επόμενο θεώρημα απαντάει πλήρως στο ερώτημα ανεύρεσης των σημείων τοπικού μεγίστου – ελαχίστου.

Θεώρημα 65.4 *Έστω συνάρτηση $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η $f(x)$ έχει παραγώγους όλων των τάξεων. Το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, εάν και μόνον εάν:*

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} = 0, \dots, \left(\frac{d^{\nu-1}f}{dx^{\nu-1}}\right)_{x=x_0} = 0}$$

$$\boxed{\text{και} \quad \left(\frac{d^{\nu}f}{dx^{\nu}}\right)_{x=x_0} > 0 \quad \text{με} \quad \nu \quad \text{άρτιο}}$$

Το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου, εάν και μόνον εάν:

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} = 0, \ldots, \left(\frac{d^{\nu-1}f}{dx^{\nu-1}}\right)_{x=x_0} = 0}$$

$$\boxed{\textit{και} \quad \left(\frac{d^{\nu}f}{dx^{\nu}}\right)_{x=x_0} < 0 \quad \textit{με} \quad \nu \quad \textit{άρτιο}}$$

Το x_0 είναι σημείο καμπής, εάν και μόνον εάν:

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} = 0, \ldots, \left(\frac{d^{\nu-1}f}{dx^{\nu-1}}\right)_{x=x_0} = 0}$$

$$\boxed{\textit{και} \quad \left(\frac{d^{\nu}f}{dx^{\nu}}\right)_{x=x_0} \neq 0 \quad \textit{με} \quad \nu \quad \textit{περιττό}}$$

65.4 Ολικά Ακρότατα και Κυρτότητα – Κοιλότητα

Η κυρτότητα – κοιλότητα είναι ένα χρησιμότατο εργαλείο για τον εντοπισμό ολικών ακροτάτων. Σχετικά είναι τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 65.5 *Έστω f πραγματική συνάρτηση, κοίλη σε ένα διάστημα $[a, b]$. Έστω $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι σημείο ολικού μεγίστου στο $[a, b]$.*

Θεώρημα 65.6 *Έστω f πραγματική συνάρτηση, κυρτή σε ένα διάστημα $[a, b]$. Έστω $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι σημείο ολικού ελαχίστου στο $[a, b]$.*

65.5 Λυμένες Ασκήσεις

65.1 Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = |x|$.

Λύση: Η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

και η παράγωγός της είναι

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως, η συνάρτηση παρουσιάζει στο 0 τοπικό ελάχιστο (το οποίο εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι και ολικό ελάχιστο), παρότι η $f'(0)$ δεν υπάρχει.

65.2 Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x^{2/3}(x - 3)$.

Λύση: Η παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = \frac{5x - 6}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Παρατηρούμε ότι αυτή δεν ορίζεται για $x = 0$ και επομένως, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το κριτήριο του $Fermat$. Μελετώντας όμως τη μονοτονία της συνάρτησης, έχουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, φθίνουσα στο $\left(0, \frac{6}{5}\right)$ και αύξουσα στο $\left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$. Επειδή η f είναι και συνεχής, έπεται ότι στο 0 έχουμε τοπικό μέγιστο και στο $\frac{6}{5}$ τοπικό ελάχιστο.

65.3 Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = (3-x)^6$.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της ν-οστής παραγώγου. Κατ᾽ αρχάς $f'(x) = -6(3-x)^5$, η οποία μηδενίζεται για $x = 3$. Ακόμα έχουμε

$$f''(x) = 30(3-x)^4 \Rightarrow f''(3) = 0$$

$$f'''(x) = -120(3-x)^3 \Rightarrow f'''(3) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 360(3-x)^2 4 \Rightarrow f^{(4)}(3) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = -720(3-x) \Rightarrow f^{(5)}(3) = 0$$

$$f^{(6)}(x) = 720 \Rightarrow f^{(6)}(3) > 0$$

και επομένως, έχουμε τοπικό ελάχιστο.

65.4 Έστωσαν f και g δύο συναρτήσεις συνεχείς και παραγωγίσιμες με την ιδιότητα $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$. Να αποδειχθεί ότι εάν οι f και g παρουσιάζουν στο x_0 τοπικό ελάχιστο και $f''(x_0) \neq 0$, $g''(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Λύση: Αφού στο x_0 έχουμε τοπικό ελάχιστο και $f''(x_0) \neq 0$, $g''(x_0) \neq 0$, ισχύει: $f'(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0, g''(x_0) > 0$. Για τη συνάρτηση $f \cdot g$ έχουμε

$$[f \cdot g]'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = 0$$

και

$$[f \cdot g]''(x_0) = f''(x_0)g(x_0) + 2f'(x_0)g'(x_0) + f(x_0)g''(x_0) =$$
$$= f''(x_0)g(x_0) + f(x_0)g''(x_0) > 0$$

αφού $g''(x_0) > 0, f''(x_0) > 0$. Άρα στο x_0 έχουμε τοπικό ελάχιστο για τη $f \cdot g$.

65.5 Η συνάρτηση κόστους ενός προϊόντος είναι $C(q) = 40q + 20000$ και η συνάρτηση τιμής

$$p(q) = 160 - \frac{q}{100},$$

όπου q οι παραγόμενες μονάδες. Βρείτε το q που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Λύση: Ισχύει η βασική οικονομική εξίσωση:

$$\text{Κέρδος} = \text{Έσοδα} - \text{Κόστος}$$

Μεταφράζοντας αυτήν τη σχέση μαθηματικά, έχουμε:

$$P(q) = R(q) - C(q) = p \cdot q - C(q) =$$

$$= 160q - \frac{q^2}{100} - 40 \cdot q - 20000$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$\frac{dP}{dq} = 120 - \frac{q}{50}$$

και επομένως, ένα υποψήφιο για ακρότατο σημείο βρίσκεται από τη σχέση:

$$120 - \frac{q}{50} = 0 \Rightarrow q = 6000$$

Επειδή δε $\frac{d^2P}{dq^2} = -\frac{1}{50} < 0$ έπεται ότι η τιμή $q = 6000$ αποτελεί τοπικό μέγιστο.

65.6 Δίνεται η συνάρτηση των ολικών εσόδων μιας επιχείρησης:

$$TR(Q) = -Q^3 + 38Q^2 - 30Q$$

όπου Q είναι η ποσότητα προϊόντος που διατίθεται στην αγορά.

(α) Να προσδιορισθεί η ποσότητα στην οποία η συνάρτηση των μέσων εσόδων έχει τοπικό ακρότατο.

(β) Να επιβεβαιωθεί ότι στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα μέσα έσοδα η ελαστικότητα των ολικών εσόδων ισούται με την μονάδα.

Λύση: (α) Η συνάρτηση των μέσων εσόδων είναι:

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} = \frac{-Q^3 + 38Q^2 - 30Q}{Q} = -Q^2 + 38Q - 30$$

Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο μηδενισμού της πρώτης της παραγώγου:

$$AR'(Q) = \left(-Q^2 + 38Q - 30\right)' = -2Q + 38$$
$$-2Q + 38 = 0 \Leftrightarrow Q = 19$$

Η δεύερη παράγωγος είναι: $AR''(Q) = -2 < 0$, για κάθε Q, επομένως η συνάρτηση είναι κοίλη και άρα έχουμε, για $Q = 19$, ολικό μέγιστο.

(β) Η ελαστικότητα των ολικών εσόδων είναι:

$$\varepsilon_{TR}(Q) = \frac{Q}{TR(Q)} TR'(Q) = \frac{Q}{-Q^3 + 38Q^2 - 30Q}\left(-Q^3 + 38Q^2 - 30Q\right)' =$$
$$= \frac{1}{-Q^2 + 38Q - 30}\left(-3Q^2 + 76Q - 30\right) = \frac{-3Q^2 + 76Q - 30}{-Q^2 + 38Q - 30}$$

Για $Q = 19$, έχουμε:

$$\frac{-3Q^2 + 76Q - 30}{-Q^2 + 38Q - 30} = \frac{-3 \cdot 19^2 + 76 \cdot 19 - 30}{-19^2 + 38 \cdot 19 - 30} = \frac{331}{331} = 1$$

65.7 Έστωσαν $C(x), R(x)$ οι συναρτήσεις κόστους και εσόδων μίας παραγομένης ποσότητος x. Δείξατε ότι η ποσότητα x_0, που μεγιστοποιεί το μέσο κέρδος, καθιστά το μέσο κέρδος ίσο με το οριακό.

Λύση: Η συνάρτηση κέρδους είναι $P(x) = R(x) - C(x)$, ενώ η συνάρτηση μέσου κέρδους είναι

$$AP(x) = \frac{P(x)}{x} = \frac{R(x) - C(x)}{x}$$

Εάν x_0 είναι η ποσότητα που μεγιστοποιεί το μέσο κέρδος, τότε

$$\frac{dAP(x_0)}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\dfrac{dR(x_0)}{dx} - \dfrac{dC(x_0)}{dx}\right] x_0 - [R(x_0) - C(x_0)]}{x_0^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dR(x_0)}{dx} - \frac{dC(x_0)}{dx} = \frac{R(x_0) - C(x_0)}{x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dP(x_0)}{dx} = AP(x_0)$$

65.8 Σε μία εταιρεία που προωθεί προϊόντα, οι κάτωθι παράμετροι περιγράφουν τη διαδικασία αποθήκευσης προϊόντων. V η ετήσια ποσότητα πωλήσεων, q η ποσότητα προϊόντος ανά παραγγελία, b το κόστος εκτέλεσης παραγγελίας, a το σταθερό κόστος, p το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα και i το επιτόκιο αποθήκευσης. Να βρεθεί η ποσότητα q που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος, όταν η μέση αποθήκευση είναι $\frac{q}{2}$.

Λύση: Το σύνολο των παραγγελιών που γίνονται δίδεται από τη σχέση $\frac{V}{q}$ και επομένως, το κόστος τους είναι $\frac{V}{q} \cdot b$. Το κόστος της συνολικής αποθήκευσης είναι $\frac{ipq}{2}$. Επομένως, το συνολικό κόστος δίδεται από τη σχέση

$$C(q) = a + \frac{ipq}{2} + \frac{V}{q} \cdot b$$

Για να βρούμε το υποψήφιο για ακρότατο σημείο, λύνουμε την εξίσωση

$$\frac{dC}{dq} = 0 \Rightarrow -\frac{bV}{q^2} + \frac{ip}{2} = 0$$

και έχουμε

$$q = \sqrt{\frac{2bV}{ip}}$$

Επειδή δε,

$$\frac{d^2C}{dq^2} = \frac{2bV}{q^3} > 0,$$

έπεται ότι η παραπάνω ποσότητα ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους και άρα είναι η ζητουμένη.

65.9 Ένα οικονομικό μέγεθος ανατοκιζόμενο συνεχώς με επιτόκιο r γίνεται μετά από χρόνο t, $A(t)$. Εάν t^* είναι ο χρόνος που μεγιστοποιεί τη παρούσα αξία του μεγέθους, δείξατε ότι:

$$\frac{A'(t^*)}{A(t^*)} = r \textbf{ και } \frac{A''(t^*)}{A(t^*)} < r^2$$

Λύση: Η παρούσα αξία δίδεται από τον τύπο $V(t) = A(t)e^{-rt}$. Μεγιστοποιώντας ως προς t, έχουμε:

$$\frac{dV(t^*)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2V(t^*)}{dt^2} < 0$$

όπου t^* η χρονική στιγμή που παρουσιάζεται το μέγιστο. Από την πρώτη σχέση έχουμε:1

$$\frac{dV(t^*)}{dt} = 0 \Rightarrow A'(t^*)e^{-rt^*} - rA(t^*)e^{-rt^*} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A'(t^*)}{A(t^*)} = r$$

Από τη δεύτερη σχέση, έχουμε:

$$\frac{d^2V(t^*)}{dt^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A''(t^*)e^{-rt^*} - rA'(t^*)e^{-rt^*} - rA'(t^*)e^{-rt^*} + r^2A(t^*)e^{-rt^*} < 0$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη σχέση, έχουμε:

$$A''(t^*)e^{-rt^*} - r[A(t^*)r]e^{-rt^*} - r[A(t^*)r]e^{-rt^*} + r^2A(t^*)e^{-rt^*} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A''(t^*)}{A(t^*)} < r^2$$

65.10 Το έσοδο από την υλοτόμηση ενός δάσους, σε τρέχουσες τιμές, είναι $R(t) = \lambda e^{\sqrt{t}}, \lambda > 0$. Αν υπάρχει ένας συνεχής πληθωρισμός r, βρείτε τη χρονική στιγμή t^* που μεγιστοποιεί τη παρούσα αξία του εσόδου.

Λύση: Ζητάμε να μεγιστοποιήσουμε τη παρούσα αξία του εσόδου. Αυτή δίδεται από τον τύπο:

$$V(t) = R(t)e^{-rt} = \lambda e^{\sqrt{t}} e^{-rt} = \lambda e^{\sqrt{t}-rt}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του $Fermat$. Διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \lambda e^{\sqrt{t}-rt}\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right) = 0$$

αφού το πρώτο μέρος είναι διάφορο του μηδενός, έπεται ότι:

$$\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right) = 0 \Rightarrow t^* = \frac{1}{4r^2}$$

ακόμα έχουμε για τη δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d}{dt}[\lambda e^{\sqrt{t}-rt}]\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - r\right) + \lambda e^{\sqrt{t}-rt}\left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}\right)$$

και θέτοντας $t = t^*$, έχουμε:

$$\frac{d^2V}{dt^2} = 0 + \lambda e^{\sqrt{t^*}-rt^*}\left(-\frac{1}{4}t^{*-\frac{3}{2}}\right) < 0$$

και επομένως, έχουμε μέγιστο για $t = t^*$.

65.11 Η συνάρτηση ενός οικονομικού μεγέθους έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία που η ελαστικότητα του αντιστοίχου μέσου μεγέθους, ισούται με -1.

Λύση: Έστω $f(x)$ ένα οικονομικό μέγεθος. Έστω ακόμα ότι αυτό παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$. Το αντίστοιχο μέσο μέγεθος είναι $Af(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ και η ελαστικότητά του:

$$\varepsilon_{Af}(x) = \frac{\dfrac{dAf}{dx}}{\dfrac{Af(x)}{x}} = \frac{\dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}}{\dfrac{f(x)}{x^2}} =$$

$$= \frac{f'(x)x - f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)x}{f(x)} - 1$$

Αντικαθιστώντας για $x = x_0$ έχουμε,

$$\varepsilon_{Af}(x_0) = \frac{f'(x_0)x_0}{f(x_0)} - 1 = -1$$

65.12 Σε μία αγορά πλήρους ανταγωνισμού, οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς είναι:

$$D(p) = 4 - 5p \quad , \quad S(p) = -7 + 10p$$

Αν η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία m δραχμών ανά μονάδα πωλουμένου προϊόντος, να υπολογισθεί:

α) Η τιμή της m που μεγιστοποιεί τα ολικά έσοδα από τη φορολογία.

β) Η μείωση λόγω φόρου της προσφερομένης ποσότητος.

Υποθέτουμε ότι όλη η φορολογία θα επιβαρύνει μόνον τον παραγωγό.

Λύση: α) Αν η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία m δραχμών σε κάθε μονάδα που πωλείται, τότε η τιμή που θα εισπράττουν οι προμηθευτές γίνεται $p-m$ και η συνάρτηση προσφοράς $S(p)=-7+10(p-m)$. Αφού η αγορά λειτουργεί σε πλήρη ανταγωνισμό, η τιμή που θα διαμορφώνεται προκύπτει από το σημείο ισορροπίας p^*, όπου,

$$D(p^*)=S(p^*) \text{ ή } 4-5p^*=-7+10(p^*-m) \text{ ή } p^*=\frac{11+10m}{15}$$

Οι ολικές εισπράξεις από τη φορολογία θα είναι

$$T(m)=mS(p^*)=m\left(-7+10\cdot\left(\frac{11+10m}{15}-m\right)\right)$$

Ζητάμε m^* έτσι ώστε τα φορολογικά έσοδα να γίνονται μέγιστα. Θα πρέπει $\left(\frac{dT}{dm}\right)_{m=m^*}=0$ και $\left(\frac{d^2T}{dm^2}\right)_{m=m^*}<0$. Αλλά

$$\left(\frac{dT}{dm}\right)_{m=m^*}=0 \Rightarrow \frac{1-20m}{3}=0 \Rightarrow m^*=\frac{1}{20}$$

και

$$\left(\frac{d^2T}{dm^2}\right)_{m=m^*}=-\frac{20}{3}<0$$

οπότε, για $m^*=\frac{1}{20}$, έχουμε τα μέγιστα φορολογικά έσοδα.

β) Η προσφερομένη πριν τη φορολογία ποσότητα είναι: $S=-7+10p$, όπου p είναι το σημείο ισορροπίας πριν τη φορολογία, δηλαδή

$$D(p)=S(p) \Rightarrow 4-5p=-7+10p \Rightarrow p=\frac{11}{15}$$

Επομένως,

$$S=-7+10\cdot\frac{11}{15}=\frac{1}{3}.$$

Η προσφερομένη ποσότητα μετά τη φορολογία είναι:

$$S_T=-7+10\cdot\left(\frac{11+10\cdot\frac{1}{20}}{15}-\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{6}$$

Άρα, η ποσότητα που χάνεται λόγω φορολογίας είναι: $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

65.13 Μέχρι πρόσφατα το χάμπουργκερ στα γήπεδα στοίχιζε 2 ευρώ. Το κυλικείο πουλούσε κατά μέσο όρο 10000 χάμπουργκερ σε κάθε παιχνίδι. Όταν η τιμή ανέβαινε στα 2.4, οι πωλήσεις έπεφταν κατά μέσο όρο στα 8000 χαμπουργκερ ανά παιχνίδι. Το κυλικείο έχει σταθερό κόστος 1000 ευρώ ανά παιχνίδι και μεταβλητό κόστος 0.6 ευρώ για κάθε χάμπουργκερ. Υποθέτοντας ότι η καμπύλη ζήτησης είναι γραμμική, βρείτε τη τιμή του χάμπουργκερ που μεγιστοποιεί το κέρδος ανά παιχνίδι.

Λύση: Αφού η ζήτηση είναι γραμμική, έχει τον τύπο $q=D(p)=ap+b$. Θα προσδιορίσουμε τις παραμέτρους a και b. Αντικαθιστώντας τις τιμές των χάμπουργκερ και τις αντίστοιχες ζητήσεις έχουμε:

$$10000=2a+b$$

$$8000=2.4a+b$$

από όπου $a=-5000$ και $b=20000$. Άρα η συνάρτηση ζήτησης είναι $D(p)=-5000p+20000$. Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi(p)=R(p)-C(p)=pq-(0.6q+1000)=$$
$$=p(-5000p+20000)-(0.6(-5000p+20000)+1000)=$$
$$=-13000+23000p-5000p^2$$

και επομένως
$$\frac{d\Pi}{dp} = 0 \Rightarrow 23000 - 10000p = 0 \Rightarrow p = 2.3$$
και αφού $\dfrac{d^2\Pi}{dp^2} = -10000 < 0$, η παραπάνω τιμή είναι η ζητουμένη τιμή που μεγιστοποιεί το κέρδος.

65.14 Να βρεθεί η τιμή του m για την οποία η ευθεία $y = mx+1$ αποτελεί την καλύτερη "παρεμβολή" για τα σημεία $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(6, 8)$.

Λύση: Το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων είναι
$$g(m) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - mx_i - 1)^2 =$$
$$= (3 - 2m - 1)^2 + (5 - 4m - 1)^2 + (8 - 6m - 1)^2$$
Ζητάμε m_0 έτσι ώστε η παραπάνω σχέση να γίνει ελαχίστη. Θα πρέπει
$$g'(m_0) = 0 \qquad , \qquad g''(m_0) > 0$$
αλλά
$$g'(m_0) = 112m - 124 = 0 \Rightarrow m_0 = \frac{124}{112}$$
και
$$g''(m_0) = 112 > 0$$
και επομένως, η $m_0 = \dfrac{124}{112}$ είναι η ζητουμένη τιμή.

65.15 Κάθε εβδομάδα, 1200 επιβάτες χρησιμοποιούν το τρένο αν το εισιτήριο είναι 2000 δραχμές. Κάθε μείωση του εισιτηρίου κατά 100 δραχμές αυξάνει τους επιβάτες κατά 100. Ποια είναι η τιμή του εισιτηρίου που μεγιστοποιεί τα έσοδα;

Λύση: Υποθέτουμε ότι η ζήτηση είναι γραμμική και έχει τον τύπο: $q = ap + b$. Θα προσδιορίσουμε τις παραμέτρους a και b. Όταν $p = 2000$, τότε $q = 1200$ και όταν $p = 1900$, $q = 1300$ και επομένως, έχουμε το σύστημα:
$$1200 = a \cdot 2000 + b$$
$$1300 = a \cdot 1900 + b$$
απ᾿ όπου έχουμε: $a = -1$ και $b = 3200$ και η συνάρτηση ζήτησης γίνεται $q = -p + 3200$. Τα έσοδα θα είναι
$$R(p) = p \cdot q = p \cdot (-p + 3200) = -p^2 + 3200p$$
Ακόμα
$$\frac{dR}{dp} = -2p + 3200 = 0 \Rightarrow p = 1600$$
και
$$\frac{d^2R}{dp^2} = -2 < 0$$
Επομένως, τιμή εισιτηρίου ίση με 1600 δραχμές, μεγιστοποιεί τα έσοδα.

65.16 Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη και (x_0, y_0) σταθερό σημείο. Δείξατε ότι η ελαχίστη απόσταση, από το συγκεκριμένο σημείο μέχρι τη γραφική παράσταση της f, "υλοποιείται" επί της κανονικής ευθείας της f, η οποία διέρχεται από το (x_0, y_0).

Λύση: Έστω $(x, f(x))$ τυχαίο σημείο του γραφήματος της $f(x)$. Η απόστασή του από το σημείο (x_0, y_0) είναι:

$$d(x) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f(x)-y_0)^2}$$

Έστω ακόμα σημείο x^*, στο οποίο η παραπάνω απόσταση γίνεται ελαχίστη. Θα πρέπει $d'(x^*) = 0$ ή ισοδύναμα:

$$2(x^* - x_0) + 2(f(x^*) - y_0)f'(x^*) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x^*) = -\frac{x^* - x_0}{f(x^*) - y_0}$$

Η ευθεία τώρα που ορίζεται από τα σημεία (x_0, y_0) και $(x^*, f(x^*))$ έχει κλίση:

$$\lambda = \frac{f(x^*) - y_0}{x^* - x_0}$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση, εύκολα βλέπουμε ότι $\lambda \cdot f'(x^*) = -1$, και άρα η συγκεκριμένη ευθεία είναι η κανονική ευθεία από το (x_0, y_0) στο γράφημα της $f(x)$.

65.17 Ορίζουμε:
Q**: Η παραγόμενη ποσότητα ενός προϊόντος.**
$\Pi(Q)$**: Η συνάρτηση κέρδους.**
φ**: Ο συντελεστής φόρου, ανά μονάδα προϊόντος.**
Q^* **: Η παραγόμενη ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος.**
Δείξατε ότι:

a**)** $\dfrac{dQ^*}{d\varphi} < 0$

b**)** $\dfrac{d\Pi(Q^*)}{d\varphi} = -Q^*$

Λύση: Είναι προφανές ότι το κέρδος βρίσκεται εάν από τα έσοδα αφαιρέσουμε το κόστος και τη φορολογία. Επομένως:

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) - \varphi Q$$

Έστω ότι όταν η παραγόμενη ποσότητα γίνει Q^*, τότε το κέρδος μεγιστοποιείται. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{d\Pi}{dQ}\right)_{Q=Q^*} = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{d^2\Pi}{dQ^2}\right)_{Q=Q^*} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} R'(Q^*) - C'(Q^*) - \varphi = 0 & (f1) \\[2ex] R''(Q^*) - C''(Q^*) < 0 & (f2) \end{array}$$

Ας απαντήσουμε τώρα στο ερώτημα a). Παραγωγίζοντας τη σχέση ($f1$), ως προς φ, έχουμε:

$$\frac{d}{d\varphi}[R'(Q^*) - C(Q^*) - \varphi] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dR'}{dQ^*} \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - \frac{dC'}{dQ^*} \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - \frac{d\varphi}{d\varphi} = 0 \Rightarrow$$

$$R''(Q^*) \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - C''(Q^*) \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - 1 = 0$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση ($f2$), έχουμε τελικά:

$$\frac{dQ^*}{d\varphi} = \frac{1}{R''(Q^*) - C''(Q^*)} < 0$$

Ας έρθουμε τώρα στο ερώτημα *b*). Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση κέρδους, ως προς φ, έχουμε:

$$\frac{d\Pi(Q^*)}{d\varphi} = \frac{dR(Q^*)}{d\varphi} - \frac{dC(Q^*)}{d\varphi} - \frac{d(\varphi Q^*)}{d\varphi} =$$
$$= \frac{dR}{dQ^*} \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - \frac{dC}{dQ^*} \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - Q^* - \varphi \frac{dQ^*}{d\varphi} =$$
$$= [R'(Q^*) - C'(Q^*)] \cdot \frac{dQ^*}{d\varphi} - Q^* - \varphi \frac{dQ^*}{d\varphi}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την $(f1)$, έχουμε τελικά

$$\frac{d\Pi(Q^*)}{d\varphi} = -Q^*$$

65.18 Ένας καταναλωτής έχει τρέχον εισόδημα y_1 και αναμένει να γίνει μελλοντικά y_2. Σκοπεύει να καταναλώσει τώρα c_1 και στο μέλλον c_2. Εάν το επιτόκιο είναι r, βρείτε τη κατανάλωση c_1 που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση χρησιμότητος:

$$U = \ln c_1 + \frac{1}{1+\delta} \ln c_2, \qquad \delta > 0$$

Λύση: Ο καταναλωτής έχει να αντιμετωπίσει δύο ενδεχόμενα. Είτε $c_1 > y_1$, οπότε χρειάζεται να δανειστεί, είτε $c_1 < y_1$, οπότε μπορεί να αποταμιεύσει. Στην πρώτη περίπτωση, θα καταναλώσει στο μέλλον αυτά που θα του περισσέψουν από την αποπληρωμή του δανείου και επομένως

$$c_2 = y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)$$

στη δεύτερη περίπτωση, θα καταναλώσει αυτά που θα εισπράξει μαζί με τους τόκους από την αποταμίευση αυτών των χρημάτων, που του είχαν περισσέψει, και άρα:

$$c_2 = y_2 + (1+r)(y_1 - c_1)$$

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε τελικά:

$$c_2 = y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)$$

και η συνάρτηση χρησιμότητος γίνεται:

$$U = \ln c_1 + \frac{1}{1+\delta} \ln[y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)]$$

Έχουμε τώρα

$$\frac{dU}{dc_1} = \frac{1}{c_1} - \frac{1+r}{1+\delta} \cdot \frac{1}{y_2 - (1+r)(c_1 - y_1)}$$

και άρα

$$\frac{dU}{dc_1} = 0 \Rightarrow c_1^* = \frac{(1+\delta)[(1+2)y_1 + y_2]}{(2+\delta)(1+r)}$$

Η δεύτερη τώρα παράγωγος μας δίνει:

$$\left(\frac{d^2U}{dc_1^2}\right)_{c_1 = c_1^*} = -\frac{(\delta+2)^3(r+1)^2}{(\delta+1)^2((r+1)y_1 + y_2)^2} < 0$$

και άρα στο c_1^* έχουμε το μέγιστο.

65.19 Έστω ότι ένας εκδοτικός οίκος πουλάει x ανάτυπα ενός βιβλίου προς p χρηματικές μονάδες το ένα. Τα δικαιώματα του συγγραφέα είναι r, $0 < r < 1$ επί των συνολικών εσόδων. Αν η συνάρτηση ζήτησης είναι $x = a - bp$, $a, b > 0$ και η συνάρτηση κόστους $C(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, βρείτε την τιμή του x που μεγιστοποιεί τα έσοδα του συγγραφέα και την τιμή του x που μεγιστοποιεί το κέρδος του εκδοτικού οίκου.

Λύση: Τα έσοδα του συγγραφέα είναι:

$$A(x) = rpx = rx\left(\frac{a-x}{b}\right) = \frac{ra}{b}x - \frac{r}{b}x^2$$

Άρα,

$$S'(x) = \frac{ra}{b} - \frac{2r}{b}x \text{ και } S''(x) = -\frac{2r}{b} < 0$$

οπότε η τιμή $x^* = a/2$, για την οποία $S'(x^*) = 0$, είναι η τιμή που μεγιστοποιεί τα έσοδα του συγγραφέα. Ο εκδότης τώρα έχει κέρδος:

$$P(x) = px - C(x) - rpx = (1-r)px - C(x) = (1-r)x\left(\frac{a-x}{b}\right) - c_0 - c_1x - c_2x^2$$

Άρα,

$$P'(x) = \frac{(1-r)a}{b} - \frac{2(1-r)}{b}x - c_1 - 2c_2x \text{ και } P''(x) = -\frac{2(1-r)}{b} - 2c_2 < 0$$

οπότε η τιμή:

$$x^* = \frac{a - bc_1 - ar}{2(1 + bc_2 - r)},$$

για την οποία $P'(x^*) = 0$, είναι η τιμή που μεγιστοποιεί τα κέρδη του ο εκδοτικός οίκος.

65.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση

65.20 *Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & x \leq 0 \\ -\eta\mu x & 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

65.21 *Να βρεθούν και να χαρακτηρισθούν, τα ακρότατα της συνάρτησης:* $f(x) = (3x-2)^2(2x-1)$.

65.22 *Να προσδιορισθούν οι σταθερές* α, β, γ *ούτως ώστε το διάγραμμα της συνάρτησης* $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *να διέρχεται από το σημείο* $(0,3)$ *και να έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο* $(1,2)$.

65.23 *Αποδείξατε ότι υπάρχει ένα σημείον* x_0, *στο οποίο η συνάρτηση* $f(x) = x^{2/3}$ *έχει τοπικό μέγιστο, αλλά δεν υπάρχει η παράγωγος* $f'(x_0)$.

65.24 *Έστωσαν* f *και* g *δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο* $\mathbb{R}$ *με την ιδιότητα* $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $f''(x) \neq 0$ *και* $g''(x) \neq 0$ *επίσης σε όλο το* $\mathbb{R}$. *Να αποδειχθεί ότι εάν η* f *παρουσιάζει στο* x_0 *τοπικό μέγιστο και η* g *τοπικό ελάχιστο, τότε η* $\frac{f}{g}$ *παρουσιάζει στο* x_0 *τοπικό μέγιστο.*

65.25 *Να εντοπισθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:*

1) $f(x) = (1-x)^6 - 2$.

2) $f(x) = (5-x)^5$.

3) $f(x) = x^6 - 2$.

65.26 *Προσδιορίσατε τις σταθερές* a, b, c *προκειμένου να έχει η συνάρτηση:*

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ *και ελάχιστο στο* $x = 3$.

65.27 *Έστωσαν οι ευθείες* (ε_1): $y = ax + b$ *και* (ε_2): $y = \lambda x$, *και έστω ότι τέμνονται στο σημείο* A. *Εάν* O *είναι η αρχή των αξόνων, δείξατε ότι η απόσταση* OA *γίνεται ελαχίστη, εάν και μόνον εάν,* $(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)$.

65.28 *Τυχαία ευθεία διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ και σχηματίζει με τους άξονες ορθογώνιο τρίγωνο. Προσδιορίσατε το τρίγωνο εκείνο με το ελάχιστο εμβαδό.*

65.29 *Προσδιορίσατε το εγγύτατο σημείο της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ προς το σημείο $(\gamma, 0)$, $\gamma > \dfrac{1}{2}$.*

65.30 *Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\dfrac{9}{2}, 0\right)$. Να βρείτε το σημείο M του γραφήματος της f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του γραφήματος στο M είναι κάθετη στην AM.*

65.31 *Βρείτε σημείο της ευθείας $y = x + 2$ που το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του, από τις ευθείες: $x + 3y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, να είναι ελάχιστο.*

65.32 *Δίδεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 2sx + s^2 - 3s + 1$. Έστω M το σημείο που η γραφική της παράσταση τέμνει τον κάθετο άξονα. Βρείτε s που ελαχιστοποιεί την απόσταση του M από την αρχή των αξόνων.*

65.33 *Έστωσαν $a, b, c > 0$ και $ax + (b/x) \geq c$, για κάθε $x > 0$. Δείξατε ότι $ab \geq c^2/4$.*

65.34 *Έστωσαν $a, b, c > 0$ και $ax^2 + (b/x) \geq c$, για κάθε $x > 0$. Δείξατε ότι $27ab^2 \geq 4c^3$.*

65.35 *Δίδεται ότι $x > 0, m > 1$. Δείξατε ότι $x^m - 1 - m(x - 1) \geq 0$.*

65.36 *Δείξατε ότι ο αριθμός που είναι πιό "κοντά" στους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_n$, υπό την έννοια ότι ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση:*

$$d(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

είναι η μέση τιμή τους.

65.37 *Αν δύο πραγματικές μεταβλητές έχουν σταθερό γινόμενο, δείξατε ότι το άθροισμα τους γίνεται μέγιστο όταν είναι ίσες.*

65.38 *Βρείτε για ποιά τιμή της παραμέτρου λ, ελαχιστοποιείται η μεγίστη τιμή της συνάρτησης:*

$$f(x) = \frac{(x - \lambda)^2}{x^2 + 2x + 5}$$

65.39 *Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2\lambda x + 3$ και πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Βρείτε την τιμή του λ, για την οποια η ελαχίστη τιμή της f γίνεται ίση με -1.*

65.40 *Δίδεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + s^2$. Βρείτε για ποιά τιμή της παραμέτρου s, μεγιστοποιείται η ελαστικότητα: $\varepsilon_f(1)$.*

65.41 *Έστω Y το εισόδημα και T ο φόρος που του αναλογεί. Εάν*

$$T = a(bY + c)^p + kY, a, b, c > 0, p > 1$$

βρείτε το Y που ελαχιστοποιεί τον μέσο φόρο:

$$\overline{T} = \frac{T}{Y}$$

65.42 *Δίδεται η συνάρτηση κόστους:*

$$C(q) = 5q^3 - 7q^2 + 10q + 22$$

Να προσδιορισθεί η τιμή του q που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση οριακού κόστους.

65.43 *Το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος είναι c. Αν η τιμή πώλησης είναι x και η ποσότητα πώλησης:*

$$q = \frac{a}{x-c} + b(100-x), \quad a, b > 0,$$

βρείτε το x που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

65.44 *Ένα παιχνίδι κατασκευάζεται με κόστος 600 δραχμών το κομμάτι. Στην τιμή των 1000 δραχμών μπορούν να πωληθούν 1000 κομμάτια. Για κάθε μείωση της τιμής κατά 10 δραχμές μπορούν να πωληθούν 50 επιπλέον κομμάτια. Να βρεθεί η τιμή με την οποία μεγιστοποιείται το κέρδος.*

65.45 *Εάν μπορούμε να πωλήσουμε $\dfrac{5000}{(p^{3/2} - 2p^{1/2})}$ μονάδες κάποιου προϊόντος προς p δραχμές τη μονάδα, με ποια τιμή μεγιστοποιείται το έσοδο;*

65.46 *Ας υποθέσουμε ότι κατέχουμε ένα σπάνιο βιβλίο, του οποίου η αξία σε διάρκεια t χρόνων από τώρα θα είναι $B(t) = 2^{\sqrt{t}}$ δρχ. Υποθέτουμε ένα συνεχή πληθωρισμό 5%. Πότε είναι η καλύτερη στιγμή να πουλήσουμε το βιβλίο και να επενδύσουμε τα κέρδη (εισπράξεις);*

65.47 *Ένας έμπορος κρασιού έχει ένα κελάρι το οποίο μπορεί να το πουλήσει για $Ke^{\sqrt{t}}$ χρηματικές μονάδες σε t χρόνια από τώρα. Εάν δεν υπάρχει κόστος αποθήκευσης (τέλη) και ο πληθωρισμός είναι r, πότε πρέπει ο έμπορος να πουλήσει το κρασί του ώστε να μεγιστοποιήσει την παρούσα αξία του εσόδου;*

65.48 *Η αξία ενός χωραφιού που αγοράστηκε με κερδοσκοπικά κριτήρια αυξάνεται σύμφωνα με τον τύπο $V(t) = 2000e^{\sqrt[4]{t}}$. Αν το επιτόκιο είναι 10%, πόσο καιρό πρέπει να κρατηθεί το χωράφι ώστε να μεγιστοποιηθεί η τρέχουσα τιμή;*

65.49 *Ένα εργοστάσιο επεξεργασίας ζάχαρης μπορεί να παράγει εβδομαδιαίως x τόνους, με κόστος που δίδεται από τη $f(x) = x^2 + 5x + 2250$. Προσδιορίσατε εκείνο το επίπεδο παραγωγής κατά το οποίο ελαχιστοποιείται το μέσο εβδομαδιαίο κόστος. Δείξατε ότι, σε αυτό ακριβώς το σημείο, υπάρχει ισότητα μεταξύ μέσου και οριακού εβδομαδιαίου κόστους.*

65.50 *Η συνάρτηση μέσου κόστους μιας επιχείρησης είναι: $AC(Q) = 3Q^2 - 18 + 80/Q$ και η συνάρτηση ζήτησης είναι $R = 40/Q + 6Q$, όπου R είναι η τιμή και Q η ποσότητα του προϊόντος. Να υπολογίσετε τις συναρτήσεις συνολικού και οριακού κόστους αντίστοιχα. Να προσδιορισθεί το ύψος παραγωγής, στο οποίο το κέρδος μεγιστοποιείται.*

65.51 *Η συνάρτηση του συνολικού κόστους ενός προϊόντος είναι $TC = 3Q^2 - 14Q + 40$, ενώ η συνάρτηση ζήτησης, του συγκεκριμένου προϊόντος, είναι: $P = 250 - 2.5Q$. Έστω Q_0 η ποσότητα για την οποία μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα της εταιρείας. Θα πρέπει η επιχείρηση, από το σημείο Q_0, να αυξήσει ή να μειώσει την παραγωγή (και τις πωλήσεις) ώστε να πετύχει αύξηση του κέρδους· Θα πρέπει να αυξήσει ή να μειώσει την τιμή ώστε να πετύχει τον στόχο της·*

65.52 *Μερικά χρόνια πριν υπολογίσθηκε ότι η ζήτηση για χάλυβα ικανοποιούσε τη συνάρτηση $p = 256 - 50x$ και το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων χάλυβα ήταν $C(x) = 182 + 56x$. Βρείτε το επίπεδο παραγωγής και την αντίστοιχη τιμή που μεγιστοποιεί το κέρδος.*

65.53 *Μια εταιρεία έχει συνάρτηση μεταβλητού κόστους:*

$$TVC = \frac{1}{3}Q^3 - 8Q^2 + 275Q$$

Να δειχθεί ότι η καμπύλη οριακού κόστους περνάει από το ελάχιστο σημείο της καμπύλης μέσου μεταβλητού κόστους.

65.54 *Όταν κατά μέσο όρο η τιμή του εισιτηρίου για ένα κονσέρτο στην όπερα στοίχιζε 50 μονάδες, η προσέλευση ήταν κατά μέσο όρο 4000 ακροατές σε κάθε παράσταση. Όταν η τιμή του εισιτηρίου ανέβαινε στα 52, η προσέλευση του κόσμου έπεφτε κατά μέσο όρο στους 3800 ακροατές. Ποια κατά μέσο όρο θα έπρεπε να είναι η τιμή του εισιτηρίου ώστε να μεγιστοποιηθούν τα έσοδα της όπερας; (Υποθέσατε ότι πρόκειται για γραμμική καμπύλη ζήτησης).*

65.55 *Δείξατε ότι η συνάρτηση* $Af(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ *έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία όπου η ελαστικότητα της* $f(x)$ *είναι ίση με τη μονάδα.*

65.56 *Δείξατε ότι η συνάρτηση των ολικών εσόδων έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο όπου η ελαστικότητά της είναι ίση με μηδέν.*

65.57 *Δίδεται η συνάρτηση ζήτησης:* $p = 1500e^{-0.025q}$. *Δείξατε ότι τα ολικά έσοδα μεγιστοποιούνται όταν* $\varepsilon_D = -1$.

65.58 *Έστωσαν* Q *η παραγόμενη ποσότητα ενός προϊόντος και* p *η τιμή του. Έστω ότι η σχέση ζήτησης είναι* $p + 2Q = 3$, *η συνάρτηση κόστους* $C = Q + 2$ *και* φ *ο φόρος ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος (σε χρηματικές μονάδες). Προσδιορίσατε το* φ *που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα φορολογικά έσοδα.*

65.59 *Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης σε μια αγορά, δίνεται από τη συνάρτηση* $q_d = 50 - 2p$ *και η συνάρτηση προσφοράς, από την συνάρτηση* $q_s = -10+p$, *όπου* q_d *και* q_s *η ζητούμενη και προσφερόμενη ποσότητα αντίστοιχα, και* p *η τιμή του προϊόντος. Υποθέτουμε ότι η κυβέρνηση επιβάλλει φόρο ύψους* t *ανά μονάδα προσφερόμενου προϊόντος και οι πωλητές συμπεριλαμβάνουν τον φόρο αυτό στην συνάρτηση προσφορά τους. Να υπολογίσετε το ύψος του* t, *που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης.*

65.60 *Ένας ιδιοκτήτης αγροκτήματος έχει* 204 *μέτρα πλέγμα περίφραξης, με το οποίο θέλει να περιφράξει δύο σχήματα. Το ένα σχήμα να είναι τετράγωνο και το άλλο σχήμα παραλληλόγραμο με μήκος διπλάσιο του πλάτους του. Βρείτε τις διαστάσεις των σχημάτων ώστε η συνολική επιφάνεια των σχημάτων να είναι η μικρότερη δυνατή.*

65.61 *Η συνάρτηση συνολικού κόστους μιας επιχείρησης είναι:*

$$TC(Q) = \left(\frac{5}{6}\right) Q^3 - 18Q + 80$$

Η συνάρτηση ζήτησης είναι: $P = \dfrac{40}{Q} + 6Q$, *όπου* P *είναι η τιμή και* Q *η ποσότητα του προϊόντος. Προσδιορίσατε την ποσότητα παραγωγής που τα κέρδη μεγιστοποιούνται.*

65.62 *Μια πολιτική διαφημιστική καμπάνια ζητά να προσλάβει προσωρινά εργάτες να μοιράσουν και να ταχυδρομήσουν* 21000 *επιστολές. Κάθε εργάτης μπορεί να ετοιμάσει* 100 *επιστολές την ώρα αμειβόμενος με* 6 *δραχμές την ώρα. Ακόμα, ένα πρακτορείο πληρώνεται* 10 *δραχμές για κάθε εργάτη που προσφέρει και, τέλος, ο επιστάτης πληρώνεται* 15 *δραχμές. Πόσοι άνθρωποι πρέπει να προσληφθούν ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος;*

65.63 *Το μέγεθος ενός πληθυσμού τη χρονική στιγμή* t, *δίδεται από τη σχέση:*

$$p(t) = \frac{A}{1 + Be^{-t}},$$

όπου A, B *σταθερές. Βρείτε τη τιμή του* t, *που μεγιστοποιεί το* $p(t)$.

65.64 *Ένας πληθυσμός τη χρονική στιγμή* t, *είναι ίσος με*

$$p(t) = \frac{1000e^t}{1 + \frac{1}{10}(e^t - 1)}$$

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού γίνεται μέγιστος.

65.65 *Έστωσαν οι συναρτήσεις προσφοράς* $S(p) = -3 + 3p$ *και ζήτησης* $D(p) = 25 - 3p$ *σε μία αγορά πλήρους ανταγωνισμού. Εάν η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία* t *χρηματικών μονάδων σε κάθε πωλουμένη μονάδα, επιβαρύνουσα μόνον τους παραγωγούς, προσδιορίσατε:*

ι) *Την τιμή της* t *που μεγιστοποιεί τα ολικά έσοδα από τη φορολογία.*

ιι) *Τη μείωση της προσφερομένης ποσότητος που οφείλεται στην επιβολή της φορολογίας.*

65.66 *Η συνάρτηση ζήτησης δίδεται από τη σχέση* $q = a + bp$ *και η συνάρτηση κόστους από τη σχέση* $C = q^2 + kq + f$. *Βρείτε τις ποσότητες* p *και* q *που μεγιστοποιούν το κέρδος.*

65.67 *Η τιμή πώλησης του προϊόντος μίας επιχείρησης είναι* $P = 121$ *και το μεταβλητό κόστος:*

$$\mathrm{TVC} = \frac{1}{2}\mathrm{Q}^3 - 15\mathrm{Q}^2 + 175\mathrm{Q}$$

και το σταθερό κόστος 500. *Βρείτε την ποσότητα για την οποία τα κέρδη μεγιστοποιούνται και ελαχιστοποιούνται. Τι συμβαίνει σε αυτά τα σημεία στο οριακό κόστος και στο οριακό έσοδο* ;

65.68 *Η συνάρτηση σταθερού κόστος μιας επιχείρησης είναι* $FC = 405$, *ενώ η συνάρτηση μεταβλητού κόστους είναι* $TVC(q) = q + 5q^2$, *όπου* q *η παραγόμενη ποσότητα. Να βρεθεί η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το μέσο συνολικό κόστος της επιχείρησης.*

65.69 *Δίδεται η συνάρτηση ολικών εσόδων:*

$$TR(Q) = -\frac{1}{2}Q^3 + 3Q^2 + 105Q$$

Δείξατε ότι: εάν τα ολικά έσοδα μεγιστοποιούνται στο Q_0, *τότε* $|\varepsilon_D(Q_0)| = 1$, *όπου* D *η συνάρτηση ζήτησης.*

65.70 *Υπολογίζεται ότι, εάν καλλιεργήσουμε* 24 *μηλιές σε ένα εκτάριο, θα πάρουμε* 500 *μήλα ανά δένδρο το χρόνο. Για κάθε ένα επιπλέον δένδρο ανά εκτάριο, η παραγωγή μειώνεται κατά* 11 *μήλα ανά δένδρο το χρόνο. Πόσα δένδρα πρέπει να καλλιεργηθούν ανά εκτάριο ώστε να πάρουμε τα περισσότερα δυνατόν μήλα;*

65.71 *Η συνάρτηση μέσων εσόδων είναι:*

$$ATR(q) = aq^2 - 12q + 126 - \frac{3}{q}$$

όπου a *συμβολίζει μια πραγματική σταθερά. Να υπολογισθεί η τιμή της σταθεράς* a, *αν είναι γνωστό ότι τα μέγιστα έσοδα επιτυγχάνονται όταν πουληθούν* $q = 3$ *μονάδες προϊόντος.*

65.72 *Το κόστος για τη παραγωγή* x *μονάδων κάποιου προϊόντος είναι* $\frac{x}{2} + 400$ *δραχμές και η τιμή του είναι* $3 - \frac{x}{20000}$ *δραχμές. Εάν επιβληθεί φόρος* 10 *δραχμών στο προϊόν, ποια παραγωγή μεγιστοποιεί το κέρδος;*

65.73 *Ένα δάσος παρέχει κέρδος ίσο προς* $10000e^{\sqrt{t}}$ *αν υλοτομηθεί σε* t *χρόνια από σήμερα. Πότε πρέπει να γίνει η υλοτόμηση, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η παρούσα αξία του κέρδους, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι* 15% *και ο ανατοκισμός συνεχής;*

65.74 *Μία εταιρεία καθορίζει ότι το κόστος* C, *η συνολική πρόσοδος* R *και ο αριθμός των παραγομένων μονάδων* x *συνδέονται μέσω των τύπων* $C = 100 + 0.015x^2$ *και* $R = 3x$. *Βρείτε το ποσοστό παραγωγής* x *πού θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη της εταιρείας.*

65.75 *Δίδεται η συνάρτηση μεταβλητού κόστους:*

$$TVC(Q) = aQ^3 - bQ^2 + cQ$$

Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $AVC(Q)$ *παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο, έστω* Q_0 , *τότε ικανοποιείται η σχέση:* $AVC(Q_0) = MVC(Q_0)$.

65.76 *Να δειχθεί ότι στην* p, *που μεγιστοποιείται το κέρδος, ισχύει η σχέση:*

$$p = \frac{MC}{\left(1 + \dfrac{1}{\varepsilon_D}\right)}$$

όπου MC *το οριακό κόστος και* ε_D *η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή.*

65.77 *Ένα οικονομικό μέγεθος ανατοκιζόμενο μία φορά το χρόνο, με ετήσιο επιτόκιο r, γίνεται μετά από t έτη $K(t)$. Εάν t^* είναι ο χρόνος, που μεγιστοποιεί τη παρούσα αξία του μεγέθους, δείξατε ότι:*

$$\frac{K'(t^*)}{K(t^*)} = \ln(1+r) \quad , \quad \frac{K''(t^*)}{K(t^*)} < \ln^2(1+r)$$

65.78 *Έστω ότι οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $f(x), g(x)$ τέμνονται ακριβώς σε δύο σημεία με συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2). Έστω τετμημένη x_0 με $x_1 < x_0 < x_2$. Η κάθετη ευθεία στο x_0, συναντά τη γραφική παράσταση της $f(x)$ στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και της $g(x)$ στο $B(x_0, g(x_0))$. Δείξατε ότι, εάν το x_0 επιλεγεί έτσι ώστε η απόσταση AB να είναι η μεγίστη δυνατή, τότε οι εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία A και B είναι μεταξύ τους παράλληλες.*

65.79 *Ο αριθμητικός μέσος n αριθμών, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ορίζεται ως εξής:*

$$\mu_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ενώ ο γεωμετρικός μέσος από τη σχέση:

$$\gamma_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

Έστωσαν τρεις αριθμοί: a_1, a_2, x. Οι δύο πρώτοι θεωρούνται σταθεροί ενώ ο τρίτος μεταβλητός. Δείξατε ότι η τιμή του x που ελαχιστοποιεί την ποσότητα $\dfrac{\mu_3}{\gamma_3}$ είναι ο αριθμητικός μέσος των a_1, a_2.

65.80 *Ένας εκδοτικός οίκος δίνει δικαιώματα, στον συγγραφέα ενός βιβλίου, 10%. Η ζήτηση του βιβλίου είναι $x = 100 - 6p$ και το κόστος εκτύπωσης: $C(x) = 6 + 4x + 3x^2$. Βρείτε τον βέλτιστο αριθμό πωλήσεων τόσο ως προς τον συγγραφέα όσο και ως προς τον εκδοτικό οίκο.*

65.81 *Έστω μονοπώλιο με συνάρτηση ζήτησης η οποία ικανοποιεί την σχέση: $p^2 q = 1$, όπου p η τιμή του προϊόντος και q η παραγόμενη ποσότητα. Το συνολικό κόστος δίδεται από την συνάρτηση: $C(q) = 4q$. Ποιά ποσότητα παράγει ο μονοπωλητής που μεγιστοποιεί το κέρδος του; Σε ποιά τιμή πουλάει;*

65.82 *Έστω συνάρτηση κόστους $C(q) = aq^b + c$ όπου q η παραγόμενη ποσότητα και a, b, c θετικές σταθερές με $b > 1$. Βρείτε την τιμή του q που μεγιστοποιεί ολικά το κέρδος.*

65.83 *Σε μια επιχείρηση, η συνάρτηση ζήτησης είναι: $4p + q - 40 = 0$ και η συνάρτηση συνολικού κόστους: $TC = q^2 + 10q$, όπου q είναι η ποσότητα παραγωγής και p η τιμή του παραγόμενου προϊόντος. Να υπολογισθεί η ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη.*