

# 3

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ

# Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex

Το βασικό Πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού αφορά τη βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία εξαρτάται από πολλές μεταβλητές που υπόκεινται σε ένα σύνολο περιορισμών. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου Simplex που αναπτύχθηκε από τον Dantzig το 1947. Δίνεται έμφαση στα θεωρήματα που την πλαισιώνουν, ενώ παρουσιάζεται μέσω παραδειγμάτων η επαναληπτική της διαδικασία, κατά την οποία, σε κάθε επανάληψη, η λύση μετακινείται σε ένα νέο ακρότατο σημείο που βελτιώνει την αξία της αντικειμενικής συνάρτησης.

### 3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκε εκτενώς η επίλυση ενός Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού με δύο μεταβλητές μόνο, κάτι που μας περιορίζει στον χώρο των δύο διαστάσεων. Όπως είδαμε, η Γραφική Επίλυση μας παρέχει τη λύση σε ένα Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού καθορίζοντας την περιοχή των εφικτών λύσεων και έπειτα τον προσδιορισμό του σημείου της περιοχής αυτής που δίνει στην αντικειμενική συνάρτηση τη βέλτιστη τιμή. Ωστόσο, η αυξανόμενη πολυπλοκότητα αρκετών προβλημάτων οικονομικής φύσεως, χωρίς όμως να περιορίζεται σε τέτοιου είδους, ανάγει τον αριθμό των μεταβλητών απόφασης σε περισσότερες από δύο. Τα προβλήματα αυτά που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη επιλύονται με βάση τη μέθοδο Simplex. Η μέθοδος αυτή ανακαλύφθηκε και αναπτύχθηκε από τον Dantzig (1947) και την ομάδα του, που είχε την ονομασία SCOP (Scientific Computation of Optimum Programs), την περίοδο που εργάζονταν στο Πεντάγωνο των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, με σκοπό την ανάπτυξη βέλτιστων μηχανισμών εκπαίδευσης και συντήρησης όλου του μηχανικού εξοπλισμού. Νωρίτερα, είχαν διαμορφωθεί και επιλυθεί διάφορα προβλήματα τύπου Γραμμικού Προγραμματισμού. Τα σημαντικότερα από αυτά αφορούν το πρόβλημα της μεταφοράς (Hitchcock 1941· Koormans 1949) και το πρόβλημα της δίαιτας (Stigler 1945). Ο Dantzig ήταν όμως ο άνθρωπος που κατασκεύασε το γενικό πλαίσιο και ταυτόχρονα ανακάλυψε τη μέθοδο επίλυσής του. Μετέπειτα, διάφοροι ερευνητές ανακάλυψαν αλγορίθμους οι οποίοι βελτίωσαν τη διαδικασία επίλυσης της μεθόδου Simplex (π.χ. Khachiyan 1979· Karmakar 1984).

### 3.2 Τυπική μορφή Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

Ένα Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού θα είναι σε τυπική μορφή όταν α) είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, β) όλοι του οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη αρνητικούς τους σταθερούς τους όρους και γ) όλες οι μεταβλητές απόφασης είναι μη αρνητικές. Στην περίπτωση που κάποια ή όλες από τις παραπάνω προϋποθέσεις δεν ικανοποιείται, θα πρέπει να προχωρήσουμε σε μετατροπή του προβλήματος σε τυπική μορφή με βάση τους παρακάτω κανόνες. Πιο συγκεκριμένα:

- Όταν ζητείται ο προσδιορισμός του ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης  $f(x)$ , θέτουμε  $g(x) = -f(x)$  και μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση  $g(x)$  (δηλαδή  $\min Z = -\max W$ ).
- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη των αντίστοιχων περιορισμών με (-1) όταν υπάρχουν αρνητικοί σταθεροί όροι.
- Στην περίπτωση της ύπαρξης ανισώσεων στους περιορισμούς, εισάγουμε περιθώρια μεταβλητές (slack variables). Όταν ο περιορισμός που έχουμε είναι της μορφής  $\leq$ , τότε προστίθεται μια χαλαρή μεταβλητή, ενώ όταν ο περιορισμός είναι της μορφής  $\geq$ , τότε αφαιρείται.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου έχουμε τον περιορισμό  $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 12$ , τότε είναι ισοδύναμος της  $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + s = 12$ ,  $s \geq 0$ . Στην περίπτωση όπου η συνθήκη είναι της μορφής  $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 12$ , τότε με την προσθήκη της χαλαρής μεταβλητής θα έχουμε  $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + s = 12$ ,  $s \geq 0$

- Η τελευταία περίπτωση αφορά τις μεταβλητές χωρίς πρόσημο. Όταν η μεταβλητή μας  $x_j$  είναι αρνητική, τότε πολύ απλά θέτουμε  $x_j = -x_j^*$ . Όταν δεν υπόκειται σε κάποιον περιορισμό, τότε θέτουμε  $x_j = x_j' - x_j''$ ,  $x_j', x_j'' \geq 0$ , έχοντας υπόψη ότι ισχύει  $x_j' = \max\{0, x_j\}$ ,  $x_j'' = \min\{0, x_j\}$ .

Η γενική μορφή ενός Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να δοθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \max z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n + \dots &= b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n + \dots &= b_2 \\ \dots &= \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n + \dots &= b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Ωστόσο, με την εισαγωγή των περιθωρίων μεταβλητών, το Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού μετατρέπεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \max z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n + \dots + a_{1n+m} x_{n+m} &= b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n + \dots + a_{2n+m} x_{n+m} &= b_2 \\ \dots &= \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n + \dots + a_{mn+m} x_{n+m} &= b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Μπορούμε να δούμε τα παραπάνω μέσω του επόμενου παραδείγματος. Να γραφεί σε τυποποιημένη μορφή το παρακάτω Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} \min Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1, x_2, x_3 & \\ \text{s.t.} & \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 41 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 38 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &\geq -55 \\ x_2 + x_3 &\geq 25 \\ x_1, x_2 &\geq 0, x_3 \in R \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας όσα είπαμε, έχουμε το παρακάτω ΠΓΠ.

$$- \max Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3''$$

$$x_1, x_2, x_3$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 41$$

$$2x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' = 38$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3' - 2x_3'' + x_5 = 55$$

$$x_2 + x_3' - x_3'' - x_6 = 25$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

### 3.3 Περιγραφή της μεθόδου Simplex

Η μέθοδος Simplex, η οποία θα μπορούσε να χαρακτηριστεί και ως αλγοριθμική, περιλαμβάνει μια συγκεκριμένη διαδικασία βημάτων με βάση τα οποία οδηγούμαστε από ένα ακραίο σημείο του εφικτού χωρίου σε ένα άλλο πιο γειτονικό. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινώντας από μια αρχική κορυφή, μπορούμε μέσω της μεθόδου να προχωρήσουμε σε άλλες γειτονικές κορυφές κατά μήκος των ακμών του πολυγώνου του εφικτού συνόλου. Σε κάθε μετάβαση της μεθόδου από μία κορυφή σε μία άλλη, η μέθοδος Simplex κατορθώνει να βρει την ακμή που την οδηγεί σε μια κορυφή, η οποία δίνει βελτιωμένη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από κορυφή σε κορυφή βελτιώνεται και τελικά φτάνουμε σε μια κορυφή όπου η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται. Οποιαδήποτε άλλη κορυφή δίνει χειρότερη λύση και έτσι η διαδικασία τερματίζεται.

Πριν περάσουμε στην αναλυτική-μαθηματική παρουσίαση της συγκεκριμένης μεθόδου, θα χρησιμοποιήσουμε μια περιγραφική παρουσίαση αυτής, κατά την οποία και θεωρούμε ότι θα αναπτυχθούν τα ανάλογα ερωτήματα που θα χρειαστούν για την εισαγωγή του θεωρητικού μέρους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να επιλύσουμε το παρακάτω Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού το οποίο βρίσκεται σε τυπική μορφή. Σκοπός μας είναι να παρέχουμε μια απλή και περιγραφική διαδικασία για το πώς αυτό το πρόβλημα θα λυθεί με τη συγκεκριμένη μέθοδο.

$$\max Z = 6x_1 + 7x_2$$

$$x_1, x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα μπορούσε και να αποδοθεί ως:

$$\max Z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$x_1, x_2, x_3$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 = 12$$

$$2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Αρχικά, για να σχηματίσουμε τον πρώτο πίνακα του Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού, θα πρέπει να υπολογίσουμε/εντοπίσουμε μια βάση της λύσης.

Με τον όρο **βάση** εννοούμε τα διανύσματα της μορφής  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, 0, \dots, 0)$  ...  $(0, 0, \dots, 1)$  του διανυσματικού χώρου  $R^n$ , δηλαδή τις στήλες από τα  $x_j$  που σχηματίζουν τον  $n \times n$  πίνακα. Στη δεύτερη στήλη ( $c_B$ ) του πρώτου πίνακα, εισάγουμε τους αντίστοιχους συντελεστές της βάσης όπως αυτοί εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση  $z$ , ( $x_3 = 0$ ), ( $x_4 = 0$ ). Στην τρίτη τώρα στήλη του πρώτου πίνακα ( $x_B$ ), εισέρχεται η στήλη με το διάνυσμα των διαθέσιμων ποσοτήτων,  $b$ . Τέλος, στις επόμενες στήλες τοποθετούμε τους συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτές εμφανίζονται στο σύστημα περιορισμών του προβλήματος το οποίο βρίσκεται πάντα σε τυπική μορφή. Με βάση τα παραπάνω, ο πρώτος πίνακας Simplex σχηματίζεται ως εξής (Πίνακας 3.1):

Πίνακας 3.1

Tableau - 1

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	0
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_3$	0	12	2	3	1	0	12
$x_4$	0	8	2	1	0	1	8
	$z$						

Στη στήλη δίπλα στο  $c_j$  εμφανίζονται οι συντελεστές όπως αυτοί βρίσκονται στην αντικειμενική συνάρτηση. Οι κενές θέσεις στον πίνακα συμπληρώνονται με τα άγνωστα μέχρι στιγμής στοιχεία  $k_j$ , όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3.2).

Πίνακας 3.2

Tableau - 2

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_3$	0	12	2	3	1	0	$k_6$
	0	8	2	1	0	1	$k_7$
	$z$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	

Το ερώτημα που προκύπτει είναι πώς υπολογίζονται οι τιμές των στοιχείων αυτών. Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να κάνουμε τον διαχωρισμό και να αναφέρουμε ότι για  $k_j, j = 1, \dots, 5$ , τα στοιχεία αυτά υπολογίζονται ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $c_b \times b$ . Άρα το  $k_1 = 0 \times 12 + 0 \times 8 = 0$ , ενώ τα υπόλοιπα υπολογίζονται με βάση των εξής τύπο  $k_j = c_j - c_b \times b$ .

Εάν τώρα κάνουμε τις αντίστοιχες πράξεις, ο πίνακάς μας θα έχει την παρακάτω μορφή (Πίνακας 3.3):

Πίνακας 3.3		Tableau - 3						
Βάση		$c_j$	6	7	0	0		
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$	
$x_3$	0	12	2	3	1	0	$k_6$	
	0	8	2	1	0	1	$k_7$	
	$z$	$k_1$	$k_2 = 6 - (2 \times 0 + 2 \times 0) = 6$	$k_3 = 7 - (3 \times 0 + 1 \times 0) = 7$	$k_4 = 0$	$k_5 = 0$		

Να σημειώσουμε ότι τα υπολογισμένα στοιχεία στις θέσεις  $k_4$  και  $k_5$  είναι ίσα με μηδέν. Επίσης, θα πρέπει να αναφέρουμε πως το στοιχείο 7 της τρίτης στήλης στην τελευταία γραμμή του πίνακα αναφέρεται ως **στοιχείο οδηγός (pivot)** (Πίνακας 3.4).

Πίνακας 3.4		Tableau - 4						
Βάση		$c_j$	6	7	0	0		
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$	
$x_3$	0	12	2	3	1	0	$k_6$	
	0	8	2	1	0	1	$k_7$	
	$z$	0	6	7	0	0		

**Ορισμός 1:** Καθορίζουμε ως εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή εκείνη της οποίας η υπολογισμένη αντίστοιχα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο παράδειγμά μας, ουσιαστικά πρόκειται για τη μεταβλητή  $x_2$ . Προφανώς, καθώς αναφερόμαστε σε μια μεταβλητή που θα εισέλθει στη βάση μας, κάποια θα πρέπει να εξέλθει.

**Ορισμός 2:** Καθορίζουμε ως εξερχόμενη μεταβλητή από τη βάση εκείνη η οποία έχει τη μικρότερη τιμή  $\theta$ .

Συνεπώς, θα πρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα που αφορά το πώς θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους  $k_6$  και  $k_7$  που αναφέρονται στην παράμετρο  $\theta$ . Ο υπολογισμός γίνεται με βάση τα στοιχεία της στήλης  $b$  και της στήλης που θα εισέλθει στη βάση. Πιο συγκεκριμένα, είναι ο λόγος τους και, ως εκ τούτου, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε ως εξής:  $k_6 = \frac{12}{3} = 4$ ,  $k_7 = \frac{8}{1} = 8$ .

Άρα, τελικά, ο πίνακας έχει τη μορφή που φαίνεται παρακάτω (Πίνακας 3.5).

**Πίνακας 3.5** Tableau – 5

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_3$	0	12	2	3	1	0	4
$x_4$	0	8	2	1	0	1	8
	$z$	0	6	7	0	0	

Ως στοιχείο οδηγός λοιπόν θα μπορούσαμε να ορίσουμε αυτό που αντιστοιχεί στο στοιχείο της γραμμής όπου βρίσκεται η εξερχόμενη μεταβλητή, καθώς και η εισερχόμενη μεταβλητή (συνεπώς το 3). Αντικαθιστούμε λοιπόν στην πρώτη στήλη της βάσης την εξερχόμενη μεταβλητή με την εισερχόμενη και προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 3.6).

**Πίνακας 3.6** Tableau – 6

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_2$	7						
$x_4$	0						
	$z$						

Για να συμπληρώσουμε με στοιχεία τον δεύτερο πίνακα θα πρέπει να υπολογίσουμε ότι το στοιχείο οδηγός θα πρέπει να ισούται με τη μονάδα (διαιρείται με το 1/3). Οπότε στην παρούσα φάση ο Πίνακας 3.6 μετατρέπεται στον Πίνακα 3.7, όπως φαίνεται παρακάτω.

Πίνακας 3.7

Tableau – 7

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_2$	7	4	2/3	1	1/3	0	
$x_4$	0						
	$z$						

Κάνοντας τις κατάλληλες γραμμοπράξεις, επιθυμούμε το στοιχείο κάτω από το στοιχείο οδηγό να γίνει μηδέν. Οπότε, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με  $(-1)$  και την προσθέτουμε στη δεύτερη, συνεπώς ο Πίνακας 3.7 παίρνει την παρακάτω μορφή (Πίνακας 3.8):

Πίνακας 3.8

Tableau – 8

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_2$	7	4	2/3	1	1/3	0	$k_6$
$x_4$	0	4	4/3	0	-1/3	1	$k_7$
	$z$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική, υπολογίζουμε τις τιμές των  $k_j, j = 1, \dots, 7$  και προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 3.9).

Πίνακας 3.9

Tableau – 9

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_2$	7	4	2/3	1	1/3	0	$k_6$
$x_4$	0	4	4/3	0	-1/3	1	$k_7$
	$z$	28	4/3	0	-7/3	0	

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η μεγαλύτερη θετική τιμή αντιστοιχεί στη μεταβλητή  $x_1$ . Διαιρώντας τώρα με τις τιμές της μεταβλητής, παίρνουμε τα  $k_6$  και  $k_7$ , όπως φαίνεται και στον Πίνακα 3.10:



Πίνακας 3.10

Tableau - 10

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_2$	7	4	2/3	1	1/3	0	6
$x_4$	0	4	4/3	0	-1/3	1	3
	$z$	28	4/3	0	-7/3	0	

Η εισερχόμενη μεταβλητή είναι η  $x_1$ , ενώ η εξερχόμενη η  $x_4$ . Πολλαπλασιάζοντας με 3/4, παίρνουμε το στοιχείο οδηγό, το οποίο βρίσκεται στη δεύτερη στήλη και στην τρίτη γραμμή του κύριου μέρους του πίνακα Simplex, όπως απεικονίζεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3.11).

Πίνακας 3.11

Tableau - 11

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_2$	7	4	2/3	1	1/3	0	-
$x_1$	6	3	1	0	-1/4	3/4	-
	$z$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	

Εάν τώρα πολλαπλασιάσουμε τη γραμμή στην οποία αναφέρεται το στοιχείο  $x_1$  με (-2/3) και την προσθέσουμε στην από πάνω γραμμή, θα προκύψει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 3.12):

Πίνακας 3.12

Tableau - 12

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_2$	7	2	0	1	1/2	-1/2	-
$x_1$	6	3	1	0	-1/4	3/4	-
	$z$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	

Υπολογίζοντας τώρα τις τιμές των  $k_j$ , προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 3.13):

Πίνακας 3.13

Tableau – 13

Βάση		$c_j$	6	7	0	0	
$x_B$	$c_B$	$b$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\theta$
$x_2$	7	2	0	1	1/2	-1/2	-
$x_1$	6	3	1	0	-1/4	3/4	-
	$z$	32	0	0	-2	-1	

Η διαδικασία μας μέσω της μεθόδου Simplex σε αυτό το σημείο έχει τελειώσει, καθώς στη γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης οι υπολογισμένες ποσότητες έχουν τιμές μικρότερες ή ίσες του μηδενός. Η κορυφή της βέλτιστης λύσης δίνεται από τα στοιχεία της στήλης  $b$  και της πρώτης στήλης.

### 3.4 Θεωρητική προσέγγιση της μεθόδου Simplex

Σε αυτό το τμήμα του κεφαλαίου θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια περισσότερο θεωρητική προσέγγιση σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει μια εφικτή λύση ενός Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού, καθώς και με ποιον τρόπο επιτυγχάνεται η συγκεκριμένη λύση.

Αρχικά, παρατίθενται κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν βασικά στοιχεία για την κατανόηση της λύσης:

- **Κυρτό σύνολο:** Ένα σύνολο  $C$  καλείται κυρτό εάν  $\forall x_1, x_2 \in C \exists x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C, \lambda \in [0, 1]$ .
- **Εφικτό σημείο** καλείται το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες του ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς. Ο χώρος των εφικτών σημείων καλείται εφικτός χώρος, ενώ βέλτιστο σημείο αυτό που μας δίνει τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- **Εσωτερικό σημείο συνόλου:** Εάν υπάρχει ανοικτή σφαίρα  $(x, \varepsilon) \in C, \forall \varepsilon > 0$ , τότε ένα σημείο θα καλείται συνοριακό όταν  $\exists G(x, \varepsilon) \in C, \forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \varepsilon > 0, G(x, \varepsilon) \cap C = \emptyset$
- **Συνοριακό σημείο** θα καλείται ένα σημείο εάν δεν υπάρχει ανοικτή σφαίρα  $G(x, \varepsilon) \in C, \forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \varepsilon > 0, G(x, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$ .
- **Ακρότατο συνοριακό σημείο** καλείται αυτό που δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός κυρτός συνδυασμός δύο διακεκριμένων σημείων του συνόλου.

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει στα Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού, οι εξισώσεις των περιορισμών μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{11}x_1 & + & \dots & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & \dots & + & a_{1n+m}x_{n+m} & = & b_1 \\
 a_{21}x_1 & + & \dots & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2n}x_n & + & \dots & + & a_{2n+m}x_{n+m} & = & b_2 \\
 \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & = & \dots \\
 a_{m1}x_1 & + & \dots & \dots & + & a_{mj}x_j & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & \dots & + & a_{mn+m}x_{n+m} & = & b_m
 \end{array}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν με τη μορφή πινάκων ως εξής:  
 $Ax = b^1$  όπου:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1n+m} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & \dots & a_{mn+m} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \\ \dots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Εάν θελήσουμε τώρα να δώσουμε τον πίνακα **A** υπό τη μορφή ενός διανύσματος, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι  $A = [a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_{n+m}]$ . Αν θεωρήσουμε τώρα ότι κάποιες από τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε ορισμένα από τα  $n$  διανύσματα του πίνακα **A** ισούνται με μηδέν, τότε θα έχουμε μία μόνο λύση από τις εναπομείνουσες μεταβλητές (βασικές), εάν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.<sup>2</sup>

Όπως έχουμε ήδη πει, η κανονική μορφή ενός Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να δοθεί με την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{array}{l}
 \max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\
 a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + \dots = b_1 \\
 a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n + \dots = b_2 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots = \dots \\
 a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n + \dots = b_m \\
 x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
 \end{array}$$

Ωστόσο, το συγκεκριμένο πρόβλημα με την εισαγωγή των αρνητικών  $m$  μεταβλητών στον αριθμό περιθωρίων μεταβλητών μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

$$\begin{array}{l}
 \max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\
 a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + \dots + a_{1n+m}x_{n+m} = b_1 \\
 a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n + \dots + a_{2n+m}x_{n+m} = b_2 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots = \dots \\
 a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n + \dots + a_{mn+m}x_{n+m} = b_m \\
 x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
 \end{array}$$

1. Εάν θέσουμε μηδέν τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στον Πίνακα A, λαμβάνουμε ένα προφανές εφικτό σημείο.
2. Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα καλούνται αυτά που ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$\sum_{i=1}^N a_i u_i = 0, u_1 = u_2 = \dots = u_N = 0.$$