

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Περί Συνόλων</b>	<b>29</b>
1.1	Βασικοί Ορισμοί . . . . .	29
1.2	Σχέσεις Εγκλεισμού . . . . .	29
1.3	Πράξεις Μεταξύ των Συνόλων . . . . .	30
1.3.1	Συμπλήρωμα Συνόλου . . . . .	30
1.3.2	Τομή Συνόλων . . . . .	30
1.3.3	Ένωση Συνόλων . . . . .	30
1.3.4	Διαφορά Συνόλων . . . . .	31
1.3.5	Συμμετρική Διαφορά . . . . .	31
1.3.6	Επιμεριστικές Ιδιότητες . . . . .	31
1.3.7	Προσεταιριστικές Ιδιότητες . . . . .	32
1.3.8	Τύποι του <i>de Morgan</i> . . . . .	32
1.4	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	32
1.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Καρτεσιανό Γινόμενο</b>	<b>39</b>
2.1	Διατεταγμένο Ζεύγος . . . . .	39
2.2	Διατεταγμένη $n$ -άδα . . . . .	39
2.3	Καρτεσιανό Γινόμενο Δύο Συνόλων . . . . .	39
2.4	Γενίκευση Καρτεσιανού Γινομένου . . . . .	39
2.5	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	40
2.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Διμελείς Σχέσεις</b>	<b>43</b>
3.1	Βασικοί Ορισμοί . . . . .	43
3.2	Είδη Διμελών Σχέσεων . . . . .	43
3.3	Σχέσεις Ισοδυναμίας . . . . .	44
3.4	Σχέσεις Διατάξεως . . . . .	44
3.5	Διατεταγμένα Σύνολα – Βασικοί Ορισμοί . . . . .	44
3.6	Διατεταγμένα Σύνολα – Βασικά Θεωρήματα . . . . .	45
3.7	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	45
3.8	Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Οι Πραγματικοί Αριθμοί</b>	<b>51</b>
4.1	Βασικοί Αριθμοί . . . . .	51
4.2	Βασικά Αριθμοσύνολα . . . . .	51
4.3	Η Ταυτότητα της Διαίρεσης . . . . .	51
4.4	Άρτιοι, Περιττοί και Πρώτοι Αριθμοί . . . . .	51
4.5	Οι Άρρητοι . . . . .	52
4.6	Δεκαδική Μορφή Αρρήτων . . . . .	52
4.7	Πραγματικοί Αριθμοί . . . . .	52
4.8	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	52

4.9	Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Βασικές Πράξεις στους Πραγματικούς Αριθμούς</b>	<b>55</b>
5.1	Η Πρόσθεση . . . . .	55
5.2	Η Διαφορά (Αφαίρεση) . . . . .	55
5.3	Ο Πολλαπλασιασμός . . . . .	56
5.4	Η Διαίρεση . . . . .	57
5.5	Δυνάμεις με Ακέραιους Εκθέτες . . . . .	57
5.5.1	<b>Ιδιότητες των δυνάμεων</b> . . . . .	58
5.6	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	58
5.7	Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού</b>	<b>59</b>
6.1	Ορισμός . . . . .	59
6.2	Ιδιότητες Απολύτων Τιμών . . . . .	59
6.3	max και min Πραγματικών Αριθμών . . . . .	60
6.4	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	61
6.5	Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Ακέραιο Μέρος Πραγματικού Αριθμού</b>	<b>65</b>
7.1	Ορισμός . . . . .	65
7.2	Θεωρήματα . . . . .	65
7.3	Λυμένες ασκήσεις . . . . .	66
7.4	Ασκήσεις προς επίλυση . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Αναλογίες</b>	<b>71</b>
8.1	Ορισμοί . . . . .	71
8.2	Ιδιότητες των αναλογιών . . . . .	71
8.3	Ιδιότητα των ίσων κλασμάτων . . . . .	72
8.4	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	72
8.5	Ασκήσεις προς επίλυση . . . . .	73
<b>9</b>	<b>Ρίζες</b>	<b>75</b>
9.1	Ορισμοί . . . . .	75
9.2	Ιδιότητες των ριζών . . . . .	76
9.3	Δύναμη πραγματικού αριθμού με ρητό εκθέτη . . . . .	76
9.4	Μέσες Τιμές . . . . .	77
9.5	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	77
9.6	Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	79
<b>10</b>	<b>Διάταξη στους Πραγματικούς Αριθμούς</b>	<b>81</b>
10.1	Γνήσια Διάταξη - Ορισμοί . . . . .	81
10.2	Γνήσια Διάταξη - Ιδιότητες . . . . .	81
10.3	Διάταξη - Ορισμοί - Ιδιότητες . . . . .	83
10.4	Θεμελιώδεις ταυτοτικές ανισότητες . . . . .	83
10.5	Θεμελιώδεις Ανισότητες Υπό Συνθήκη . . . . .	84
10.6	Θεμελιώδεις Ανισοτικές Σχέσεις . . . . .	84
10.7	Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	84
10.8	Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	86
<b>11</b>	<b>Το Σύνολο των Πραγματικών Αριθμών</b>	<b>87</b>
11.1	Φραγμένα Σύνολα στο $\mathbb{R}$ . . . . .	87
11.2	Αξιοματική Θεμελίωση των Πραγματικών Αριθμών . . . . .	88
11.3	Το Άπειρο . . . . .	88

11.4 Διαστήματα στο $\mathbb{R}$ . . . . .	88
11.5 Τα Σύνολα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ . . . . .	88
11.6 Καρτεσιανό Γινόμενο Διαστημάτων . . . . .	89
11.7 Γραφική Παράσταση Καρτεσιανού Γινομένου . . . . .	89
11.8 Τοπολογικές Έννοιες Στο $\mathbb{R}$ . . . . .	89
11.9 Ιδιότητες στο $\mathbb{R}$ . . . . .	89
11.10 Αλγεβρικοί και Υπερβατικοί Αριθμοί . . . . .	90
11.1 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	91
11.12 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	92
<b>12 Πραγματικές Συναρτήσεις</b> . . . . .	<b>93</b>
12.1 Ορισμός . . . . .	93
12.2 Πεδίο Ορισμού . . . . .	93
12.3 Πεδίο Τιμών . . . . .	93
12.4 Εικόνα Συνόλου . . . . .	94
12.5 Βασικές Μαθηματικές Συναρτήσεις . . . . .	94
12.6 Ειδικές Συναρτήσεις . . . . .	95
12.6.1 Η Σταθερή Συνάρτηση . . . . .	95
12.6.2 Η Συνάρτηση Απολύτου . . . . .	95
12.6.3 Η Συνάρτηση Ακέραιου Μέρους . . . . .	95
12.6.4 Η Συνάρτηση <i>max</i> . . . . .	95
12.6.5 Η Συνάρτηση <i>min</i> . . . . .	95
12.6.6 Η Χαρακτηριστική Συνάρτηση . . . . .	96
12.7 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	96
12.8 Άλυτες Ασκήσεις . . . . .	97
<b>13 Πράξεις Μεταξύ Συναρτήσεων</b> . . . . .	<b>99</b>
13.1 Ισότητα συναρτήσεων . . . . .	99
13.2 Αλγεβρικές Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων . . . . .	99
13.2.1 Άθροισμα Συναρτήσεων . . . . .	99
13.2.2 Διαφορά Συναρτήσεων . . . . .	99
13.2.3 Γινόμενο Συναρτήσεων . . . . .	99
13.2.4 Πηλίκο Συναρτήσεων . . . . .	99
13.2.5 Διάταξη Συναρτήσεων . . . . .	99
13.3 Ιδιότητες Πράξεων . . . . .	99
13.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	100
13.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	101
<b>14 Σύνθεση Συναρτήσεων</b> . . . . .	<b>103</b>
14.1 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	103
14.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	104
<b>15 Κατηγορίες Συναρτήσεων</b> . . . . .	<b>105</b>
15.1 Φραγμένες Συναρτήσεις . . . . .	105
15.2 <i>Supremum - Infimum</i> . . . . .	105
15.3 Άρτιες Συναρτήσεις . . . . .	105
15.4 Περιττές Συναρτήσεις . . . . .	106
15.5 Συνάρτηση Επί . . . . .	106
15.6 Αμφιμονοσήμαντη Συνάρτηση . . . . .	106
15.7 Περιοδικές Συναρτήσεις . . . . .	106
15.8 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	106
15.9 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	109

<b>16 Μονοτονία Πραγματικών Συναρτήσεων</b>	<b>111</b>
16.1 Ορισμοί . . . . .	111
16.2 Ιδιότητες . . . . .	111
16.3 Λόγος Μεταβολής . . . . .	112
16.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	112
16.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	113
<b>17 Ακρότατα Συναρτήσεων</b>	<b>115</b>
17.1 Ορισμοί . . . . .	115
17.2 Παρατηρήσεις . . . . .	115
17.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	115
17.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	116
<b>18 Αντίστροφη Συνάρτηση</b>	<b>117</b>
18.1 Ορισμοί . . . . .	117
18.2 Ιδιότητες . . . . .	117
18.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	117
18.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	118
<b>19 Γραφικές Παραστάσεις Συναρτήσεων</b>	<b>119</b>
19.1 Γράφημα Συνάρτησης . . . . .	119
19.2 Γραμμικές Μετατοπίσεις . . . . .	120
19.3 Άλλες Μετατοπίσεις . . . . .	120
19.4 Ασύμπτωτες . . . . .	121
<b>20 Η Ευθεία</b>	<b>123</b>
20.1 Ορισμός . . . . .	123
20.2 Ιδιότητες . . . . .	123
20.3 Εναλλακτικές Εξισώσεις Ευθείας . . . . .	124
20.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	125
20.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	125
<b>21 Πολυωνυμικές-Ρητές Συναρτήσεις</b>	<b>127</b>
21.1 Το Τριώνυμο . . . . .	127
21.2 Κυβική Συνάρτηση . . . . .	128
21.3 Πολυωνυμική Συνάρτηση . . . . .	129
21.4 Η Ομογραφική Συνάρτηση . . . . .	129
21.5 Ρητή Συνάρτηση . . . . .	130
21.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	130
21.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	131
<b>22 Εκθετικές - Λογαριθμικές Συναρτήσεις</b>	<b>133</b>
22.1 Η Εκθετική Συνάρτηση . . . . .	133
22.2 Ιδιότητες Εκθετικής Συνάρτησης . . . . .	133
22.3 Η Λογαριθμική Συνάρτηση . . . . .	133
22.4 Υπερβολικές Συναρτήσεις . . . . .	135
22.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	135
22.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	136
<b>23 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις</b>	<b>137</b>
23.1 Αριθμοί και Τόξα . . . . .	137
23.2 Η Συνάρτηση $\eta_{\mu x}$ . . . . .	138
23.2.1 Ιδιότητες Ημιτόνου . . . . .	138
23.2.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \eta_{\mu x}$ . . . . .	139
23.3 Η Συνάρτηση $\sigma_{\nu\alpha x}$ . . . . .	139

23.3.1 Ιδιότητες Συνημιτόνου . . . . .	139
23.3.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ . . . . .	140
23.4 Η Συνάρτηση $\epsilon\varphi x$ . . . . .	140
23.4.1 Ιδιότητες Εφαπτομένης . . . . .	141
23.4.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \epsilon\varphi x$ . . . . .	141
23.5 Η Συνάρτηση $\sigma\varphi x$ . . . . .	142
23.5.1 Ιδιότητες Συνεφαπτομένης . . . . .	142
23.5.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \sigma\varphi x$ . . . . .	143
23.6 Η Συνάρτηση $\tau\epsilon\mu x$ . . . . .	143
23.6.1 Ιδιότητες Τέμνουσας . . . . .	143
23.6.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\epsilon\mu x$ . . . . .	144
23.7 Η Συνάρτηση $\sigma\tau\epsilon\mu x$ . . . . .	144
23.7.1 Ιδιότητες Συντέμνουσας . . . . .	145
23.7.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \sigma\tau\epsilon\mu(x)$ . . . . .	146
23.8 Βασικές Ιδιότητες . . . . .	146
23.9 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	147
23.10 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	148
<b>24 Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις</b>	<b>149</b>
24.1 Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\eta\mu x$ . . . . .	149
24.1.1 Ιδιότητες Αντιστρόφου Ημιτόνου . . . . .	149
24.1.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\eta\mu x$ . . . . .	150
24.2 Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x$ . . . . .	150
24.2.1 Ιδιότητες Αντιστρόφου Συνημιτόνου . . . . .	150
24.2.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x$ . . . . .	151
24.3 Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi x$ . . . . .	151
24.3.1 Ιδιότητες Αντιστρόφου Εφαπτομένης . . . . .	151
24.3.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi x$ . . . . .	152
24.4 Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\varphi x$ . . . . .	152
24.4.1 Ιδιότητες Αντιστρόφου Συνεφαπτομένης . . . . .	152
24.4.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\varphi x$ . . . . .	152
24.5 Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\tau\epsilon\mu x$ . . . . .	153
24.5.1 Ιδιότητες Αντιστρόφου Τέμνουσας . . . . .	153
24.5.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\tau\epsilon\mu x$ . . . . .	153
24.6 Η Συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\tau\epsilon\mu x$ . . . . .	153
24.6.1 Ιδιότητες Αντιστρόφου Συντέμνουσας . . . . .	154
24.6.2 Γραφική Παράσταση της $f(x) = \tau\omicron\xi\sigma\tau\epsilon\mu x$ . . . . .	154
24.7 Βασικές Ιδιότητες . . . . .	154
24.8 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	155
24.9 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	156
<b>25 Ακολουθίες</b>	<b>159</b>
25.1 Ορισμοί . . . . .	159
25.2 Συμβολισμός . . . . .	159
25.3 Παραδείγματα . . . . .	159
25.4 Τελικές Ιδιότητες . . . . .	160
25.4.1 Παράδειγμα . . . . .	160
25.5 Πράξεις μεταξύ ακολουθιών . . . . .	160
25.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	160
25.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	162

<b>26 Φημισμένες Ακολουθίες</b>	<b>165</b>
26.1 Η Ακολουθία <i>Fibonacci</i> . . . . .	165
26.2 Οι "Γεωμετρικές" Ακολουθίες . . . . .	165
26.3 Οι "Αριθμητικές" Ακολουθίες . . . . .	166
26.4 Η Ακολουθία των Καταλωνικών Αριθμών . . . . .	166
<b>27 Φραγμένες Ακολουθίες</b>	<b>167</b>
27.1 Ορισμοί . . . . .	167
27.2 Ιδιότητες . . . . .	167
27.3 <i>Supremum - Infimum</i> . . . . .	167
27.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	168
27.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	170
<b>28 Μονοτονία Ακολουθιών</b>	<b>171</b>
28.1 Ορισμοί . . . . .	171
28.2 Θεωρήματα . . . . .	171
28.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	171
28.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	172
<b>29 Μηδενικές Ακολουθίες</b>	<b>173</b>
29.1 Ορισμός . . . . .	173
29.2 Ιδιότητες . . . . .	173
29.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	174
29.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	176
<b>30 Συγκλίνουσες ακολουθίες</b>	<b>177</b>
30.1 Ορισμός . . . . .	177
30.2 Ιδιότητες . . . . .	177
30.3 Βασικά Όρια . . . . .	178
30.3.1 Όριο Κλάσματος . . . . .	178
30.3.2 Όριο Ριζών . . . . .	178
30.3.3 Συνήθη Όρια . . . . .	179
30.3.4 Αριθμητικός Μέσος . . . . .	179
30.3.5 Γεωμετρικός Μέσος . . . . .	179
30.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	179
30.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	182
<b>31 Υπακολουθίες</b>	<b>183</b>
31.1 Ορισμοί . . . . .	183
31.2 Παράδειγμα . . . . .	183
31.3 Υπακολουθίες και Σύγκλιση . . . . .	183
31.4 Ιδιότητες . . . . .	184
31.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	184
31.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	184
<b>32 Αναδρομικές Ακολουθίες</b>	<b>187</b>
32.1 Αξιώματα Σύγκλισης . . . . .	187
32.2 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	187
32.3 Ασκήσεις προς Επίλυση . . . . .	190
<b>33 Ο αριθμός <math>e</math></b>	<b>193</b>
33.1 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	193
33.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	194

<b>34 Ακολουθίες στο <math>\pm\infty</math></b>	<b>197</b>
34.1 Ορισμοί . . . . .	197
34.2 Ιδιότητες . . . . .	197
34.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	198
34.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	199
<b>35 Ειδικά Θέματα Ακολουθιών</b>	<b>201</b>
35.1 Βασικές Ακολουθίες . . . . .	201
35.2 Οι Έννοιες $\lim \sup$ και $\lim \inf$ . . . . .	201
35.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	201
35.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	202
<b>36 Αριθμητική Πρόοδος</b>	<b>203</b>
36.1 Ορισμοί . . . . .	203
36.2 Ιδιότητες . . . . .	203
36.3 Βασικά Αθροίσματα . . . . .	204
36.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	204
36.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	206
<b>37 Αρμονική Πρόοδος</b>	<b>209</b>
37.1 Ορισμοί . . . . .	209
37.2 Ιδιότητες . . . . .	209
37.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	210
37.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	211
<b>38 Γεωμετρική Πρόοδος</b>	<b>213</b>
38.1 Ορισμοί . . . . .	213
38.2 Ιδιότητες . . . . .	213
38.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	214
38.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	217
<b>39 Σειρές</b>	<b>219</b>
39.1 Βασικές Έννοιες . . . . .	219
39.2 Βασικοί Ορισμοί . . . . .	219
39.3 Στοιχειώδεις Σειρές . . . . .	219
39.4 Βασικές Ιδιότητες . . . . .	220
39.5 Βασικά Θεωρήματα . . . . .	220
39.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	220
39.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	222
<b>40 Απλός Τόκος</b>	<b>223</b>
40.1 Ορισμοί . . . . .	223
40.2 Τύποι . . . . .	223
40.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	224
40.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	224
<b>41 Ανατοκισμός</b>	<b>225</b>
41.1 Διακριτός Ανατοκισμός . . . . .	225
41.2 Περιοδικός Ανατοκισμός . . . . .	225
41.3 Συνεχής Ανατοκισμός . . . . .	225
41.4 Παρούσα Αξία . . . . .	225
41.5 Ετήσιο Ποσοστιαίο Επιτόκιο . . . . .	226
41.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	226
41.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	228

<b>42 Επενδύσεις</b>	<b>231</b>
42.1 Ταμειακή ροή . . . . .	231
42.2 Απόσβεση . . . . .	231
42.3 Καθαρή Παρούσα Αξία . . . . .	231
42.4 Εσωτερικός Ρυθμός Απόδοσης . . . . .	232
42.5 Υπολογισμός <i>IRR</i> . . . . .	232
42.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	232
42.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	234
<b>43 Ράντες</b>	<b>235</b>
43.1 Ίσες Καταθέσεις . . . . .	235
43.2 Ράντες . . . . .	235
43.3 Παρούσα αξία ράντας . . . . .	235
43.4 Χρεωλυσία . . . . .	236
43.5 Γενική Παρατήρηση . . . . .	236
43.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	236
43.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	239
<b>44 Όρια Συναρτήσεων</b>	<b>241</b>
44.1 Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων . . . . .	241
44.2 Όρια στο Άπειρο . . . . .	241
44.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	241
44.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	242
<b>45 Συνέχεια Συναρτήσεων</b>	<b>243</b>
45.1 Ορισμοί . . . . .	243
45.2 Χαρακτηριστικές Συνεχείς Συναρτήσεις . . . . .	243
45.3 Ιδιότητες . . . . .	244
45.4 Βασικά Θεωρήματα . . . . .	244
45.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	245
45.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	246
<b>46 Παράγωγοι – Βασικές Έννοιες</b>	<b>247</b>
46.1 Το Πρόβλημα της Εφαπτομένης, (Newton). . . . .	247
46.2 Το Πρόβλημα της Μεταβολής, (Leibnitz). . . . .	247
46.3 Ρυθμός Μεταβολής . . . . .	248
46.4 Παράγωγοι Ειδικών Συναρτήσεων . . . . .	248
46.5 Βασικές Ιδιότητες και Θεωρήματα . . . . .	248
46.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	248
46.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	251
<b>47 Παραγωγή Συνθέτων Συναρτήσεων</b>	<b>255</b>
47.1 Ο Κανών της Αλυσίδος . . . . .	255
47.2 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	255
47.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	257
<b>48 Παράγωγοι Ανωτέρας Τάξεως</b>	<b>259</b>
48.1 Ο Τύπος του <i>Leibnitz</i> . . . . .	259
48.2 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	260
48.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	261



<b>49 Γεωμετρικές Έννοιες</b>	<b>263</b>
49.1 Ορισμοί . . . . .	263
49.2 Βασικοί Τύποι . . . . .	263
49.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	264
49.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	265
<b>50 Η Μέθοδος <i>Newton – Raphson</i></b>	<b>267</b>
50.1 Ο Βασικός Τύπος . . . . .	267
50.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Μεθόδου . . . . .	267
50.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	267
50.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	268
<b>51 Μονοτονία Συναρτήσεων και Παράγωγοι</b>	<b>269</b>
51.1 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	269
51.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	269
<b>52 Θεωρήματα Μέσης Τιμής</b>	<b>271</b>
52.1 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού . . . . .	271
52.2 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του <i>Rolle</i> . . . . .	271
52.3 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του <i>Cauchy</i> . . . . .	271
52.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	271
52.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	272
<b>53 Κανόνας του <i>DeL'Hôpital</i></b>	<b>273</b>
53.1 Η Απροσδιόριστη Μορφή $0/0$ . . . . .	273
53.2 Η Απροσδιόριστη Μορφή $\pm\infty/\pm\infty$ . . . . .	273
53.3 Η Απροσδιόριστη Μορφή $0 \cdot (\pm\infty)$ . . . . .	274
53.4 Η Απροσδιόριστη Μορφή $(\pm\infty) + (\pm\infty)$ . . . . .	274
53.5 Η Απροσδιόριστη Μορφή $(\pm\infty)^{(\pm\infty)}$ ή $0^0$ . . . . .	274
53.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	274
53.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	276
<b>54 Ασύμπτωτες Ευθείες</b>	<b>277</b>
54.1 Βασικός Ορισμός . . . . .	277
54.2 Κατακόρυφες Ασύμπτωτες . . . . .	277
54.3 Οριζόντιες Ασύμπτωτες . . . . .	277
54.4 Πλάγιες Ασύμπτωτες . . . . .	277
54.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	277
54.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	278
<b>55 Η Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση II</b>	<b>281</b>
55.1 Ο Αριθμός $e$ . . . . .	281
55.2 Ιδιότητες . . . . .	281
55.3 Σημαντικές Εκθετικές Συναρτήσεις . . . . .	281
55.3.1 Συναρτήσεις Εκθετικής Μεγέθυνσης ή Φθίσης . . . . .	281
55.3.2 Η Συνάρτηση Μάθησης . . . . .	282
55.3.3 Η Λογιστική Συνάρτηση . . . . .	282
55.3.4 Η Συνάρτηση <i>Comptez</i> . . . . .	282
55.4 Η Λογαριθμική Συνάρτηση . . . . .	282
55.5 Ιδιότητες . . . . .	282
55.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	283
55.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	283

<b>56 Οικονομικές Συναρτήσεις</b>	<b>285</b>
56.1 Γενική Οικονομική Συνάρτηση . . . . .	285
56.2 Η Συνάρτηση Παραγωγής . . . . .	285
56.3 Η Συνάρτηση Κόστους . . . . .	286
56.4 Η Συνάρτηση Ζήτησης . . . . .	286
56.5 Η Συνάρτηση Προσφοράς . . . . .	287
56.6 Σημείο Ισορροπίας . . . . .	287
56.7 Η Συνάρτηση Εσόδων . . . . .	287
56.8 Η Συνάρτηση Κέρδους . . . . .	287
56.9 Οριακές Μακροοικονομικές Συναρτήσεις . . . . .	287
56.10 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	288
56.1 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	293
<b>57 Ελαστικότητες</b>	<b>297</b>
57.1 Ελαστικότητα Σημείου Πραγματικής Συνάρτησης . . . . .	297
57.2 Βασικές Ιδιότητες . . . . .	297
57.3 Ελαστικότητα επί Τόξου . . . . .	298
57.4 Ποσοστιαία Μεταβολή . . . . .	298
57.5 Βασικός Τύπος για την Ελαστικότητα . . . . .	298
57.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	298
57.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	300
<b>58 Ελαστικότητες Οικονομικών Συναρτήσεων</b>	<b>303</b>
58.1 Η Ελαστικότητα Σημείου Οικονομικών Συναρτήσεων . . . . .	303
58.2 Ελαστικότητα Ζήτησης ως προς την Τιμή . . . . .	303
58.3 Ελαστικότητα Ζήτησης ως προς την Ποσότητα . . . . .	303
58.3.1 Κατηγοριοποίηση Ζήτησης ως προς την Ελαστικότητα . . . . .	304
58.4 Ελαστικότητα Προσφοράς ως προς την Τιμή . . . . .	304
58.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	305
58.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	308
<b>59 Ρυθμός Μεγέθυνσης</b>	<b>311</b>
59.1 Ρυθμός Μεγέθυνσης . . . . .	311
59.1.1 Ιδιότητες του Ρυθμού Μεγέθυνσης . . . . .	311
59.2 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	311
59.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	312
<b>60 Το Διαφορικό</b>	<b>313</b>
60.1 Διαφορικό Πρώτης Τάξεως . . . . .	313
60.2 Ιδιότητες Διαφορικών . . . . .	313
60.3 Γεωμετρική Ερμηνεία τού Διαφορικού . . . . .	313
60.4 Διαφορικά Ανωτέρας Τάξεως . . . . .	314
60.5 Σφάλματα . . . . .	314
60.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	314
60.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	318
<b>61 Πεπλεγμένες Συναρτήσεις</b>	<b>321</b>
61.1 Ορισμός Πεπλεγμένης Συνάρτησης . . . . .	321
61.2 Παραγωγή Πεπλεγμένων Συναρτήσεων . . . . .	321
61.3 Παραγωγή Εκθετικών Μορφών . . . . .	321
61.4 Οριακοί Λόγοι Υποκατάστασης . . . . .	321
61.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	322
61.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	325

<b>62 Παραγωγή Αντιστρόφων Συναρτήσεων</b>	<b>331</b>
62.1 Παραγωγή Αντιστρόφων Τριγωνομετρικών . . . . .	331
62.2 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	331
62.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	333
<b>63 Παραγωγή Παραμετρικών Συναρτήσεων</b>	<b>335</b>
63.1 Παραμετρικές Εξισώσεις . . . . .	335
63.2 Παράγωγος Παραμετρικής Συναρτήσης . . . . .	335
63.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	335
63.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	338
<b>64 Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις</b>	<b>339</b>
64.1 Γεωμετρικοί Ορισμοί με Ευθύγραμμα Τμήματα . . . . .	339
64.2 Γεωμετρικοί Ορισμοί με Εφαπτομένες . . . . .	339
64.3 Αλγεβρικοί Ορισμοί . . . . .	340
64.4 Ορισμοί με την Πρώτη Παράγωγο . . . . .	341
64.5 Θεωρήματα με τη Δεύτερη Παράγωγο . . . . .	342
64.6 Βασικές Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις . . . . .	342
64.7 Ιδιότητες . . . . .	342
64.8 Η Ανισότητα του <i>Jensen</i> . . . . .	343
64.9 Σημεία Καμπής . . . . .	343
64.10 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	344
64.11 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	347
<b>65 Μέγιστα και Ελάχιστα</b>	<b>351</b>
65.1 Το Κριτήριο της Μονοτονίας . . . . .	351
65.2 Το Κριτήριο της Δεύτερας Παραγωγού. ( <i>Fermat</i> ) . . . . .	351
65.3 Το Κριτήριο της $n$ -οστής Παραγωγού . . . . .	351
65.4 Ολικά Ακρότατα και Κυρτότητα - Κοιλότητα . . . . .	352
65.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	352
65.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	361
<b>66 Σειρές Συναρτήσεων</b>	<b>367</b>
66.1 Σειρές <i>Taylor</i> . . . . .	367
66.2 Σειρές <i>Maclaurin</i> . . . . .	367
66.3 Ο Τύπος του Διωνύμου . . . . .	368
66.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	368
66.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	373
<b>67 Μελέτη Συναρτήσεως</b>	<b>377</b>
67.1 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	377
67.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	380
<b>68 Το Αόριστο Ολοκλήρωμα</b>	<b>381</b>
68.1 Ορισμός . . . . .	381
68.2 Βασικές Προτάσεις . . . . .	381
68.3 Η Σταθερά της Ολοκλήρωσης . . . . .	381
68.4 Στοιχειώδη Αόριστα Ολοκληρώματα . . . . .	381
68.5 Βασικές Ιδιότητες . . . . .	382
68.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	382
68.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	383

<b>69 Ολοκλήρωση με την Μέθοδο των Προσδιοριστέων Συντελεστών</b>	<b>385</b>
69.1 Η Μέθοδος . . . . .	385
69.2 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	385
69.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	387
<b>70 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση</b>	<b>389</b>
70.1 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	389
70.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	392
<b>71 Ολοκληρώματα μέσω της τοξεφx</b>	<b>393</b>
71.1 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	393
71.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	394
<b>72 Παραγοντική Ολοκλήρωση</b>	<b>397</b>
72.1 Ο Βασικός Τύπος . . . . .	397
72.2 Εμπειρικοί Κανόνες . . . . .	397
72.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	397
72.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	403
<b>73 Αναγωγικοί Τύποι</b>	<b>405</b>
73.1 Γενικά . . . . .	405
73.2 Τριγωνομετρικοί Αναγωγικοί Τύποι . . . . .	405
73.3 Αναγωγικός Τύπος Ρητής Ολοκλήρωσης . . . . .	405
73.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	405
73.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	410
<b>74 Ανάλυση σε Άθροισμα Απλών Κλασμάτων</b>	<b>411</b>
74.1 Γενικά . . . . .	411
74.2 Ανάλυση σε Απλά Κλάσματα . . . . .	411
74.3 Τύποι Ανάλυσης σε Απλά Κλάσματα . . . . .	411
74.4 Προσδιορισμός των σταθερών . . . . .	412
74.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	412
74.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	417
<b>75 Βασικά Ρητά Ολοκληρώματα</b>	<b>419</b>
75.1 Γενικά . . . . .	419
75.2 Το ολοκλήρωμα $O_1$ . . . . .	419
75.3 Το ολοκλήρωμα $O_2$ . . . . .	419
75.4 Το ολοκλήρωμα $O_3$ . . . . .	419
75.5 Το ολοκλήρωμα $O_4$ . . . . .	420
75.6 Το ολοκλήρωμα $O_5$ . . . . .	420
75.7 Το ολοκλήρωμα $O_6$ . . . . .	420
75.8 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	420
75.9 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	424
<b>76 Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων</b>	<b>427</b>
76.1 Γενικά . . . . .	427
76.2 Η Μέθοδος . . . . .	427
76.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	427
76.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	430

<b>77 Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων</b>	<b>431</b>
77.1 Γενικά . . . . .	431
77.2 Τριγωνομετρικά Γινόμενα . . . . .	431
77.3 Ολοκλήρωση περιπτών δυνάμεων, τριγωνομετρικών συναρτήσεων . . . . .	431
77.4 Ολοκλήρωση αρτίων δυνάμεων, τριγωνομετρικών συναρτήσεων . . . . .	432
77.5 Ολοκληρώματα γινομένων δυνάμεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων . . . . .	432
77.6 Ολοκληρώματα ηηλίκων δυνάμεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων . . . . .	432
77.7 Γενικός τρόπος ολοκλήρωσης τριγωνομετρικών συναρτήσεων . . . . .	433
77.8 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	433
77.9 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	436
<b>78 Ολοκλήρωση Αρρήτων Συναρτήσεων I</b>	<b>439</b>
78.1 Ένα πρωτοβάθμιο υπόρριζο . . . . .	439
78.2 Πολλά πρωτοβάθμια υπόρριζα . . . . .	439
78.3 Πολλά απλά υπόρριζα . . . . .	439
78.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	440
78.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	441
<b>79 Ολοκλήρωση Αρρήτων Συναρτήσεων II</b>	<b>443</b>
79.1 Τριγωνομετρική Αντικατάσταση . . . . .	443
79.2 Οι Μετασχηματισμοί του <i>Euler</i> . . . . .	443
79.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	444
79.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	446
<b>80 Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα</b>	<b>447</b>
80.1 Ορισμός . . . . .	447
80.2 Βασικά Θεωρήματα . . . . .	447
80.3 Βασικές Ιδιότητες . . . . .	448
80.4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού . . . . .	448
80.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	449
80.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	455
<b>81 Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού</b>	<b>459</b>
81.1 Το Θεώρημα της Μέσης Τιμής . . . . .	459
81.2 Μέση Τιμή Συνάρτησης . . . . .	459
81.3 Γεωμετρική Ερμηνεία της Μέσης Τιμής . . . . .	459
81.4 Στατιστική Ερμηνεία της Μέσης Τιμής . . . . .	459
81.5 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	460
81.6 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	460
<b>82 Παραγωγή Ολοκληρωμάτων</b>	<b>461</b>
82.1 Το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού . . . . .	461
82.2 Ο Τύπος του <i>Leibnitz</i> . . . . .	461
82.3 Ο Γενικευμένος Τύπος του <i>Leibnitz</i> . . . . .	461
82.4 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	461
82.5 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	464
<b>83 Γενικευμένα Ολοκληρώματα "Πρώτου" Είδους</b>	<b>469</b>
83.1 Μορφή I . . . . .	469
83.2 Μορφή II . . . . .	469
83.3 Μορφή III . . . . .	469
83.4 Κριτήρια Σύγκλισης . . . . .	470

83.5 Παραγωγή και Ολοκλήρωση Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων . . . . .	471
83.6 Σειρές και Γενικευμένα Ολοκληρώματα . . . . .	471
83.7 Η Συνάρτηση Γάμμα . . . . .	471
83.8 Ο Μετασχηματισμός <i>Laplace</i> . . . . .	472
83.9 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	472
83.10 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	486
<b>84 Γεωμετρικές Εφαρμογές των Ολοκληρωμάτων</b>	<b>493</b>
84.1 Υπολογισμός Εμβαδών . . . . .	493
84.1.1 Καρτεσιανά εμβαδά ως προς τον άξονα των $x$ . . . . .	493
84.1.2 Καρτεσιανά εμβαδά ως προς τον άξονα των $y$ . . . . .	494
84.1.3 Παραμετρικό Εμβαδόν . . . . .	496
84.1.4 "Άπειρα" Εμβαδά . . . . .	496
84.1.5 Πολικά Εμβαδά . . . . .	496
84.2 Μήκος Τόξου . . . . .	496
84.2.1 Καρτεσιανές Συντεταγμένες . . . . .	497
84.2.2 Πολικές Συντεταγμένες . . . . .	497
84.3 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	497
84.4 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	505
<b>85 Εφαρμογές των Ολοκληρωμάτων σε Οικονομικά Προβλήματα</b>	<b>509</b>
85.1 Οριακά Μεγέθη και Ρυθμοί Μεταβολής . . . . .	509
85.2 Πλεόνασμα Καταναλωτού και Πλεόνασμα Παραγωγού . . . . .	509
85.3 Παρούσες Αξίες . . . . .	511
85.3.1 Παρούσα Αξία Συνεχούς Χρηματικής Ροής . . . . .	511
85.3.2 Παρούσα Αξία Αενάου Ροής . . . . .	511
85.3.3 Παρούσα Αξία σε Δεδομένη Χρονική Στιγμή . . . . .	511
85.4 Κατανομή Εισοδήματος . . . . .	511
85.4.1 Ορισμοί . . . . .	511
85.4.2 Βασικοί Τύποι . . . . .	512
85.5 Συνεχείς Κατανομές . . . . .	512
85.5.1 Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας . . . . .	512
85.5.2 Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής . . . . .	512
85.5.3 Παράμετροι Συνεχών Κατανομών . . . . .	512
85.5.4 Ροπογεννήτριες . . . . .	513
85.5.5 Διάμεσος Κατανομής . . . . .	513
85.6 Λυμένες Ασκήσεις . . . . .	513
85.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση . . . . .	524