Δ2

Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Προεπισκόπηση κεφαλαίου Προηγουμένως παρουσιάσαμε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και μέσω απεικονίσεων διαπιστώσαμε τη χρησιμότητά τους στην περιγραφή του τρόπου μεταβολής φυσικών και βιολογικών συστημάτων στον χρόνο ή στον χώρο. Όπως θα διαπιστώσετε αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο, οι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης είναι εξίσου εφαρμόσιμες και χρησιμοποιούνται ευρέως για παρόμοιους σκοπούς σε πολλούς τομείς. Αφού παρουσιάσουμε κάποιες θεμελιώδεις έννοιες που αποτελούν την βάση των γραμμικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, θα στραφούμε στις γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, που συμβαίνει να είναι οι περισσότερο εφαρμόσιμες από όλες τις διαφορικές εξισώσεις. Όταν μάθουμε πώς να λύνουμε αυτές τις εξισώσεις και τα προβλήματα αρχικών τιμών που σχετίζονται με αυτές, θα εξετάσουμε μερικά από τα πολλά μαθηματικά μοντέλα που βασίζονται στις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Το κεφάλαιο κλείνει με μια αναφορά στις συναρτήσεις μεταφοράς, που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση και τον σχεδιασμό μηχανικών και ηλεκτρικών ταλαντωτών.

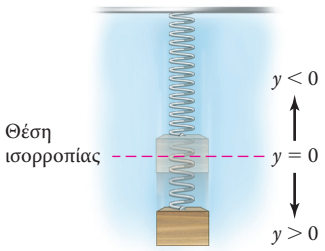
Δ2.1 Βασικές έννοιες

Πολλά από αυτά που μάθατε προηγουμένως για τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης θα σας φανούν χρήσιμα στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Θα συναντήσετε για άλλη μια φορά την έννοια της *γενικής λύσης*, η οποία είναι μια ολόκληρη οικογένεια συναρτήσεων που ικανοποιούν την εξίσωση. Πολλές όμως από τις μεθόδους που εφαρμόζονται για την εύρεση των γενικών λύσεων των εξισώσεων πρώτης τάξης δεν ισχύουν για τις εξισώσεις δεύτερης τάξης. Συνεπώς το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου αναλώνεται στην ανάπτυξη νέων μεθόδων λύσης. Παράλληλα δίνουμε βάρος σε πολλές εφαρμογές των εξισώσεων δεύτερης τάξης.

Μια γρήγορη επισκόπηση

Η πιο συνηθισμένη ίσως πηγή διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης είναι ο δεύτερος νόμος κίνησης του Νεύτωνα, ο οποίος διέπει την κίνηση συνήθων αντικειμένων (όπως πλανήτες, μπάλες μπιλιάρδου ή σταγόνες βροχής). Συνεπώς το μεγαλύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου έχει αφιερωθεί στην ανάπτυξη μαθηματικών διατυπώσεων *συστημάτων* που βρίσκονται σε κίνηση ή έχουν συμπεριφορά η οποία εξαρτάται από τον χρόνο. Όπως θα δείτε ένα *σύστημα* μπορεί να είναι ένα κινούμενο αντικείμενο όπως μια πέτρα που πέφτει, ένα εκκρεμές που ταλαντεύεται ή μια μάζα σε ένα ελατήριο. Λιγότερο προφανές, ένα σύστημα μπορεί να είναι ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που παράγει ραδιοκύματα, η καταδίωξη ενός πλοίου, ή τα όργανα ενός ατόμου που απορροφούν ένα φάρμακο.

Ορίστε ένα παράδειγμα συστήματος. Φανταστείτε ένα τούβλο μάζας m που κρέμεται σε κατάσταση ηρεμίας από ένα σταθερό σημείο με ένα ελατήριο. Αν το τούβλο απομακρυνθεί από την θέση ηρεμίας και αφεθεί, τότε ταλαντώνεται πάνω και κάτω κατά μία γραμμή (Σχήμα Δ2.1). Ονομάζουμε $y(t)$ τη θέση του τούβλου σε σχέση με τη θέση ηρεμίας t χρονικές μονάδες μετά την ελευθέρωση. Όταν το ελατήριο είναι τεντωμένο κάτω από τη θέση ηρεμίας, η θέση του τούβλου $y(t)$ είναι θετική.



Σχήμα Δ2.1

➤ Ο όρος $my''(t)$ ονομάζεται *όρος αδράνειας* διότι αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις ($F = 0$), τότε η εξίσωση γίνεται $my''(t) = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι η y' (ταχύτητα) είναι σταθερή. Σε αυτή την περίπτωση το αντικείμενο διατηρεί την αρχική του ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή λόγω της αδράνειάς του.

Ο δεύτερος νόμος κίνησης του Νεύτωνα διέπει την κίνηση του τούβλου. Λέει ότι

$$\underbrace{\text{μάζα}}_{m} \cdot \underbrace{\text{επιτάχυνση}}_{a = y''} = \underbrace{\text{άθροισμα δυνάμεων.}}_{F}$$

Ξέρουμε ότι η επιτάχυνση είναι $a(t) = y''(t)$. Τότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή

$$\underbrace{my''(t)}_{\substack{\text{όρος}\\ \text{αδράνειας}}} = \underbrace{F}_{\substack{\text{άθροισμα}\\ \text{δυνάμεων}}},$$

όπου οι δυνάμεις που περιλαμβάνονται στο F (όπως η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου, η αντίσταση του αέρα και οι εξωτερικές δυνάμεις) μπορεί να εξαρτώνται από τον χρόνο t, την θέση y, και την ταχύτητα y'.

Θα μελετήσουμε αναλυτικά το σύστημα ελατηρίου-τούβλου στην Ενότητα Δ2.4. Όπως θα δείτε, μια πλήρης μαθηματική διατύπωση αυτού του συστήματος περιλαμβάνει μια διαφορική εξίσωση με όλες τις σχετικές εξωτερικές δυνάμεις *μαζί με* ένα σύνολο αρχικών συνθηκών. Οι αρχικές συνθήκες προσδιορίζουν την αρχική θέση και ταχύτητα του τούβλου. Ένα συνηθισμένο σύνολο αρχικών συνθηκών έχει τη μορφή $y(0) = A$, $y'(0) = B$, όπου τα A και B είναι δοσμένες σταθερές.

Ο συνδυασμός μιας διαφορικής εξίσωσης μαζί με τις αρχικές συνθήκες ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών**. Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να μάθουμε να λύνουμε προβλήματα αρχικών τιμών δεύτερης τάξης.

Ορολογία

Θυμηθείτε ότι η **τάξη** μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η υψηλότερη τάξη που εμφανίζεται σε μια παράγωγο της εξίσωσης. Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με **γραμμικές** διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης της μορφής

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t). \tag{1}$$

Σε αυτή την εξίσωση, τα p, q, και f είναι συγκεκριμένες συναρτήσεις του t οι οποίες είναι συνεχείς σε κάποιο διάστημα ενδιαφέροντος που το ονομάζουμε I. Η εξίσωση είναι γραμμική επειδή η άγνωστη συνάρτηση y και οι παράγωγοί της εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη και όχι σε γινόμενα μεταξύ τους ή ως ανεξάρτητες μεταβλητές άλλων συναρτήσεων. Εξισώσεις που δεν μπορούν να τεθούν στην μορφή αυτή ονομάζονται **μη γραμμικές**. Λύση της εξίσωσης (1) είναι η εύρεση μιας συνάρτησης y που την ικανοποιεί στο διάστημα I.

Μια άλλη χρήσιμη επισήμανση αφορά τη συνάρτηση f του δευτέρου μέλους της εξίσωσης (1). Μια εξίσωση στην οποία $f(t) = 0$ στο διάστημα ενδιαφέροντος λέγεται **ομογενής**. Μια εξίσωση στην οποία η f δεν είναι εκ ταυτότητος μηδέν είναι **μη ομογενής**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Κατάταξη διαφορικών εξισώσεων** Κατατάξτε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

➤ Αν δεν υφίσταται λόγος σύγχυσης συνηθίζουμε να απλοποιούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή και να γράφουμε y'', y', και y αντί των $y''(t)$, $y'(t)$, και $y(t)$, αντίστοιχα.

α. $my'' = -0.001y' - 2.1y$ (Αυτή εξίσωση περιγράφει την κίνηση ενός τούβλου μάζας m που ταλαντώνεται σε ένα ελατήριο παρουσία τριβών.)

β. $my'' = mg - 0.05(y')^2$ (Αυτή εξίσωση περιγράφει την κίνηση ενός αντικειμένου μάζας m σε ένα βαρυτικό πεδίο λόγω αντίστασης του αέρα, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.)

ΛΥΣΗ

α. Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $y'' + (0.001/m)y' + (2.1/m)y = 0$, και βλέπουμε ότι ανάγεται στη δοσμένη μορφή (1). Ο όρος με τη μέγιστη τάξη παραγώγου είναι y''; συνεπώς η εξίσωση είναι δεύτερης τάξης. Είναι γραμμική διότι το y και οι παράγωγοί του εμφανίζονται στην πρώτη δύναμη και δεν είναι γινόμενα ή συνθέσεις άλλων συναρτήσεων. Πρόκειται για ομογενή εξίσωση αφού δεν υπάρχει όρος ανεξάρτητος του y και των παραγώγων του.

β. Όπως στο μέρος (α), η εξίσωση είναι δεύτερης τάξης. Είναι μη γραμμική διότι το y' εμφανίζεται στην δεύτερη δύναμη και είναι μη ομογενής αφού ο όρος mg είναι ανεξάρτητος του y και των παραγώγων του.

Σχετικές ασκήσεις 9–12 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Να κατατάξετε τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς την τάξη τους, τη γραμμικότητα και την ομογένεια. Α: $y' + 3y = 4t^2$, Β: $y'' - 4y' + 2y = 0$. ◄

Ομογενείς εξισώσεις και γενικές λύσεις

➤ Σε μερικά βιβλία αναφέρονται οι λύσεις μιας ομογενούς εξίσωσης ως *συμπληρωματικές λύσεις* ή *συμπληρωματικές συναρτήσεις*.

Στρεφόμαστε τώρα στις γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης της μορφής

$$y'' + py' + qy = 0,$$

και εξετάζουμε τι σημαίνει για μια συνάρτηση να αποτελεί λύση μιας τέτοιας εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Επαλήθευση λύσεων** Θεωρήστε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$t^2y'' - ty' - 3y = 0, \quad \text{για } t > 0.$$

➤ Η εξίσωση στο Παράδειγμα 2 είναι γραμμική. Μπορεί να γραφεί στη μορφή $y'' + py' + qy = 0$ διαιρώντας την εξίσωση με t^2, όπου $t > 0$.

α. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι οι συναρτήσεις $y = t^3$ και $y = \dfrac{1}{t}$ είναι λύσεις της εξίσωσης.

β. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι η συνάρτηση $y = 100t^3$ είναι μια λύση της εξίσωσης.

γ. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι η συνάρτηση $y = 6t^3 + \dfrac{8}{t}$ είναι μια λύση της εξίσωσης.

ΛΥΣΗ

α. Αντικαθιστούμε $y = t^3$ στην εξίσωση και κάνουμε τις παρακάτω πράξεις.

$$\begin{aligned} &t^2\underbrace{(t^3)''}_{y''=6t} - t\underbrace{(t^3)'}_{y'=3t^2} - 3\underbrace{(t^3)}_{y=t^3} \\ &= t^2(6t) - t(3t^2) - 3t^3 \\ &= t^3(6 - 3 - 3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Βλέπουμε πως η $y = t^3$ ικανοποιεί την εξίσωση για όλα τα $t > 0$.
Αντικαθιστούμε $y = t^{-1}$ στην εξίσωση και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &t^2\underbrace{(t^{-1})''}_{y''=2t^{-3}} - t\underbrace{(t^{-1})'}_{y'=-t^{-2}} - 3\underbrace{(t^{-1})}_{y=t^{-1}} \\ &= t^2(2t^{-3}) + t(t^{-2}) - 3t^{-1} \\ &= t^{-1}(2 + 1 - 3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $y(t) = t^{-1}$ ικανοποιεί την εξίσωση για όλα τα $t > 0$.

β. Θυμηθείτε ότι $(cy(t))' = cy'(t)$ για πραγματικούς αριθμούς c. Άρα αναμένεται ότι πολλαπλασιάζοντας την λύση $y(t) = t^3$ με τη σταθερά 100 θα προκύψει μια άλλη λύση. Μια γρήγορη επαλήθευση δείχνει ότι

$$t^2\underbrace{(100t^3)''}_{y''=600t} - t\underbrace{(100t^3)'}_{y'=300t^2} - 3\underbrace{(100t^3)}_{y=100t^3} = 100t^3(6 - 3 - 3) = 0.$$

Η συνάρτηση $y = 100t^3$ είναι μια λύση. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το 100 με μια σταθερά c και να έχουμε επίσης ως λύση την $y = ct^3$. Παρομοίως η $y = ct^{-1}$ είναι μια λύση για κάθε σταθερά c.

γ. Από τα μέρη (α) και (β) γνωρίζουμε πως οι $y = t^3$ και $y = t^{-1}$ είναι λύσεις της εξίσωσης. Εξετάζουμε τώρα αν μια σταθερά πολλαπλασιασμένη με την μια λύση συν μια σταθερά πολλαπλασιασμένη με την άλλη λύση είναι επίσης λύση της εξίσωσης. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$t^2\underbrace{(6t^3 + 8t^{-1})''}_{y'' = 36t + 16t^{-3}} - t\underbrace{(6t^3 + 8t^{-1})'}_{y' = 18t^2 - 8t^{-2}} - 3\underbrace{(6t^3 + 8t^{-1})}_{y = 6t^3 + 8t^{-1}}$$

$$= t^3(36 - 18 - 18) + t^{-1}(16 + 8 - 24)$$

$$= 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση, το άθροισμα των πολλαπλάσιων των δύο λύσεων επί μια σταθερά είναι επίσης μια λύση για οποιαδήποτε σταθερά.

Σχετικές ασκήσεις 13–22 ◄

➤ Παρατηρήστε ότι η μηδενική λύση $y = 0$ είναι πάντα μια λύση μιας ομογενούς εξίσωσης. Έτσι όταν αναφερόμαστε σε λύσεις μιας ομογενούς εξίσωσης, θα εννοούμε πάντα τη μη μηδενική (συχνά ονομάζεται *μη τετριμμένη*) λύση.

Στο Παράδειγμα 2 ανακύπτουν ορισμένα θεμελιώδη ερωτήματα για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και δίνονται κάποιες επισημάνσεις για τις λύσεις. Πόσες λύσεις έχει μια εξίσωση δεύτερης τάξης; Πότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μια λύση επί μια σταθερά (όπως στο Παράδειγμα 2β) και να πάρουμε μια ακόμη λύση; Πότε μπορούμε να προσθέσουμε δύο λύσεις (όπως στο Παράδειγμα 2γ) και να πάρουμε μια ακόμη λύση; Εστιάζοντας στις ομογενείς εξισώσεις, το θεώρημα που ακολουθεί αρχίζει να απαντά σε αυτά τα ερωτήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ2.1 Αρχή της υπέρθεσης (ή επαλληλίας)
Θεωρούμε ότι οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης δεύτερης τάξης $y'' + py' + qy = 0$. Τότε η συνάρτηση $y = c_1y_1 + c_2y_2$ είναι επίσης μια λύση της ομογενούς εξίσωσης, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Απόδειξη: Επαληθεύουμε με αντικατάσταση ότι η συνάρτηση $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ικανοποιεί την εξίσωση.

$$(c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2)$$

$$= c_1y_1'' + c_1py_1' + qc_1y_1 + c_2y_2'' + pc_2y_2' + qc_2y_2 \quad \text{Ανάπτυγμα παραγώγων, ομαδοποίηση όρων}$$

$$= c_1\underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{\text{ισούται με 0· το } y_1 \text{ είναι λύση}} + c_2\underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{\text{ισούται με 0· το } y_2 \text{ είναι λύση}} \quad \text{Παράγοντες } c_1 \text{ και } c_2.$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 \quad y_1 \text{ και } y_2 \text{ είναι λύσεις.}$$

$$= 0$$

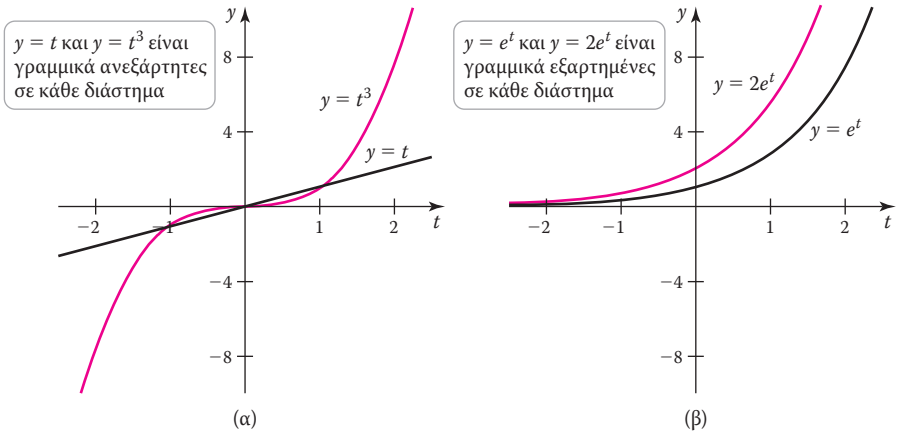
Διαπιστώσαμε ότι η $y = c_1y_1 + c_2y_2$ είναι μια λύση της ομογενούς εξίσωσης όταν τα y_1 και y_2 είναι λύσεις. ◄

Μια συνάρτηση της μορφής $c_1y_1 + c_2y_2$ ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** ή **υπέρθεση** των y_1 και y_2. Το Θεώρημα Δ2.1 λέει ότι γραμμικοί συνδυασμοί των λύσεων μιας γραμμικής ομογενούς εξίσωσης είναι επίσης λύσεις. Αυτή η σημαντική ιδιότητα εφαρμόζεται μόνο σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Εξετάζουμε τώρα αν ένας γραμμικός συνδυασμός όπως ο $c_1y_1 + c_2y_2$ ισχύει για *όλες* τις λύσεις μιας ομογενούς εξίσωσης. Ο παρακάτω ορισμός είναι σημαντικός.

ΟΡΙΣΜΟΣ Γραμμική εξάρτηση/ανεξαρτησία δύο συναρτήσεων
Δύο συναρτήσεις $\{f_1(t), f_2(t)\}$ είναι **γραμμικά εξαρτημένες** σε ένα διάστημα I αν η μια συνάρτηση είναι ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιο της άλλης συνάρτησης, για όλα τα t του I, δηλαδή για κάποια μη μηδενική σταθερά c, να ισχύει $f_1(t) = cf_2(t)$, για όλα τα t του I. Διαφορετικά, οι $\{f_1(t), f_2(t)\}$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητες** στο I.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $\{t, t^3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα διότι δεν υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $t = ct^3$, για κάθε t του διαστήματος (Σχήμα Δ2.2α). Ομοίως οι συναρτήσεις $\{\sin t, \cos t\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα, ενώ οι $\{e^t, 2e^t\}$ είναι πολλαπλάσιο η μία της άλλης και είναι γραμμικά εξαρτημένες σε κάθε διάστημα (Σχήμα Δ2.2β).



Σχήμα Δ2.2

Βάσει του ίδιου ισχυρισμού, τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$\{\sin at, \cos bt\}$ στο $(-\infty, \infty)$, για πραγματικούς αριθμούς $a \neq 0$ και b,
$\{e^{at}, e^{bt}\}$ στο $(-\infty, \infty)$, για πραγματικούς αριθμούς $a \neq b$,
$\{t^p, t^q\}$ στο $(0, \infty)$, για πραγματικούς αριθμούς $p \neq q$.

Μια παρένθεση Η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας είναι σημαντική σε πολλά πεδία των μαθηματικών και εφαρμόζεται σε άλλες μαθηματικές έννοιες πέρα από τις συναρτήσεις. Πιο τυπικά, n συναρτήσεις ενός συνόλου $\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\}$ είναι *γραμμικά εξαρτημένες* σε ένα διάστημα I αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *όχι όλες μηδενικές*, τέτοιες ώστε

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0, \quad \text{για όλα τα } t \text{ του } I.$$

Ισοδύναμα, αν μια συνάρτηση ενός συνόλου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων συναρτήσεων, τότε οι συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες. Αν αυτή η ιδιότητα ισχύει μόνο αν $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, τότε οι συναρτήσεις είναι *γραμμικά ανεξάρτητες*. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $\{1, t, t^2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ενώ οι συναρτήσεις $\{t, t^2, 3t^2 - 2t\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες στο $(-\infty, \infty)$. Αν $n = 2$, αυτός ο πιο γενικός ορισμός περιορίζεται στον ορισμό που δόθηκε πιο πάνω.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Είναι γραμμικά εξαρτημένα ή ανεξάρτητα τα ακόλουθα ζεύγη συναρτήσεων σε κάθε διάστημα $[A, b]$? $\{1, \sin t\}$, $\{t^5, -t^5\}$, $\{e^{2t}, -e^{-2t}\}$, $\{\sin^2 t, \cos^2 t\}$ ➤

Όπως αναφέρεται στο επόμενο θεώρημα, η γραμμική ανεξαρτησία είναι το κλειδί για να εξετάσουμε αν έχουμε βρει όλες τις λύσεις μιας γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ2.2
Αν οι p και q είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I, και y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης $y'' + py' + qy = 0$, τότε όλες οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, όπου τα c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

➤ Η απόδειξη του Θεωρήματος Δ2.2 παρατίθεται συνήθως σε πιο προχωρημένα μαθήματα διαφορικών εξισώσεων. Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για προβλήματα αρχικών τιμών που δίνονται στο τέλος αυτής της ενότητας.

➤ Από εννοιολογική άποψη, για να λύσουμε μια εξίσωση πρώτης τάξης, πρέπει να «αναιρέσουμε» μια παράγωγο, πράγμα που απαιτεί μια ολοκλήρωση και παράγει μια αυθαίρετη σταθερά στη γενική λύση. Για να λύσουμε μια εξίσωση n-οστής τάξης, πρέπει να «αναιρέσουμε» n παραγώγους, πράγμα που απαιτεί n ολοκληρώσεις και παράγει n αυθαίρετες σταθερές στη γενική λύση.

Αν y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, η συνάρτηση $y = c_1y_1 + c_2y_2$, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, ονομάζεται **γενική λύση** της ομογενούς εξίσωσης και εκφράζει όλες τις δυνατές ομογενείς λύσεις.

Σημειώστε εδώ την διαφορά. Η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης περιλαμβάνει μια αυθαίρετη σταθερά. Η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης περιλαμβάνει δύο αυθαίρετες σταθερές και η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης n-οστής τάξης περιλαμβάνει n αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 **Γενικές λύσεις**

α. Οι συναρτήσεις $\{e^t, e^{t+2}\}$ είναι λύσεις της εξίσωσης $y'' - y = 0$, για $-\infty < t < \infty$. Αν είναι δυνατόν, βρείτε μια γενική λύση της εξίσωσης.

β. Οι συναρτήσεις $\{e^{4t}, e^{-4t}\}$ είναι λύσεις της εξίσωσης $y'' - 16y = 0$, για $-\infty < t < \infty$. Δείξτε ότι η $y = \cosh 4t$ είναι επίσης μια λύση.

ΛΥΣΗ

α. Επειδή $e^{t+2} = e^2e^t$, παρατηρούμε ότι η e^{t+2} είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο της e^t για όλα τα t στο $(-\infty, \infty)$. Άρα, οι συναρτήσεις $\{e^t, e^{t+2}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες και δεν μπορούμε να ορίσουμε μια γενική λύση μόνο από αυτή την πληροφορία. Χρειάζεται μια άλλη γραμμικά ανεξάρτητη λύση για να βρούμε τη γενική λύση. (Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι η e^{-t} είναι μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση.)

β. Οι συναρτήσεις $\{e^{4t}, e^{-4t}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $(-\infty, \infty)$ επειδή δεν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $e^{4t} = c\,e^{-4t}$, για όλα τα t στο $(-\infty, \infty)$. Συνεπώς από το Θεώρημα Δ2.2 μπορούμε να γράψουμε όλες τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης στη μορφή $c_1e^{4t} + c_2e^{-4t}$. Για παράδειγμα αν πάρουμε $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, παρατηρούμε ότι η $\cosh 4t = \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-4t}$ είναι επίσης μια λύση.

Σχετικές ασκήσεις 23–26 ◀

➤ Η εξίσωση στο Παράδειγμα 4 και περισσότερες γενικές εξισώσεις ταλαντωτών εμφανίζονται στην Ενότητα Δ2.4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 **Μια εξίσωση ταλαντωτή** Η εξίσωση $y'' + 9y = 0$ περιγράφει την κίνηση ενός ταλαντωτή όπως ένα τούβλο σε ένα ελατήριο με απουσία εξωτερικών δυνάμεων όπως η τριβή. Οι συναρτήσεις $\{\sin 3t, \cos 3t\}$ είναι λύσεις της εξίσωσης για $-\infty < t < \infty$. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης.

ΛΥΣΗ Οι συναρτήσεις $\{\sin 3t, \cos 3t\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $(-\infty, \infty)$ διότι δεν είναι δυνατό να βρεθεί σταθερά C τέτοια ώστε $\sin 3t = c \cos 3t$, για όλα τα t στο $(-\infty, \infty)$. Συνεπώς η γενική λύση μπορεί να γραφεί στη μορφή $y = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t$, όπου τα c_1 και c_2 είναι πραγματικοί αριθμοί.

Σχετικές ασκήσεις 23–26 ◀

Μη ομογενείς εξισώσεις και γενικές λύσεις

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στις γραμμικές μη ομογενείς εξισώσεις της μορφής

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t),$$

Όπου η συνάρτηση f δεν είναι εκ ταυτότητος μηδέν στο διάστημα που μας ενδιαφέρει. Όπως και προηγουμένως, θεωρούμε ότι οι p, q, και f είναι συνεχείς σε κάποιο διάστημα I. Υποθέτουμε προς το παρόν ότι έχουμε βρει μια συνάρτηση που ικανοποιεί αυτή την εξίσωση. Μια τέτοια λύση ονομάζεται **μερική λύση**, και οι μέθοδοι εύρεσης των ειδικών λύσεων εξετάζονται στην Ενότητα Δ2.3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 **Άλλη μία εξίσωση ταλαντωτή** Στηριζόμενοι στο Παράδειγμα 4, η εξίσωση $y'' + 9y = 14 \sin 4t$ περιγράφει ένα σύστημα ελατηρίου-τούβλου που διεγείρεται από μια εξωτερική δύναμη $f(t) = 14 \sin 4t$ απουσία τριβών. Δείξτε ότι η $y_p = -2 \sin 4t$ είναι μια μερική λύση της εξίσωσης.

ΛΥΣΗ Με αντικατάσταση $y_p = -2\sin 4t$ στη μη ομογενή εξίσωση, έχουμε

$$\begin{aligned} y_p'' + 9y_p &= (-2\sin 4t)'' + 9(-2\sin 4t) && \text{αντικατάσταση } y_p. \\ &= -2(-16\sin 4t) - 18\sin 4t && (\sin 4t)'' = -16\sin 4t \\ &= 14\sin 4t. && \text{απλοποίηση} \end{aligned}$$

Συνεπώς η y_p ικανοποιεί τη μη ομογενή εξίσωση και είναι μια μερική λύση.

Σχετικές ασκήσεις 27–30 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Η $y_p = -1$ είναι μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' - y = 1$; ◄

Σκοπός μας είναι να βρούμε την γενική λύση μιας δοσμένης μη ομογενούς εξίσωσης, δηλαδή μια οικογένεια συναρτήσεων, που όλες ικανοποιούν την εξίσωση. Πριν από αυτό μπορούμε να απαντήσουμε σε μια σημαντική πρακτική ερώτηση. Πόσες μερικές λύσεις έχει μια εξίσωση; Πότε θα σταματήσουμε να τις αναζητούμε; Το Θεώρημα Δ2.3 δίνει τις απαντήσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ2.3
Αν y_p και z_p είναι μερικές λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης $y'' + py' + qy = f$, τότε οι y_p και z_p διαφέρουν κατά μια λύση της ομογενούς εξίσωσης.

Απόδειξη: Έστω $w = y_p - z_p$ η διαφορά δύο μερικών λύσεων ενώ οι y_p και z_p ικανοποιούν και οι δύο την μη ομογενή εξίσωση. Με αντικατάσταση του w στη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} w'' + pw' + qw &= (y_p - z_p)'' + p(y_p - z_p)' + q(y_p - z_p) && \text{αντικατάσταση } w = y_p - z_p. \\ &= \underbrace{\left(y_p'' + py_p' + qy_p\right)}_{F} - \underbrace{\left(z_p'' + pz_p' + qz_p\right)}_{F} && \text{ομαδοποίηση μερικών λύσεων} \\ &= f - f = 0. \end{aligned}$$

◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4 Επαληθεύστε ότι οι $y_p = -1$ και $z_p = e^t - 1$ είναι μερικές λύσεις της $y'' - y = 1$ και η διαφορά τους $y_p - z_p = e^t$ είναι μια λύση της ομογενούς εξίσωσης $y'' - y = 0$. ◄

Η πρακτική σημασία του θεωρήματος είναι ότι αν βρείτε μια μερική λύση, τότε σταματήστε να ψάχνετε. Οποιεσδήποτε δύο μερικές λύσεις πρέπει να διαφέρουν κατά μια λύση της ομογενούς εξίσωσης και λύσεις της ομογενούς εξίσωσης εμφανίζονται ήδη στη γενική λύση.

Είμαστε τώρα σε θέση να περιγράψουμε πώς θα βρούμε τη γενική λύση μιας μη ομογενούς εξίσωσης: Βρίσκουμε τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης $c_1y_1 + c_2y_2$ και προσθέτουμε σε αυτήν *οποιαδήποτε* μερική λύση.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ2.4
Υποθέτουμε ότι οι y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $y'' + py' + qy = 0$, και y_p είναι *οποιαδήποτε* λύση της αντίστοιχης μη ομογενούς εξίσωσης $y'' + py' + qy = f$. Τότε η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y = \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2}_{\text{λύση της ομογενούς εξίσωσης}} + \underbrace{y_p}_{\text{μερική λύση}},$$

όπου c_1 και c_2 τυχαίες σταθερές.

Απόδειξη: Σημειώστε ότι λόγω του Θεωρήματος Δ2.3 μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε μερική λύση για να διαμορφώσουμε τη γενική λύση. Με αντικατάσταση, επαληθεύουμε ότι η $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$ ικανοποιεί τη μη ομογενή εξίσωση. Θυμόμαστε ότι y_1 και y_2 ικανοποιεί την $y'' + py' + qy = 0$ και y_p ικανοποιεί την $y'' + py' + qy = f$.

$$y'' + py' + qy$$

$$= (c_1y_1 + c_2y_2 + y_p)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2 + y_p)' + q(c_1y_1 + c_2y_2 + y_p)$$

αντικατάσταση λύσης

$$= c_1\Big(\underbrace{y_1'' + py_1' + qy_1}_{0}\Big) + c_2\Big(\underbrace{y_2'' + py_2' + qy_2}_{0}\Big) + \Big(\underbrace{y_p'' + py_p' + qy_p}_{F}\Big)$$

αναδιάταξη όρων

$$= 0 + 0 + f = f$$

επαλήθευση λύσεων

Βλέπουμε ότι η προτεινόμενη γενική λύση ικανοποιεί τη μη ομογενή εξίσωση, όπως ισχυριστήκαμε. Παρατηρήστε ότι η γενική λύση της μη της ομογενούς εξίσωσης περιέχει επίσης δύο αυθαίρετες σταθερές. ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 **Γενική λύση μιας εξίσωσης ταλαντωτή** Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης ταλαντωτή $y'' + 9y = 14 \sin 4t$ (Παράδειγμα 5).

ΛΥΣΗ Από το Παράδειγμα 4 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης είναι $y_1 = \sin 3t$ και $y_2 = \cos 3t$. Χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 5, γνωρίζουμε ότι μια μερική λύση είναι $y_p = -2 \sin 4t$. Από το Θεώρημα Δ2.4, η γενική λύση της εξίσωσης ταλαντωτή είναι

$$y = \underbrace{c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t}_{\text{λύση ομογενούς εξίσωσης}} \underbrace{- 2 \sin 4t}_{\text{μερική λύση}},$$

όπου c_1 και c_2 τυχαίες σταθερές.

Σχετικές ασκήσεις 31–38 ◄

Προβλήματα αρχικών τιμών

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, μαθηματικά μοντέλα που περιέχουν διαφορικές εξισώσεις παίρνουν συχνά την μορφή ενός προβλήματος αρχικών τιμών, δηλαδή μιας διαφορικής εξίσωσης που συνοδεύεται από αρχικές συνθήκες. Αυτό σημαίνει ότι με τις εξισώσεις δεύτερης τάξης χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες για να εξακριβώσουμε μια λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών. Αν δεν υπάρχει κάποιος επαρκής λόγος να πράξουμε διαφορετικά, ανιχνεύουμε τις αρχικές συνθήκες για $t = 0$. Για εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση ενός αντικειμένου, οι αρχικές συνθήκες δίνουν την αρχική θέση και ταχύτητα του αντικειμένου. Όπως αποδεικνύεται στο επόμενο παράδειγμα, οι δύο αρχικές συνθήκες χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των δύο αυθαίρετων σταθερών της γενικής λύσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 **Λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών** Θεωρήστε το σύστημα ελατηρίου-τούβλου που αναφέρθηκε στο παράδειγμα 6. Αν το τούβλο έχει μια αρχική θέση $y(0) = 4$ και μια αρχική ταχύτητα $y'(0) = 1$, η κίνηση του τούβλου περιγράφεται με το πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$y'' + 9y = 14 \sin 4t \qquad \text{Διαφορική εξίσωση}$$

$$y(0) = 4, \; y'(0) = 1. \qquad \text{Αρχικές συνθήκες}$$

Βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

ΛΥΣΗ Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης βρέθηκε στο Παράδειγμα 6:

$$y = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t - 2 \sin 4t.$$

Για να βρούμε τις δύο αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2, εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες. Η πρώτη συνθήκη $y(0) = 4$ συνεπάγεται ότι

$$y(0) = c_1 \underbrace{\sin(3 \cdot 0)}_{0} + c_2 \underbrace{\cos(3 \cdot 0)}_{1} - 2 \underbrace{\sin(4 \cdot 0)}_{0} = c_2 = 4,$$

και η σταθερά $c_2 = 4$ προσδιορίζεται. Παρατηρούμε ότι

$$y' = 3c_1 \cos 3t - 3c_2 \sin 3t - 8 \cos 4t,$$

και η δεύτερη συνθήκη $y'(0) = 1$ συνεπάγεται ότι

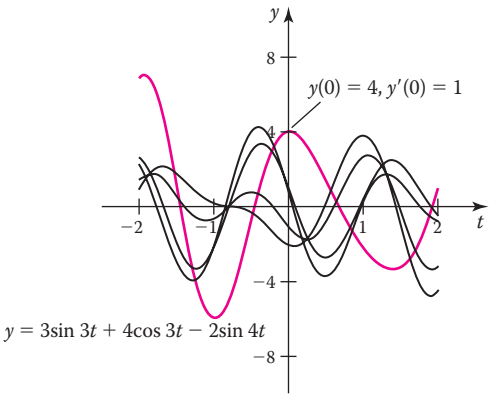
$$y'(0) = 3c_1 \underbrace{\cos(3 \cdot 0)}_{1} - 3c_2 \underbrace{\sin(3 \cdot 0)}_{0} - 8 \underbrace{\cos(4 \cdot 0)}_{1} = 3c_1 - 8 = 1;$$

οπότε έπεται ότι σταθερά $c_1 = 3$. Έχοντας προσδιορίσει τις δύο αυθαίρετες σταθερές στη γενική λύση, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = 3 \sin 3t + 4 \cos 3t - 2 \sin 4t.$$

Στην πράξη, προτείνεται να ελέγχετε αν αυτή η συνάρτηση πληροί τις προδιαγραφές: Πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και τις δύο αρχικές συνθήκες.

Το Σχήμα Δ2.3 η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (με κόκκινο) είναι μια από τις απείρως πολλές συναρτήσεις της γενικής λύσης. Πρόκειται για τη μόνη που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες.



Σχήμα Δ2.3

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 5 Η γενική λύση μιας εξίσωσης είναι $y = c_1 \sin t + c_2 \cos t$. Βρείτε τις σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε $y(0) = 1, y'(0) = 0$. ◄

Σχετικές ασκήσεις 39–46 ◄

Θεωρητικά θέματα

Ολοκληρώνουμε με δύο σημαντικά ερωτήματα. Μπορούμε να δώσουμε απαντήσεις, αλλά οι αυστηρές αποδείξεις τους ξεπερνούν τον σκοπό αυτής της συζήτησης και γενικά παρατίθενται σε προχωρημένα μαθήματα.

Το πρώτο ερώτημα αφορά λύσεις προβλημάτων αρχικών τιμών. Αν δοθεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών όπως στο Παράδειγμα 7, πότε αναμένουμε να βρούμε μια μοναδική λύση; Μια απάντηση δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί.

► Έχουμε δει ότι για να λύσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (αντικείμενο του Θεωρήματος Δ2.5), πρέπει πρώτα να βρούμε μια γενική λύση (αντικείμενο του Θεωρήματος Δ2.6). Τα θεωρήματα δίνονται με αντίστροφη σειρά διότι η απόδειξη του Θεωρήματος Δ2.6 βασίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος Δ2.5.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ2.5 Λύσεις προβλημάτων αρχικών τιμών
Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις p, q, και f είναι συνεχείς σε ένα ανοιχτό διάστημα I που περιέχει το σημείο 0. Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t)$$
$$y(0) = A, \; y'(0) = B,$$

όπου τα A και B είναι δοσμένα, έχει μια μοναδική λύση στο I.

Οι συνθήκες αυτού του θεωρήματος, δηλαδή η συνέχεια των συντελεστών p, q, και F στο διάστημα ενδιαφέροντος, εξασφαλίζουν την ύπαρξη και την μοναδικότητα των λύσεων των προβλημάτων αρχικών τιμών στο ίδιο διάστημα. Αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται από τις εξισώσεις που θεωρούμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Το δεύτερο ερώτημα αφορά γενικές λύσεις. Όλα τα παραδείγματα αυτής της ενότητας έχουν δείξει ότι οι γραμμικές ομογενείς εξισώσεις δεύτερης τάξης έχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, που συγκροτούν τη γενική λύση. Αληθεύει πάντα αυτή η παρατήρηση; Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει μια καταφατική απάντηση υπό τις κατάλληλες συνθήκες.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ2.6 Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις
Υποθέτουμε πως οι συναρτήσεις p και q είναι συνεχείς σε ένα ανοιχτό διάστημα I. Τότε η ομογενής εξίσωση

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2, και η γενική λύση στο I είναι $y = c_1y_1 + c_2y_2$, όπου c_1 και c_2 είναι τυχαίες σταθερές.

Αυτά τα θεωρήματα υποστηρίζουν την ύπαρξη των λύσεων, αλλά δεν λένε τίποτε για το *πώς θα βρούμε* τις λύσεις. Στρεφόμαστε τώρα στο πρακτικό ζήτημα της επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων.

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ2.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Περιγράψτε πώς θα βρείτε την τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης.
2. Πώς εξακριβώνετε αν μια διαφορική εξίσωση είναι γραμμική ή μη γραμμική;
3. Πώς διακρίνεται μια ομογενής από μια μη ομογενή διαφορική εξίσωση;
4. Δώστε μια γενική μορφή μιας γραμμικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης.
5. Πώς ελέγχετε αν δύο συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες ή ανεξάρτητες;
6. Πόσες γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις εμφανίζονται στην γενική λύση μιας γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης;
7. Εξηγήστε πώς θα βρείτε τη λύση μιας γραμμικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης.
8. Αναλύστε τα βήματα που απαιτούνται για την εύρεση της λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών που περιλαμβάνει μια γραμμική μη ομογενή διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.

Βασικές δεξιότητες

9–12. Κατάταξη διαφορικών εξισώσεων *Βρείτε την τάξη των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια να αναφέρετε αν είναι γραμμικές ή μη γραμμικές και αν είναι ομογενείς ή μη ομογενείς.*

9. $y'' - 4y' + 2y = 10t^2$
10. $y' = 2y^3 - 4t$
11. $y'' - 3yy' - y = e^t$
12. $z'' + 16z = 0$

13–22. Επαλήθευση λύσεων *Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι οι ακόλουθες εξισώσεις ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις που δίνονται. Θεωρούμε ότι οι c_1 και c_2 είναι τυχαίες σταθερές.*

13. $y'' - 4y = 0$· λύση $y = 3e^{2t} - 5e^{-2t}$
14. $y'' + 16y = 0$· λύση $y = 10 \sin 4t - 20 \cos 4t$
15. $y'' - 9y = 18t$· λύση $y = 4e^{3t} + 3e^{-3t} - 2t$
16. $y'' + 25y = 12 \cos t$·
    λύση $y = 2 \sin 5t - 6 \cos 5t + \frac{1}{2} \cos t$
17. $y'' - y' - 2y = 0$· λύση $y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$
18. $y'' + 2y' - 3y = 5e^{2t}$· λύση $y = c_1e^{-3t} + c_2e^t + e^{2t}$
19. $y'' + 6y' + 25y = 0$·
    λύση $y = e^{-3t}(c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t)$
20. $y'' + 8y' + 25y = 50$·
    λύση $y = e^{-4t}(c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t) + 2$
21. $ty'' - (t + 1)y' + y = 0, t > 0$·
    λύση $y = c_1e^t + c_2(t + 1)$
22. $t^2y'' + 2ty' - 2y = 5t^3, t > 0$·
    λύση $y = c_1t^{-2} + c_2t + \frac{t^3}{2}$

23–26. Γενικές λύσεις *Δίνονται δύο λύσεις σε κάθε μια από τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις. Αν είναι δυνατόν, δώστε μια γενική λύση της εξίσωσης.*

23. $y'' - 36y = 0$· λύσεις $\{e^{6t}, 5e^{-6t}\}$
24. $y'' + 5y = 0$· λύσεις $\{\cos \sqrt{5}\, t, \sin \sqrt{5}\, t\}$
25. $y'' + 2y' + y = 0$· λύσεις $\{e^{-t}, te^{-t}\}$
26. $t^2y'' + ty' - y = 0, t > 0$· λύσεις $\{t, t^{-1}\}$

27–30 Μερικές λύσεις *Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι μερικές λύσεις των επόμενων συναρτήσεων.*

27. $y'' - y = 8e^{-3t}$· μερική λύση e^{-3t}

28. $y'' + y = 3\cos 2t$· μερική λύση $2\sin t - \cos 2t$

29. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}$· μερική λύση t^2e^{2t}

30. $t^2y'' + ty' - 4y = 6t, t > 0$· μερική λύση $-2t + t^2$

31–34. Οι μερικές λύσεις δεν είναι μοναδικές *Για κάθε μια από τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις δίνονται δύο συναρτήσεις. Δείξτε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι μερικές λύσεις και ότι διαφέρουν κατά μια λύση της ομογενούς εξίσωσης.*

31. $y'' - 49y = -24e^{-t}$· μερικές λύσεις $\left\{\dfrac{e^{-t}}{2}, \dfrac{e^{-t}}{2} + 3e^{7t}\right\}$

32. $y'' + 16y = 30\sin t$· μερικές λύσεις $\{2\sin t, 2\sin t - 8\cos 4t\}$

33. $y'' - y' - 12y = 12e^{t}$· μερικές λύσεις $\{-e^{t}, 6e^{4t} - e^{t}\}$

34. $t^2y'' + 2ty' - 30y = 12t^2, t > 0$·
μερικές λύσεις $\left\{-\dfrac{t^2}{2}, 3t^5 - \dfrac{t^2}{2}\right\}$

35–38. Γενικές λύσεις μη ομογενών εξισώσεων *Δίνονται τρεις λύσεις των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων. Εξετάστε ποιες δύο συναρτήσεις είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης και στη συνέχεια γράψτε τη γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης.*

35. $y'' + 2y = 3e^{t}$· λύσεις $\{\sin\sqrt{2}t, e^{t}, \cos\sqrt{2}t\}$

36. $y'' - 4y = 5\cos t$· λύσεις $\{5e^{2t}, e^{-2t}, -\cos t\}$

37. $y'' - 3y' + \dfrac{25}{4}y = 625t$·
λύσεις $\{e^{3t/2}\cos 2t, e^{3t/2}\sin 2t, 48 + 100t\}$

38. $t^2y'' + 2ty' - 6y = 7t^4, t > 0$· λύσεις $\left\{t^{-3}, \dfrac{t^4}{2}, t^2\right\}$

39–46. Προβλήματα αρχικών τιμών *Λύστε τα επόμενα προβλήματα αρχικών τιμών χρησιμοποιώντας τη γενική λύση που σας δίνεται.*

39. $y'' + 9y = 0$· $y(0) = 4, y'(0) = 0$·
γενική λύση $y = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t$

40. $y'' - y = 0$· $y(0) = 2, y'(0) = -2$·
γενική λύση $y = c_1e^{t} + c_2e^{-t}$

41. $y'' - y' - 20y = 0$· $y(0) = -3, y'(0) = 3$·
γενική λύση $y = c_1e^{5t} + c_2e^{-4t}$

42. $y'' + 4y = 5\cos 3t$· $y(0) = 4, y'(0) = 2$·
γενική λύση $y = c_1\sin 2t + c_2\cos 2t - \cos 3t$

43. $y'' - 16y = 16t^2$· $y(0) = 0, y'(0) = 0$·
γενική λύση $y = c_1e^{4t} + c_2e^{-4t} - t^2 - \dfrac{1}{8}$

44. $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0$· $y(1) = 3, y'(1) = 0$·
γενική λύση $y = c_1t^{-2} + c_2t$

45. $t^2y'' + ty' - 4y = 0$· $y(1) = 1, y'(1) = -1$·
γενική λύση $y = c_1t^{-2} + c_2t^2$

46. $y'' + 8y' + 25y = 0$· $y(0) = 1, y'(0) = -1$·
γενική λύση $y = e^{-4t}(c_1\sin 3t + c_2\cos 3t)$

Περαιτέρω διερευνήσεις

47. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Εξακριβώστε αν οι ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και δώστε μια ερμηνεία ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Η γενική λύση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης μπορεί να είναι η $y = ce^{2t} - t^2$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

β. Αν y_h είναι η λύση μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'' + py' + qy = 0$ και y_p μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' + py' + qy = f$, τότε η $y_p + cy_h$ είναι επίσης μερική λύση για οποιαδήποτε σταθερά c.

γ. Οι συναρτήσεις $\{1 - \cos^2 x, 5\sin^2 x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

δ. Αν y_1 και y_2 είναι λύσεις της $y'' + yy' = 0$, τότε και η $y_1 + y_2$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης.

ε. Το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + 2y = 0, y(0) = 4$ έχει μοναδική λύση.

48–53. Επαλήθευση λύσης *Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις που δίνονται. Υποθέστε ότι c_1 και c_2 είναι τυχαίες σταθερές.*

48. $y'' - 12y' + 36y = 0$· λύση $y(t) = c_1e^{6t} + c_2te^{6t}$

49. $y'' - 12y' + 36y = 2e^{6t}$·
λύση $y = c_1e^{6t} + c_2te^{6t} + t^2e^{6t}$

50. $y'' + 4y = 8\sin 2t$·
λύση $y = c_1\sin 2t + c_2\cos 2t - 2t\cos 2t$

51. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0, t > 0$·
λύση $y = c_1t^2 + c_2t^2\ln t$

52. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 2t^2, t > 0$·
λύση $y = c_1t^2 + c_2t^2\ln t + t^2\ln^2 t$

53. $t^2y'' + ty' + \left(t^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0, t > 0$·
λύση $y = t^{-1/2}(c_1\cos t + c_2\sin t)$

54. Τριγωνομετρικές λύσεις

α. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι οι $y = \sin t$ και $y = \cos t$ είναι λύσεις της $y'' + y = 0$.

β. Γράψτε τη γενική λύση της $y'' + y = 0$.

γ. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι οι $y = \sin 2t$ και $y = \cos 2t$ είναι λύσεις της $y'' + 4y = 0$.

δ. Γράψτε τη γενική λύση της $y'' + 4y = 0$.

ε. Βάσει των αποτελεσμάτων στα (α) – (δ), βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $y'' + k^2y = 0$, όπου k είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

55. Υπερβολικές συναρτήσεις Θυμηθείτε ότι το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο ορίζονται από $\sinh t = \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2}$ και $\cosh t = \dfrac{e^{t} + e^{-t}}{2}$.

α. Επαληθεύστε ότι οι $y = e^{t}$ και $y = e^{-t}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $y'' - y = 0$.

β. Εξηγήστε (χωρίς αντικατάσταση) γιατί οι $y = \sinh t$ και $y = \cosh t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ίδιας εξίσωσης.

γ. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι $y = \sinh t$ και $y = \cosh t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $y'' - y = 0$.

δ. Δώστε δύο διαφορετικές μορφές της γενικής λύσης της $y'' - y = 0$.

ε. Επαληθεύστε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό k, οι $y = e^{kt}$ και $y = e^{-kt}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $y'' - k^2y = 0$.

στ. Γράψτε τη γενική λύση της $y'' - k^2y = 0$ ως προς $\{e^{kt}, e^{-kt}\}$ και $\{\sinh kt, \cosh kt\}$.

56–57. Εξισώσεις υψηλότερης τάξης *Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι οι παρακάτω εξισώσεις ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις που δίνονται.*

56. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$·
λύση $y = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3e^t$

57. $y^{(4)} - 16y = 0$·
λύση $y = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t$

58–59. Μη γραμμικές εξισώσεις

58. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $y'' - 2yy' = 0$ ακολουθώντας τα επόμενα βήματα.

α. Χρησιμοποιήστε τον Κανόνα της αλυσίδας για να δείξετε ότι $\frac{d}{dt}(y(t)^2) = 2y(t)y'(t)$.

β. Γράψτε την αρχική διαφορική εξίσωση ως $y''(t) - (y(t)^2)' = 0$.

γ. Ολοκληρώστε ως προς t τα δύο μέλη της εξίσωσης του μέρους (β) για να προκύψει η πρώτης τάξης εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών $y' = y^2 + c_1$.

δ. Λύστε αυτή την εξίσωση για να βρείτε τη γενική λύση. Σημειώστε ότι υπάρχουν τρεις περιπτώσεις που θα λάβετε υπόψη σας: $c_1 > 0$, $c_1 = 0$, και $c_1 < 0$.

59. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $y''y' = 1$ ακολουθώντας τα επόμενα βήματα.

α. Χρησιμοποιήστε τον Κανόνα της αλυσίδας για να δείξετε ότι $\frac{d}{dt}(y'(t)^2) = 2y'(t)y''(t)$.

β. Γράψτε την αρχική διαφορική εξίσωση ως $(y'(t)^2)' = 2$.

γ. Ολοκληρώστε ως προς t τα δύο μέλη της εξίσωσης του μέρους (β) για να προκύψει η εξίσωση πρώτης τάξης $y' = \pm\sqrt{2t + c_1}$, όπου το c_1 είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

δ. Λύστε αυτή την εξίσωση για να δείξετε ότι υπάρχουν *δύο* οικογένειες λύσεων, $y = c_2 + \frac{1}{3}(2t + c_1)^{3/2}$ και $y = c_2 - \frac{1}{3}(2t + c_1)^{3/2}$, όπου το c_2 είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

60–63. Εξισώσεις που μοιάζουν με δεύτερης τάξης *Μια εξίσωση της μορφής $y'' = F(t, y')$ (όπου η F δεν εξαρτάται από την y) μπορεί να θεωρηθεί ως μια εξίσωση πρώτης τάξης της y'. Μπορεί να αντιμετωπιστεί σε δύο βήματα:* ***(α)*** *Θέτουμε $v = y'$ και λύνουμε την εξίσωση πρώτης τάξης $v' = F(t, v)$.* ***(β)*** *Έχοντας βρει το v, λύνουμε την εξίσωση πρώτης τάξης $y' = v$. Εφαρμόστε αυτή την μέθοδο για να βρείτε τη γενική λύση στις ακόλουθες εξισώσεις.*

60. $y'' = 2y'$

61. $y'' = 3y' + 4$

62. $y'' = e^{-y'}$

63. $y'' = 2t(y')^2$

Εφαρμογές

T **64–67. Εξισώσεις ταλαντωτών και κυκλωμάτων** *Όπως είδαμε στην Ενότητα Δ2.4, η εξίσωση $y'' + py' + qy = f(t)$, όπου p και q είναι σταθερές και η F είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση, χρησιμοποιείται τόσο για την μοντελοποίηση μηχανικών ταλαντωτών όσο και ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Ανάλογα με τις τιμές των p και q, οι λύσεις αυτής της εξίσωσης παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία στη συμπεριφορά τους.*

α. *Επαληθεύστε ότι οι ακόλουθες εξισώσεις έχουν την γενική λύση που δίνεται.*

β. *Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών με τις αρχικές συνθήκες που δίνονται.*

γ. *Να κάνετε το γράφημα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών για $t \geq 0$.*

64. $y'' + 16y = 0$· $y(0) = 4, y'(0) = -1$
Γενική λύση $y = c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t$

65. $y'' + 3y' + \frac{25}{4}y = 0$· $y(0) = 4, y'(0) = 0$.
Γενική λύση $y = e^{-3t/2}(c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t)$

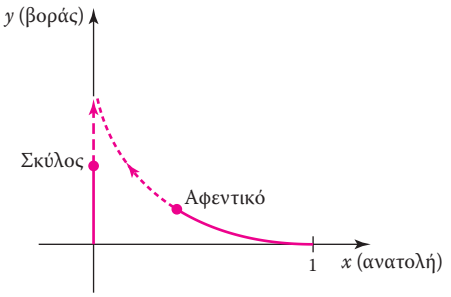
66. $y'' + 9y = 8 \sin t$· $y(0) = 0, y'(0) = 2$.
Γενική λύση $y = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t + \sin t$

67. $y'' + 6y' + 25y = 20e^{-t}$· $y(0) = 2, y'(0) = 0$.
Γενική λύση $y = e^{-3t}(c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t) + e^{-t}$

T **68. Ένα πρόβλημα αναζήτησης** Φανταστείτε ότι ένας σκύλος βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και το αφεντικό του βρίσκεται στον θετικό άξονα x ένα μίλι μακριά από την αρχή (βλέπε σχήμα). Την ίδια στιγμή ο σκύλος και το αφεντικό του αρχίζουν να περπατούν. Ο σκύλος κινείται κατά μήκος του θετικού άξονα y με 1 μίλι ανά ώρα και το αφεντικό του βαδίζει με $s > 1$ μίλια ανά ώρα σε μια διαδρομή που έχει πάντα την κατεύθυνση προς τον κινούμενο σκύλο. Η διαδρομή που ακολουθεί το αφεντικό του σκύλου στο επίπεδο xy είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y''(x) = \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{sx}, y(1) = 0, y'(1) = 0$$

Λύστε το πρόβλημα αρχικής τιμής εφαρμόζοντας τα ακόλουθα βήματα.



α. Παρατηρήστε ότι η εξίσωση είναι πρώτης τάξης ως προς y'· οπότε θέτουμε $u = y'$, που καταλήγει στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u' = \frac{\sqrt{1 + u^2}}{sx}, u(1) = 0.$$

β. Λύστε αυτή την εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών με δεδομένο ότι $\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) + c_1$ για να προκύψει η γενική λύση $u + \sqrt{1 + u^2} = c_1x^{1/s}$.

γ. Χρησιμοποιήστε την αρχική συνθήκη $u(1) = 0$ για να υπολογίσετε το c_1 και δείξτε ότι $u = \frac{1}{2}(x^{1/s} - x^{-1/s})$.

δ. Θυμηθείτε τώρα ότι $u = y'$. Λύστε την εξίσωση $u = y' = \frac{1}{2}(x^{1/s} - x^{-1/s})$ ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη ως προς x.

ε. Χρησιμοποιήστε την αρχική συνθήκη $y(1) = 0$ για να υπολογίσετε τη σταθερά της ολοκλήρωσης.

στ. Να καταλήξετε ότι η διαδρομή του αφεντικού του σκύλου δίνεται από την

$$y = \frac{sx}{2}\left(\frac{x^{1/s}}{s+1} - \frac{x^{-1/s}}{s-1}\right) + \frac{s}{s^2-1}.$$

ζ. Να κάνετε τα γραφήματα των διαδρομών αναζήτησης του σκύλου για $s = 1.1, 1.3, 1.5, 2.0$. Εξηγήστε από τι εξαρτάται το s.

Πρόσθετες ασκήσεις

69. Διατήρηση ενέργειας Σε κάποιες περιπτώσεις, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί $mx''(t) = F(x)$, όπου η δύναμη F εξαρτάται μόνο από τη θέση x και υπάρχει μια συνάρτηση φ (με την ονομασία δυναμικό) τέτοια ώστε $\varphi'(x) = -F(x)$. Τα συστήματα με αυτή την ιδιότητα υπακούουν στον νόμο διατήρησης της ενέργειας.

α. Πολλαπλασιάστε την εξίσωση της κίνησης με $x'(t)$ και δείξτε ότι η εξίσωση μπορεί να γραφεί

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(x'(t))^2 + \varphi(x)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2 + \varphi(x)\right] = 0.$$

β. Προσδιορίστε την ενέργεια του συστήματος να είναι $E(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \varphi$ (το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας) και δείξτε ότι η $E(t)$ είναι σταθερή.

70. Υποβιβασμός τάξης Υποθέστε ότι λύνετε μια γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και ότι έχετε βρει μια λύση. Η μέθοδος που ονομάζεται *υποβιβασμός της τάξης*, σας επιτρέπει να βρείτε την δεύτερη (γραμμικά ανεξάρτητη) λύση (μέχρι και να υπολογίσετε ολοκληρώματα). Θεωρήστε τη διαφορική εξίσωση $y'' - \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = 0$, για $t > 0$.

α. Επαληθεύστε ότι η $y_1 = t$ είναι μια λύση. Υποθέστε ότι η δεύτερη ομογενής λύση είναι y_2 και έχει τη μορφή $y_2(t) = v(t)y_1(t) = v(t)t$, όπου v είναι μια συνάρτηση που πρέπει να οριστεί.

β. Αντικαταστήστε την y_2 στη διαφορική εξίσωση και απλοποιήστε την εξίσωση που προκύπτει για να δείξετε ότι η v ικανοποιεί την εξίσωση $v'' = -\frac{v'}{t}$.

γ. Παρατηρήστε ότι αυτή η εξίσωση είναι πρώτης τάξης για την v'; οπότε θέτουμε $w = v'$ για να προκύψει η εξίσωση πρώτης τάξης $w' = -\frac{w}{t}$.

δ. Λύστε την εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών και δείξτε ότι $w = \frac{c_1}{t}$.

ε. Τώρα λύστε την εξίσωση $v' = w = \frac{c_1}{t}$ για να βρείτε το v.

στ. Τελικά, θυμηθείτε ότι $y_2(t) = v(t)t$ και καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι η δεύτερη λύση είναι η $y_2(t) = c_1 t \ln t$.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Πρώτης τάξης, γραμμική, μη ομογενής. Δεύτερης τάξης, γραμμική, ομογενής **2.** Το πρώτο, τρίτο και τέταρτο ζεύγος είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Το δεύτερο ζεύγος είναι γραμμικά εξαρτημένο. **3.** Ναι. **5.** $c_1 = 0, c_2 = 1$. ◄

Δ2.2 Γραμμικές ομογενείς εξισώσεις

Σε όσα μέχρι τώρα έχετε συναντήσει, σας δινόταν μια συνάρτηση και το ζητούμενο ήταν να επαληθεύσετε με αντικατάσταση ότι ικανοποιεί μια συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση. Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην πραγματική διαδικασία της λύσης. Αρχίζουμε με την περίπτωση των ομογενών εξισώσεων με σταθερό συντελεστή που έχουν τη μορφή

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0,$$

όπου τα p και q είναι σταθερά.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Έστω $y = e^{rt}$. Να δείξετε ότι y' και y'' είναι σταθερά πολλαπλάσια του y. ◄

Λύνουμε την εξίσωση κάνοντας την ακόλουθη παρατήρηση: Η λύση της εξίσωσης είναι μια συνάρτηση y που οι παράγωγοί της y' και y'' είναι σταθερά πολλαπλάσια της ίδιας της y για όλα τα t. Οι μόνες συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα έχουν τη μορφή $y = e^{rt}$, όπου r είναι μια σταθερά.

Η παρατήρηση αυτή προτείνει την χρήση μιας *δοκιμαστικής λύσης* της μορφής $y = e^{rt}$, όπου το r πρέπει να προσδιοριστεί. Αντικαθιστούμε την δοκιμαστική λύση στην εξίσωση και εκτελούμε τον επόμενο υπολογισμό.

$$\underbrace{(e^{rt})''}_{r^2e^{rt}} + p\underbrace{(e^{rt})'}_{re^{rt}} + qe^{rt} = 0 \quad \text{Αντικατάσταση}$$

$$r^2e^{rt} + pre^{rt} + qe^{rt} = 0 \quad \text{Παραγώγιση}$$

$$e^{rt}(r^2 + pr + q) = 0 \quad \text{Κοινός παράγων } e^{rt}.$$

➤ Προσέξτε ότι δεν χρειάζεται να αντικαταστήσετε τη δοκιμαστική λύση σε κάθε διαφορική εξίσωση που λύνετε. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γίνεται εμφανές ευθέως από τη διαφορική εξίσωση. Η τάξη της διαφορικής γίνεται δύναμη του r.

$$y'' \to r^2$$
$$py' \to pr$$
$$qy \to q$$

Θυμηθείτε ότι σκοπός μας είναι να βρούμε τιμές του r που ικανοποιούν αυτή την εξίσωση για όλα τα t. Μπορούμε να εξαλείψουμε τον παράγοντα e^{rt} αφού είναι διάφορος του μηδέν για όλα τα t. Μετά την απλοποίηση e^{rt} μένει μια δευτεροβάθμια (δεύτερου βαθμού) εξίσωση

$$r^2 + pr + q = 0,$$

που μπορεί να λυθεί ως προς R. Το πολυώνυμο $r^2 + pr + q$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** (ή **βοηθητικό πολυώνυμο**) της διαφορικής εξίσωσης.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου μοιάζουν μεταξύ τους. Με τον τύπο της δευτεροβάθμιας εξίσωσης έχουμε

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{και} \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{1}$$

Θυμηθείτε ότι ανακύπτουν τρεις περιπτώσεις.

- Αν $p^2 - 4q > 0$, τότε οι ρίζες είναι πραγματικές με $r_1 \neq r_2$, και δίνονται ακριβώς από τη σχέση (1).
- Αν $p^2 - 4q = 0$, τότε το πολυώνυμο έχει μια διπλή ρίζα $r_1 = -\frac{p}{2}$.
- Αν $p^2 - 4q < 0$, τότε το πολυώνυμο έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών

$$r_1 = \frac{-p + i\sqrt{4q - p^2}}{2} \quad \text{και} \quad r_2 = \frac{-p - i\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Ποιο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης $y'' - y = 0$; Ποιες είναι οι ρίζες του πολυωνύμου; ➤

Αυτές οι τρεις περιπτώσεις δημιουργούν διαφορετικές μορφές λύσεων στη διαφορική εξίσωση και πρέπει να τις εξετάσουμε ξεχωριστά.

Περίπτωση 1: Διακεκριμένες πραγματικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου
Υποθέστε ότι $p^2 - 4q > 0$ και ότι οι ρίζες του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί r_1 και r_2, με $r_1 \neq r_2$. Υποθέτουμε ότι οι ρίζες της διαφορικής εξίσωσης έχουν τη μορφή $y = e^{rt}$. Συνεπώς έχουμε βρει δύο λύσεις, $y_1 = e^{r_1 t}$ και $y_2 = e^{r_2 t}$, που είναι γραμμικά ανεξάρτητες αφού $r_1 \neq r_2$. Εφαρμόζοντας ό,τι μάθαμε στην Ενότητα Δ2.1, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης αποτελείται από γραμμικό συνδυασμό αυτών των δύο συναρτήσεων:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Γενική λύση με πραγματικές διακεκριμένες ρίζες**
Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 2y' - 4y = 0.$$

ΛΥΣΗ Διαμορφώνουμε τον τύπο του χαρακτηριστικού πολυωνύμου απευθείας από την διαφορική εξίσωση, οπότε η εξίσωση που πρέπει να λύσουμε είναι η

$$r^2 - 2r - 4 = 0.$$

Από τον τύπο λύσης της δευτεροβάθμιας παίρνουμε τις λύσεις

$$r_1 = 1 + \sqrt{5} \quad \text{και} \quad r_2 = 1 - \sqrt{5}.$$

Συνεπώς, η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{(1+\sqrt{5})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{5})t},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Σχετικές ασκήσεις 9–14 ➤

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Πρόβλημα αρχικών τιμών με πραγματικές διακεκριμένες ρίζες**
Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -5.$$

ΛΥΣΗ Για να βρούμε τη γενική λύση, πρέπει να βρούμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που ικανοποιεί την

$$r^2 + r - 6 = 0.$$

Με παραγοντοποίηση του πολυωνύμου ή με χρήση του τύπου λύσης της δευτεροβάθμιας, οι ρίζες είναι $r_1 = 2$ και $r_2 = -3$. Άρα, η γενική λύση είναι

$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}.$$

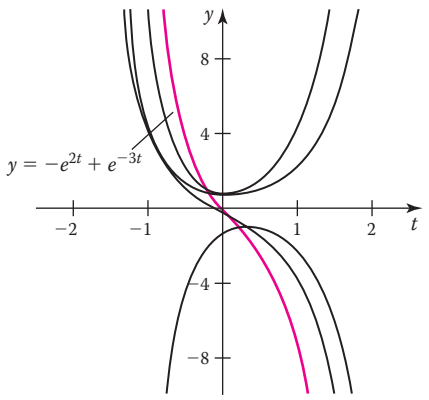
Οι αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται τώρα από τις αρχικές συνθήκες. Παρατηρώντας ότι $y'(t) = 2c_1e^{2t} - 3c_2e^{-3t}$, από τις αρχικές συνθήκες συνεπάγεται ότι

$$y(0) = c_1e^{2\cdot 0} + c_2e^{-3\cdot 0} = c_1 + c_2 = 0$$
$$y'(0) = 2c_1e^{2\cdot 0} - 3c_2e^{-3\cdot 0} = 2c_1 - 3c_2 = -5.$$

Λύνοντας αυτές τις δύο εξισώσεις προκύπτουν οι σταθερές $c_1 = -1$ και $c_2 = 1$. Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι λοιπόν

$$y = -e^{2t} + e^{-3t}.$$

Το Σχήμα Δ2.4 δείχνει ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (με κόκκινο) είναι μία από τις άπειρες συναρτήσεις της γενικής λύσης. Αυτή είναι η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.



Σχήμα Δ2.4

Σχετικές ασκήσεις 15–20 ◄

Περίπτωση 2: Διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Υποθέτουμε τώρα ότι $p^2 - 4q = 0$, που σημαίνει ότι η μόνη ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι

$$r_1 = \frac{-p + \overbrace{\sqrt{p^2 - 4q}}^{0}}{2} = -\frac{p}{2}$$

Η μοναδική αυτή ρίζα παράγει την λύση $y_1 = c_1e^{r_1t}$, αλλά πώς μπορούμε να βρούμε μια δεύτερη (γραμμικά ανεξάρτητη) λύση; Μπορεί να βρεθεί κάνοντας μια έξυπνη υπόθεση που έπεται από μια σύντομη σκέψη.

Επειδή η πρώτη λύση έχει τη μορφή $y_1 = c_1e^{r_1t}$, όπου c_1 είναι μια σταθερά, αναζητούμε μια δεύτερη λύση που έχει τη μορφή $y_2 = v(t)e^{r_1t}$, όπου η $v(t)$ δεν είναι σταθερά,

αλλά μια συνάρτηση του t που πρέπει να προσδιοριστεί. Στην λογική της δοκιμαστικής λύσης, αντικαθιστούμε την y_2 στη διαφορική εξίσωση και βλέπουμε πού μας οδηγεί.

Από τον Κανόνα του γινομένου

$$y_2'(t) = v'(t)e^{r_1 t} + v(t)r_1 e^{r_1 t} \text{ και}$$
$$y_2''(t) = v''(t)e^{r_1 t} + 2v'(t)r_1 e^{r_1 t} + v(t)r_1^2 e^{r_1 t}.$$

➤ Η μέθοδος που εφαρμόστηκε για τον υπολογισμό της y_2 ονομάζεται *υποβιβασμός τάξης*. Μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε εξίσωση δεύτερης τάξης για να βρεθεί μια δεύτερη ομογενής λύση όταν είναι γνωστή μια ομογενής λύση.

Αντικαθιστούμε τώρα την y_2 στη διαφορική εξίσωση $y'' + py' + qy = 0$:

$$\underbrace{v''e^{r_1 t} + 2v'r_1 e^{r_1 t} + vr_1^2 e^{r_1 t}}_{y_2''} + p(\underbrace{v'e^{r_1 t} + vr_1 e^{r_1 t}}_{y_2'}) + \underbrace{qve^{r_1 t}}_{y_2} \qquad \text{Αντικατάσταση}$$

$$= e^{r_1 t}(v'' + \underbrace{(2r_1 + p)}_{0}v' + v\underbrace{(r_1^2 + pr_1 + q)}_{0}) \qquad \text{Ομαδοποίηση}$$

$$= e^{r_1 t}v'' = 0. \qquad r_1 = -\frac{p}{2} \text{ είναι μια ρίζα}$$

Αξιοποιήσαμε το ότι $2r_1 + p = 0$ επειδή $r_1 = -\frac{p}{2}$. Επιπλέον, r_1 είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, το οποίο συνεπάγεται ότι $r_1^2 + pr_1 + q = 0$. Μετά από αυτές τις απλοποιήσεις καταλήγουμε στην εξίσωση $e^{r_1 t}v''(t) = 0$. Επειδή η $e^{r_1 t}$ είναι διάφορη του μηδενός για κάθε t, απαλείφουμε αυτόν το παράγοντα και έχουμε μια εξίσωση με άγνωστη τη συνάρτηση v. Εύκολα φαίνεται ότι $v''(t) = 0$.

Λύνουμε αυτή την εξίσωση ολοκληρώνοντας μια φορά και παίρνουμε $v'(t) = c_1$, και επαναλαμβάνουμε παίρνοντας $v(t) = c_1 t + c_2$, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Θυμηθείτε ότι αυτός ο υπολογισμός άρχισε υποθέτοντας ότι η δεύτερη ομογενής λύση έχει τη μορφή $y_2 = v(t)e^{r_1 t}$. Τώρα που έχουμε βρει την v, γράφουμε

$$y_2 = v(t)e^{r_1 t} = (c_1 t + c_2)e^{r_1 t} = \underbrace{c_1 te^{r_1 t}}_{\text{νέα λύση}} + \underbrace{c_2 e^{r_1 t}}_{y_1}$$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Ποιο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης $y'' + 2y' + y = 0$; Δώστε τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης. ➤

Αυτός ο υπολογισμός έχει δώσει την πρώτη λύση $y_1 = e^{r_1 t}$, όπως και τη δεύτερη λύση όπως δείξαμε, $y_2 = te^{r_1 t}$. Άρα το μυστήριο λύθηκε. Οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι $\{e^{r_1 t}, te^{r_1 t}\}$, και η γενική λύση στην περίπτωση της διπλής ρίζας είναι

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 te^{r_1 t}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 **Πρόβλημα αρχικών τιμών με διπλή ρίζα** Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 4.$$

ΛΥΣΗ Λύνοντας την εξίσωση

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0,$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει την διπλή ρίζα $r_1 = -2$. Συνεπώς, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}.$$

Επικαλούμαστε τώρα τις αρχικές συνθήκες για να υπολογίσουμε τις σταθερές στη γενική λύση. Έχουμε,

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} + c_2(e^{-2t} - 2te^{-2t}) = e^{-2t}(-2c_1 + c_2 - 2tc_2).$$

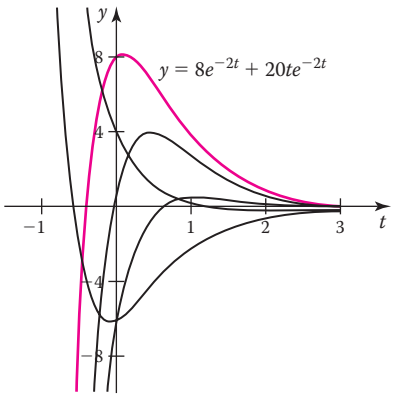
Οι αρχικές συνθήκες συνεπάγονται ότι

$$y(0) = c_1 e^{-2\cdot 0} + c_2 \cdot 0 \cdot e^{-2\cdot 0} = c_1 = 8$$
$$y'(0) = e^{-2\cdot 0}(-2c_1 + c_2 - 2\cdot 0\cdot c_2) = -2c_1 + c_2 = 4.$$

Λύνουμε αυτές τις δύο εξισώσεις και έχουμε τις λύσεις $c_1 = 8$ και $c_2 = 20$. Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = 8e^{-2t} + 20te^{-2t}.$$

Η συμπεριφορά αυτής της λύσης αξίζει να διερευνηθεί, διότι στην πράξη εμφανίζονται λύσεις αυτής της μορφής. Το Σχήμα Δ2.5 δείχνει διάφορες συναρτήσεις της γενικής λύσης μαζί με τη συνάρτηση που ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (με κόκκινο). Ιδιαίτερης σημασίας είναι το γεγονός ότι για όλες αυτές τις λύσεις, ισχύει $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Γενικά, όταν $a > 0$, έχουμε $\lim_{t\to\infty} te^{-at} = 0$ και $\lim_{t\to\infty} te^{at} = \infty$.



Σχήμα Δ2.5

Σχετικές ασκήσεις 21–26 ◀

Περίπτωση 3: Μιγαδικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

➤ Ο συζυγής μιγαδικός του $a + ib$ είναι $a - ib$.

Η τρίτη περίπτωση συμβαίνει όταν $p^2 - 4q < 0$, που συνεπάγεται ότι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου εμφανίζονται ως συζυγή μιγαδικά ζεύγη. Είναι οι

$$r_1 = \frac{-p + i\sqrt{4q - p^2}}{2} \quad \text{και} \quad r_2 = \frac{-p - i\sqrt{4q - p^2}}{2},$$

που συμπτύσσονται ως $r_1 = a + ib$ και $r_2 = a - ib$, όπου τα

$$a = -\frac{p}{2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$$

είναι πραγματικοί αριθμοί. Είναι τώρα εύκολο να γράψουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης ως

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} = c_1e^{(a+ib)t} + c_2e^{(a-ib)t},$$

αλλά τι σημαίνει αυτό; Αναμένουμε μια πραγματική λύση της διαφορικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές. Με λίγη δουλειά εκφράζουμε αυτή τη λύση με πραγματικές συναρτήσεις. Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων, εξάγουμε ως κοινό παράγοντα το e^{at} και γράφουμε

$$y = e^{at}(c_1e^{ibt} + c_2e^{-ibt}).$$

Από αυτή τη μορφή βλέπουμε πως δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι οι $e^{at}e^{ibt}$ και $e^{at}e^{-ibt}$. Θυμηθείτε τώρα ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί των λύσεων, είναι επίσης λύσεις. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\cos bt = \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2} \quad \text{και} \quad \sin bt = \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}$$

για να δημιουργήσουμε τους ακόλουθους γραμμικούς συνδυασμούς:

$$\frac{1}{2}e^{at}e^{ibt} + \frac{1}{2}e^{at}e^{-ibt} = e^{at}\cdot\frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2} = e^{at}\cos bt$$

$$\frac{1}{2i}e^{at}e^{ibt} - \frac{1}{2i}e^{at}e^{-ibt} = e^{at}\cdot\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} = e^{at}\sin bt.$$

Έχουμε τώρα δύο πραγματικές συναρτήσεις, γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις: $e^{at}\cos bt$ και $e^{at}\sin bt$. Συνεπώς στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών, η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{at}\cos bt + c_2 e^{at}\sin bt,$$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4 Ποιο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης $y'' + y = 0$; Ποιες είναι οι ρίζες του πολυωνύμου; ➤

όπου $a = -\dfrac{p}{2}$ και $b = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι $a \pm ib$. Συνεπώς το πραγματικό μέρος κάθε ρίζας είναι a, που καθορίζει τον ρυθμό της εκθετικής αύξησης ή μείωσης της λύσης. Το φανταστικό μέρος κάθε ρίζας είναι ib, το οποίο καθορίζει την περίοδο της ταλάντωσης της λύσης. Παρατηρούμε ότι η περίοδος είναι $2\pi/b$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 **Πρόβλημα αρχικών τιμών με μιγαδικές ρίζες** Λύστε το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6.$$

ΛΥΣΗ Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ικανοποιούν την $r^2 + 16 = 0$; Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε καθαρά φανταστικές ρίζες $r_1 = 4i$ και $r_2 = -4i$. Άρα, η γενική λύση $y = c_1 e^{at}\cos bt + c_2 e^{at}\sin bt$ με $a = 0$ και $b = 4$ γίνεται

$$y = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t.$$

Πριν εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε $y'(t) = -4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t$. Οι αρχικές συνθήκες συνεπάγονται ότι

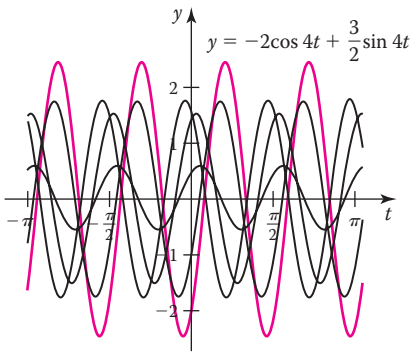
$$y(0) = c_1 \cos(4 \cdot 0) + c_2 \sin(4 \cdot 0) = c_1 = -2$$

$$y'(0) = -4c_1 \sin(4 \cdot 0) + 4c_2 \cos(4 \cdot 0) = 4c_2 = 6.$$

Καταλήγουμε ότι $c_1 = -2$ και $c_2 = \dfrac{3}{2}$, και καταγράφουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y = -2\cos 4t + \frac{3}{2}\sin 4t.$$

Η λύση φαίνεται στο Σχήμα Δ2.6 (με κόκκινο), μαζί με μερικές ακόμη συναρτήσεις της γενικής λύσης. Όταν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι καθαρά φανταστικές, η λύση εμφανίζεται ως ταλάντωση χωρίς αύξηση ή εξασθένηση στη λύση. Στην δική μας περίπτωση, με $b = 4$, η περίοδος της λύσης είναι $2\pi/4 = \pi/2$.



Σχήμα Δ2.6

Σχετικές ασκήσεις 27–32 ➤

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 **Πρόβλημα αρχικών τιμών με μιγαδικές ρίζες** Λύστε το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

ΛΥΣΗ Εφαρμόζοντας το τύπο της δευτεροβάθμιας, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2 + r + \frac{5}{4}$ έχει ρίζες $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ και $r_2 = -\frac{1}{2} - i$. Θέτουμε $a = -\frac{1}{2}$ και $b = 1$, η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{-t/2} \cos t + c_2 e^{-t/2} \sin t.$$

Πριν εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες, υπολογίζουμε

$$y'(t) = c_1\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2}\cos t - e^{-t/2}\sin t\right) + c_2\left(-\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin t + e^{-t/2}\cos t\right).$$

Οι αρχικές συνθήκες συνεπάγονται ότι

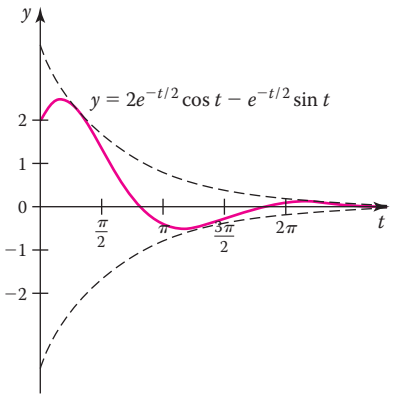
$$y(0) = c_1 = 2$$

$$y'(0) = -\frac{1}{2}c_1 + c_2 = 2.$$

Αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται αν $c_1 = 2$ και $c_2 = 3$. Συνεπώς η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

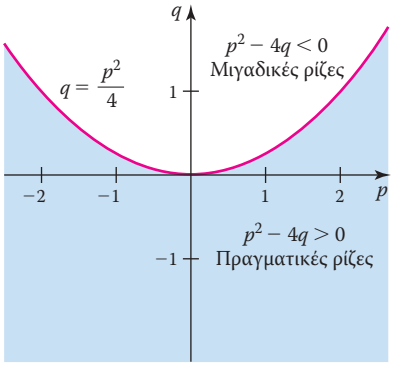
$$y = 2e^{-t/2}\cos t + 3e^{-t/2}\sin t.$$

Η λύση είναι ένα κύμα με μειούμενο πλάτος (Σχήμα Δ2.7). Η φθίνουσα κυματική ταλάντωση έχει περιβάλλουσες συναρτήσεις που προκύπτουν από τον τύπο $y = \pm Ae^{-t/2}$ (διακεκομμένες καμπύλες).



Σχήμα Δ2.7

Σχετικές ασκήσεις 27–32 ◄



Σχήμα Δ2.8

Το Σχήμα Δ2.8 δίνει μια γραφική παράσταση στο επίπεδο pq των τριών περιπτώσεων που προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης $y'' + py' + qy = 0$. Βλέπουμε πως η παραβολή $q = \frac{p^2}{4}$ χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές. Τιμές των (p, q) πάνω από την παραβολή αντιστοιχούν σε εξισώσεις που τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα έχουν μιγαδικές ρίζες, ενώ οι τιμές κάτω από την παραβολή αντιστοιχούν στην περίπτωση των πραγματικών ριζών. Η ίδια η παραβολή παριστάνει την περίπτωση των διπλών πραγματικών ριζών. Ο Πίνακας Δ2.1 συνοψίζει επίσης τις τρεις περιπτώσεις.

Πίνακας Δ2.1 Περιπτώσεις για την εξίσωση $y'' + py' + qy = 0$

	Ρίζες	Γενική λύση
$p^2 - 4q > 0$	$r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$	$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
$p^2 - 4q = 0$	$r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$	$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$
$p^2 - 4q < 0$	$r_{1,2} = a \pm ib, a = -\dfrac{p}{2}, b = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$	$y = e^{at}(c_1 \sin bt + c_2 \cos bt)$

Μορφή πλάτους-φάσης

Εδώ, θα κάνουμε μια στάση για να αναφέρουμε δύο τεχνικές που θα συναντήσουμε στη συνέχεια. Η χρήση της μορφής πλάτους-φάσης μιας λύσης μπορεί να είναι οικεία, αλλά αξίζει να αναφερθεί ξανά. Μια συνάρτηση της μορφής $y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ (που εμφανίζεται πιο πάνω στις λύσεις της Περίπτωσης 3) είναι δύσκολο να την οπτικοποιήσουμε. Όμως, συναρτήσεις αυτής της μορφής μπορούν πάντα να γραφούν στη μορφή $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ ή $y = A \cos(\omega t + \varphi)$. Αν επιλέξουμε $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, οι σχέσεις μεταξύ του *πλάτους* A, της *φάσης* φ, και των c_1 και c_2 είναι

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{και} \quad \tan \varphi = \frac{c_2}{c_1}.$$

(Βλέπε Άσκηση 40. Η Άσκηση 41 δίνει παρόμοιες εκφράσεις για την $A \cos(\omega t + \varphi)$.) Η συνάρτηση $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ είναι μια μετατοπισμένη ημιτονοειδής συνάρτηση σταθερού πλάτους A και συχνότητας ω. Για παράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση $y = -2 \sin 3t + 2 \cos 3t$. Θέτοντας $c_1 = -2$ και $c_2 = 2$, έχουμε

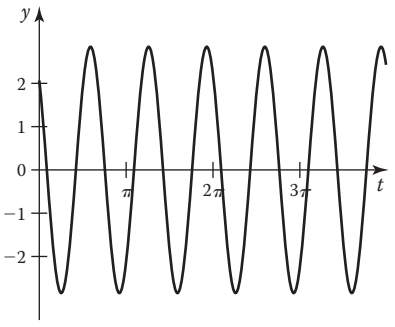
$$A = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \tan \varphi = \frac{2}{-2},$$

που συνεπάγεται ότι $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Συνεπώς, η συνάρτηση μπορεί επίσης να γραφεί

$$y = 2\sqrt{2} \sin\left(3t + \frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \sin 3\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

➤ Χρησιμοποιούμε τον ορισμό $\tan \varphi = \dfrac{y}{x}$ για να προσδιορίσουμε το φ. Σε αυτή την περίπτωση $y > 0$ και $x < 0$. Συνεπώς, φ είναι γωνία του δεύτερου τεταρτημορίου.

Η συνάρτηση τώρα φαίνεται να είναι ένα ημιτονοειδές κύμα με πλάτος $2\sqrt{2}$ και περίοδο $\dfrac{2\pi}{3}$, μετατοπισμένη $\dfrac{\pi}{4}$ μονάδες αριστερά (Σχήμα Δ2.9).



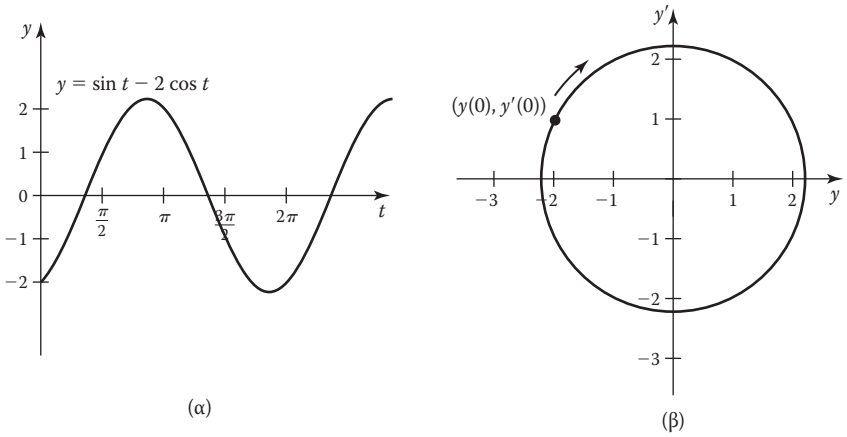
$y = -2 \sin 3t + 2 \cos 3t = 2\sqrt{2} \sin(3t + 3\pi/4)$

Σχήμα Δ2.9

Το επίπεδο φάσης

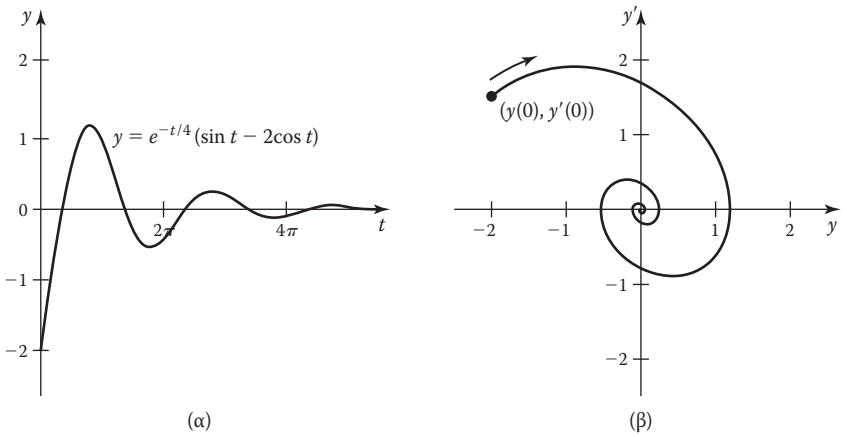
Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, χρησιμοποιούμε περιστασιακά το *επίπεδο φάσης* για να παρουσιάσουμε λύσεις διαφορικών εξισώσεων. Αντί να κάνουμε το γράφημα της λύσης y ως συνάρτησης του t, κάνουμε το παραμετρικό διάγραμμα των y και y'. Το επίπεδο φάσης αποκαλύπτει χαρακτηριστικά της λύσης που μπορεί να μην είναι εμφανή στο συνηθισμένο γράφημα το οποίο εξαρτάται από τον χρόνο.

Θεωρήστε την περιοδική συνάρτηση $y = \sin t - 2\cos t$, που το γράφημά της φαίνεται στο Σχήμα Δ2.10α. Στο επίπεδο φάσης της συνάρτησης (Σχήμα Δ2.10β), η παράμετρος t δεν εμφανίζεται άμεσα. Ωστόσο η καμπύλη έχει έναν προσανατολισμό (δηλώνεται από το βέλος), που δείχνει την κατεύθυνση όσο αυξάνει το t. Κάθε σημείο της καμπύλης αντιστοιχεί σε μια τουλάχιστον τιμή λύσης. Για παράδειγμα, το σημείο $(y(0), y'(0))$ (που φαίνεται στην καμπύλη) σχετίζεται με $t = 2\pi, 4\pi, \ldots$. Το γεγονός ότι η καμπύλη είναι κλειστή, υποδηλώνει ότι η συνάρτηση είναι περιοδική.



Σχήμα Δ2.10

Σε αντίθεση, θεωρήστε τη συνάρτηση $y = e^{-t/4}(\sin t - 2\cos t)$, που το γράφημά της φαίνεται στο Σχήμα Δ2.11α. Το γράφημα του επιπέδου φάσης (Σχήμα Δ2.11β) είναι μια εσωστρεφής σπείρα που δίνει μια χαρακτηριστική εικόνα του μειούμενου πλάτους της συνάρτησης.



Σχήμα Δ2.11

Η εξίσωση Cauchy-Euler

Κλείνουμε την ενότητα με μια σύντομη αναφορά σε μια γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης *μεταβλητών συντελεστών* που μπορεί επίσης να λυθεί χρησιμοποιώντας ρίζες πολυωνύμων. Η **εξίσωση Cauchy-Euler** (ή **ισοδιάστατη**) έχει τη μορφή

$$t^2y''(t) + aty'(t) + by(t) = 0,$$

όπου A και b είναι σταθερές και $t > 0$. Το χαρακτηριστικό αυτής της εξίσωσης είναι ότι σε κάθε όρο η δύναμη του t ταιριάζει με την τάξη της παραγώγου. Υποθέτοντας ότι $t > 0$, και τα δύο μέλη της εξίσωσης μπορούν να διαιρεθούν με t^2 για να προκύψει η εξίσωση

$$y''(t) + \frac{a}{t}y'(t) + \frac{b}{t^2}y(t) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των y' και y δεν είναι συνεχείς σε κάθε διάστημα που περιέχει το $t = 0$. Γι' αυτόν τον λόγο, προβλήματα αρχικών τιμών τα οποία σχετίζονται με αυτή την εξίσωση, τίθενται σε διαστήματα που δεν περιλαμβάνουν την αρχή των αξόνων.

Η εξίσωση λύνεται με χρήση της δοκιμαστικής λύσης της μορφής $y = t^p$, όπου ο εκθέτης p πρέπει να προσδιοριστεί. Αντικαθιστώντας τη δοκιμαστική λύση στη διαφορική εξίσωση, βρίσκουμε

$$t^2(t^p)'' + at(t^p)' + b(t^p) = 0 \quad \text{Αντικατάσταση δοκιμαστικής λύσης}$$

$$p(p-1)t^p + apt^p + bt^p = 0 \quad \text{Παραγώγιση}$$

$$t^p(p(p-1) + ap + b) = 0 \quad \text{Ομαδοποίηση}$$

$$t^p(p^2 + (a-1)p + b) = 0. \quad \text{Απλοποίηση}$$

Αν υποθέσουμε $t > 0$, τότε $t^p > 0$ και μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με t^p. Αυτό που προκύπτει είναι μια πολυωνυμική εξίσωση που πρέπει να λυθεί ως προς p. Λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση $p^2 + (a-1)p + b = 0$ έχουμε πάλι τρεις περιπτώσεις. Αν οι ρίζες είναι πραγματικές και διακεκριμένες, έστω οι p_1 και p_2 με $p_1 \neq p_2$, τότε έχουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\{t^{p_1}, t^{p_2}\}$. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = c_1t^{p_1} + c_2t^{p_2}.$$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 5 Ποιο είναι το πολυώνυμο που σχετίζεται με την εξίσωση $t^2y'' + ty' - y = 0$; Ποιες είναι οι ρίζες του πολυωνύμου; ◄

Οι περιπτώσεις στις οποίες οι ρίζες είναι πραγματικές και διπλές, ή είναι μιγαδικές, εξετάζονται στις Ασκήσεις 52–59 και 62–64.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 **Πρόβλημα αρχικών τιμών Cauchy-Euler** Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$t^2y'' + 2ty' - 2y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 3.$$

ΛΥΣΗ Αντικαθιστώντας τη δοκιμαστική λύση $y = t^p$ στη διαφορική εξίσωση, βρίσκουμε το πολυώνυμο

$$p^2 + p - 2 = (p-1)(p+2) = 0.$$

Οι ρίζες είναι $p_1 = 1$ και $p_2 = -2$, που δίνουν τη γενική λύση

$$y = c_1t + c_2t^{-2}.$$

Για να θέσουμε τις αρχικές συνθήκες πρέπει να υπολογίσουμε την

$$y'(t) = c_1 - 2c_2t^{-3}.$$

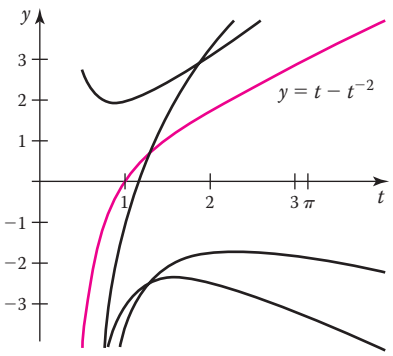
Οι αρχικές συνθήκες συνεπάγονται τώρα ότι

$$y(1) = c_1 + c_2 = 0$$
$$y'(1) = c_1 - 2c_2 = 3.$$

Η λύση αυτού του συστήματος εξισώσεων είναι $c_1 = 1$ και $c_2 = -1$. Συνεπώς η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = t - t^{-2}.$$

Μερικές συναρτήσεις της γενικής λύσης μαζί με τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (με κόκκινο) φαίνονται στο Σχήμα Δ2.12.



Σχήμα Δ2.12

Σχετικές ασκήσεις 33–38 ◄

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ2.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Δώστε τη δοκιμαστική λύση που εφαρμόζεται στη λύση των γραμμικών ομογενών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

2. Ποιο είναι το πολυώνυμο που σχετίζεται με την εξίσωση $y'' - 3y' + 10 = 0$;

3. Να αναφέρετε τις τρεις περιπτώσεις που ανακύπτουν όταν βρίσκουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

4. Ποια είναι η μορφή της γενικής λύσης μιας εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες;

5. Ποια είναι η μορφή της γενικής λύσης μιας εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μία πραγματική διπλή ρίζα;

6. Ποια είναι η μορφή της γενικής λύσης μιας εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες;

7. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας εξίσωσης δεύτερης τάξης έχει ρίζες $-2 \pm 3i$. Δώστε τη μορφή της γενικής εξίσωσης.

8. Δώστε τη δοκιμαστική λύση που εφαρμόζεται στη λύση μιας εξίσωσης δεύτερης τάξης Cauchy-Euler.

Βασικές δεξιότητες

9–14. Γενικές λύσεις με διακεκριμένες πραγματικές ρίζες *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων.*

9. $y'' - 25y = 0$

10. $y'' - 2y' - 15y = 0$

11. $y'' - 3y' = 0$

12. $y'' - y' - \frac{3}{4}y = 0$

13. $2y'' + 6y' - 20y = 0$

14. $y'' - \frac{5}{2}y' + y = 0$

15–20. Προβλήματα αρχικών τιμών με διακεκριμένες πραγματικές ρίζες *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια λύστε το δοσμένο πρόβλημα αρχικών τιμών.*

15. $y'' - 36y = 0 \cdot y(0) = 3, y'(0) = 0$

16. $y'' - 6y' = 0 \cdot y(0) = -1, y'(0) = 2$

17. $y'' - 3y' - 18y = 0 \cdot y(0) = 0, y'(0) = 4$

18. $y'' + 8y' + 15y = 0 \cdot y(0) = 2, y'(0) = 4$

19. $y'' - 2y' - \frac{5}{4}y = 0 \cdot y(0) = 3, y'(0) = 0$

20. $y'' - 10y' + 21y = 0 \cdot y(0) = -3, y'(0) = -1$

21–26. Προβλήματα αρχικών τιμών με διπλές πραγματικές ρίζες *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων Στη συνέχεια λύστε το δοσμένο πρόβλημα αρχικών τιμών.*

21. $y'' - 2y' + y = 0 \cdot y(0) = 4, y'(0) = 0$

22. $y'' + 6y' + 9y = 0 \cdot y(0) = 0, y'(0) = -1$

23. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0 \cdot y(0) = 1, y'(0) = 2$

24. $y'' - 4\sqrt{2}y' + 8y = 0 \cdot y(0) = 1, y'(0) = 0$

25. $y'' + 4y' + 4y = 0 \cdot y(0) = 1, y'(0) = 0$

26. $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = 0 \cdot y(0) = 0, y'(0) = 3$

27–32. Προβλήματα αρχικών τιμών με μιγαδικές ρίζες *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια λύστε το δοσμένο πρόβλημα αρχικών τιμών.*

27. $y'' + 9y = 0 \cdot y(0) = 8, y'(0) = -8$

28. $y'' + 6y' + 25y = 0 \cdot y(0) = 4, y'(0) = 0$

29. $y'' - 2y' + 5y = 0 \cdot y(0) = 1, y'(0) = -1$

30. $y'' + 4y' + 5y = 0 \cdot y(0) = 2, y'(0) = -2$

31. $y'' + 6y' + 10y = 0 \cdot y(0) = 0, y'(0) = 6$

32. $y'' - y' + \frac{1}{2}y = 0 \cdot y(0) = 3, y'(0) = -2$

33–38. Προβλήματα αρχικών τιμών με εξισώσεις Cauchy-Euler *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων για $t \geq 1$. Στη συνέχεια λύστε το δοσμένο πρόβλημα αρχικών τιμών.*

33. $t^2y'' + ty' - y = 0 \cdot y(1) = 2, y'(1) = 0$

34. $t^2y'' + 2ty' - 12y = 0 \cdot y(1) = 0, y'(1) = 6$

35. $t^2y'' - ty' - 15y = 0 \cdot y(1) = 6, y'(1) = -1$

36. $t^2y'' + 4ty' - 4y = 0 \cdot y(1) = 5, y'(1) = -3$

37. $t^2y'' + 6ty' + 6y = 0 \cdot y(1) = 0, y'(1) = -4$

38. $t^2y'' + ty' - 2y = 0 \cdot y(1) = 8, y'(1) = -12$

Περαιτέρω διερευνήσεις

39. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Εξετάστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια ερμηνεία ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Για να λύσετε την εξίσωση $y'' + ty' + 4y = 0$ πρέπει να εφαρμόσετε τη δοκιμαστική λύση $y = e^{rt}$.

β. Η εξίσωση $y'' + ty' + 4t^2y = 0$ είναι μια εξίσωση Cauchy-Euler.

γ. Μια εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές έχει ένα χαρακτηριστικό πολυώνυμο με ρίζες $2 + 3i$ και $-2 + 3i$.

δ. Η γενική λύση μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές μπορεί να είναι η $y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin t \cos t$.

ε. Η γενική λύση μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές μπορεί να είναι η $y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 3t$.

40. Μορφή πλάτους-φάσης Σκοπός είναι να εκφραστεί η συνάρτηση $y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ στη μορφή $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, όπου τα c_1 και c_2 είναι γνωστά και τα A και φ πρέπει να προσδιοριστούν.

α. Εφαρμόστε την ταυτότητα $\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ για να αναπτύξετε την $y = A \sin(\omega t + \varphi)$.

β. Εξισώστε το αποτέλεσμα του μέρους (α) με το $y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$, και ταυτίστε τους συντελεστές των $\sin \omega t$ και $\cos \omega t$ για να συμπεράνετε ότι $c_1 = A \cos \varphi$ και $c_2 = A \sin \varphi$.

γ. Λύστε ως προς A και φ και καταλήξτε ότι $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ και $\tan \varphi = \dfrac{c_2}{c_1}$.

41. Μορφή πλάτους-φάσης Η συνάρτηση $y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ μπορεί επίσης να εκφραστεί στη μορφή $y = A \cos(\omega t + \varphi)$, όπου τα c_1 και c_2 είναι γνωστά και τα A και φ πρέπει να προσδιοριστούν. Εφαρμόστε τη διαδικασία της Άσκησης 40 με την ταυτότητα $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ για να συμπεράνετε ότι

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ και } \tan \varphi = -\frac{c_1}{c_2}.$$

42–45. Μετατροπή στην μορφή πλάτους-φάσης *Εκφράστε τις επόμενες συναρτήσεις στην μορφή $y = A \sin(\omega t + \varphi)$. Ελέγξτε την εργασία σας κάνοντας τα γραφήματα και των δύο μορφών της συνάρτησης.*

42. $y = 2 \sin 3t - 2 \cos 3t$

43. $y = -3 \sin 4t + 3 \cos 4t$

44. $y = \sqrt{3} \sin t + \cos t$

45. $y = -\sin 2t + \sqrt{3} \cos 2t$

46–51. Εξισώσεις υψηλότερης τάξης *Εξισώσεις υψηλότερης τάξης με σταθερούς συντελεστές μπορούν επίσης να λυθούν με χρήση της δοκιμαστικής λύσης $y = e^{rt}$ και να βρεθούν ρίζες ενός χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων εξισώσεων.*

46. $y''' - 4y' = 0$

47. $y''' - y'' - 6y' = 0$

48. $y''' + y' = 0$

49. $y''' - 6y'' + 8y' = 0$

50. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

51. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$

52–55. Εξίσωση Cauchy-Euler με διπλή ρίζα *Μπορεί να δειχθεί (Άσκηση 62) ότι αν το πολυώνυμο που αντιστοιχεί σε μια εξίσωση δεύτερης τάξης Cauchy-Euler έχει διπλή ρίζα $r = r_1$, η δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση είναι $y = t^{r_1} \ln t$, για $t > 0$. Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων εξισώσεων.*

52. $t^2y'' - ty' + y = 0$

53. $t^2y'' + 3ty' + y = 0$

54. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$

55. $t^2y'' + 7ty' + 9y = 0$

56–59. Εξίσωση Cauchy-Euler με μιγαδικές ρίζες *Μπορεί να δειχθεί (Άσκηση 64) ότι αν το πολυώνυμο που αντιστοιχεί σε μια εξίσωση δεύτερης τάξης Cauchy-Euler έχει μιγαδικές ρίζες $r = \alpha \pm i\beta$, οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι $\{t^\alpha \cos(\beta \ln t), t^\alpha \sin(\beta \ln t)\}$, για $t > 0$. Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων εξισώσεων.*

56. $t^2y'' + ty' + y = 0$

57. $t^2y'' + 7ty' + 25y = 0$

58. $t^2y'' - ty' + 5y = 0$

59. $t^2y'' + \dfrac{1}{2}y = 0$

Εφαρμογές

Η Ενότητα Δ2.4 είναι αφιερωμένη σε εφαρμογές εξισώσεων δεύτερης τάξης.

T **60. Ταλαντωτές και κυκλώματα** Όπως παρουσιάζεται στην Ενότητα Δ2.4, η εξίσωση $y'' + py' + qy = 0$ χρησιμοποιείται στη μοντελοποίηση μηχανικών ταλαντωτών και ηλεκτρικών κυκλωμάτων απουσία εξωτερικών δυνάμεων (συνήθως ονομάζονται ελεύθεροι ταλαντωτές). Χρησιμοποιήστε αυτή την εξίσωση στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών ($p^2 - 4q < 0$), στην οποία η γενική λύση έχει την μορφή $e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)$.

α. Στην γενική λύση, έστω $a = -\dfrac{1}{2}$, $c_1 = 2$, και $c_2 = 0$. Να κάνετε το γράφημα της λύσης στο διάστημα $0 \le t \le 2\pi$, με $b = 1, 2, 3, 4$. Ποιο είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών μεγίστων στην ταλάντωση;

β. Για την συνάρτηση του μέρους (α), ποια είναι η συχνότητα ταλάντωσης (i) μετρημένη σε κύκλους ανά μονάδα χρόνου και (ii) μετρημένη σε μονάδες κύκλων ανά 2π μονάδες χρόνου;

γ. Στην γενική λύση, έστω $b = 2$, $c_1 = 2$, και $c_2 = 0$. Να κάνετε το γράφημα της λύσης στο διάστημα $0 \le t \le 2\pi$, με $a = -0.1, -0.5, -1, -1.5, -2$. Σε κάθε περίπτωση, πόσος χρόνος χρειάζεται ώστε το πλάτος της ταλάντωσης να μειωθεί στο 1/3 της αρχικής του τιμής;

δ. Να κάνετε το γράφημα της λύσης $y = e^{-t/2}(2 \cos 2t - \sin 2t)$. Ποιο είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών μεγίστων στην ταλάντωση; Προσεγγιστικά, πόσος χρόνος χρειάζεται ώστε το πλάτος της ταλάντωσης να μειωθεί στο 1/3 της αρχικής του τιμής;

61. Λυγισμός υποστυλώματος Ένα μοντέλο για το λύγισμα ενός ελαστικού υποστυλώματος , περιλαμβάνει την εξίσωση τέταρτης τάξης $y^{(4)}(x) + k^2y''(x) = 0$, όπου k είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης.

Πρόσθετες ασκήσεις

62. Εξίσωση Cauchy- Euler με διπλή ρίζα Ένας από τους τρόπους εύρεσης της δεύτερης γραμμικά ανεξάρτητης λύσης μιας εξίσωσης Cauchy-Euler

$$t^2y''(t) + aty'(t) + by(t) = 0, \quad \text{για } t > 0$$

Στην περίπτωση διπλής ρίζας, είναι η αλλαγή μεταβλητών.

α. Ποιο είναι το αντίστοιχο πολυώνυμο αυτής της εξίσωσης;

β. Δείξτε ότι αν θέσουμε $t = e^x$ (ή $x = \ln t$), τότε αυτή εξίσωση μετατρέπεται στην εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$y''(x) + (a - 1)y'(x) + by(x) = 0.$$

γ. Ποιο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης του μέρους (β); να συμπεράνετε πως αν το πολυώνυμο του μέρους (α) έχει διπλή ρίζα, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει επίσης διπλή ρίζα.

δ. Γράψτε τη γενική λύση της εξίσωσης του μέρους (β) στην περίπτωση της διπλής ρίζας.

ε. Εκφράστε την λύση του μέρους (δ) ως προς την αρχική μεταβλητή t για να δείξετε ότι η δεύτερη γραμμικά

ανεξάρτητης λύση της εξίσωσης Cauchy-Euler είναι $y = t^{(1-a)/2} \ln t$.

63. Άλλη μια εξίσωση Cauchy-Euler με διπλή ρίζα Έχουμε ακόμη έναν διδακτικό τρόπο υπολογισμού της δεύτερης γραμμικά ανεξάρτητης λύσης της εξίσωσης Cauchy-Euler στην περίπτωση της διπλής ρίζας. Υποθέστε ότι η εξίσωση έχει τη μορφή $t^2y'' + aty' + by = 0$, για $t > 0$, και το αντίστοιχο πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα.

α. Δείξτε ότι η διπλή ρίζα είναι $p = \dfrac{1-a}{2}$, που συνεπάγεται ότι $2p + a = 1$.

β. Υποθέτουμε ότι η δεύτερη λύση έχει τη μορφή $y(t) = t^p v(t)$, όπου η συνάρτηση v πρέπει να προσδιοριστεί. Αντικαταστήστε τη λύση αυτής της μορφής στην εξίσωση. Μετά την απλοποίηση και χρήση του μέρους (α), δείξτε ότι η v ικανοποιεί την εξίσωση $t^2v'' + tv' = 0$.

γ. Η εξίσωση αυτή είναι πρώτης τάξης για την v', οπότε θέστε $w = v'$ και λύστε ως προς w για να βρείτε $w = \dfrac{c_1}{t}$, όπου c_1 είναι αυθαίρετη σταθερά της ολοκλήρωσης.

δ. Λύστε τώρα την $v' = w = \dfrac{c_1}{t}$ ως προς v και δείξτε ότι η $y(t) = t^p v(t)$ είναι η πλήρης γενική λύση (με δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις).

64. Εξίσωση Cauchy-Euler με μιγαδικές ρίζες Για να βρούμε την γενική λύση της εξίσωσης Cauchy- Euler

$$t^2y''(t) + aty'(t) + by(t) = 0, \quad \text{για } t > 0$$

Στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών, κάνουμε αλλαγή μεταβλητών όπως στην Άσκηση 62.

α. Δείξτε ότι με $t = e^x$ (ή $x = \ln t$), η αρχική διαφορική εξίσωση γράφεται

$$y''(x) + (a-1)y'(x) + by(x) = 0.$$

β. Λύστε αυτή την εξίσωση με σταθερούς συντελεστές στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών. Μετά εκφράστε τη λύση ως προς t για να δείξετε ότι η γενική λύση της εξίσωσης Cauchy-Euler είναι $y = c_1 t^\alpha \cos(\beta \ln t) + c_2 t^\alpha \sin(\beta \ln t)$, όπου

$$\alpha = \frac{1-a}{2} \text{ και } \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - (a-1)^2}.$$

65. Εύρεση της δεύτερης ρίζας Θεωρούμε την εξίσωση με σταθερούς συντελεστές $y'' + py' + qy = 0$ στην περίπτωση που το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες r_1 και r_2. Η γενική λύση είναι $y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$.

α. Εξηγήστε γιατί η $u = \dfrac{e^{r_1t} - e^{r_2t}}{r_1 - r_2}$ είναι μια λύση της εξίσωσης.

β. Θεωρήστε τώρα γνωστά τα t και r_2 και έστω ότι $r_1 \to r_2$ με σκοπό να εξετάσετε τι συμβαίνει όταν οι διακεκριμένες ρίζες μετατρέπονται σε μία διπλή. Υπολογίστε το $\lim\limits_{r_1 \to r_2} u$ και αναγνωρίστε γραμμικά και τις δύο ανεξάρτητες λύσεις στην περίπτωση της διπλής ρίζας.

66. Άλλη μία εύρεση της δεύτερης ρίζας Θεωρούμε την εξίσωση με σταθερούς συντελεστές $y'' + py' + qy = 0$ στην περίπτωση που το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μια διπλή ρίζα r. Εδώ παρατίθεται ένας ακόμη τρόπος εύρεσης της δεύτερης γραμμικώς ανεξάρτητης λύσης. Επειδή η $y = e^{rt}$ είναι μια λύση, γράφουμε

$$(e^{rt})'' + p(e^{rt})' + q(e^{rt}) = 0.$$

Παραγωγίζουμε τώρα τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς r, υποθέτοντας ότι η σειρά παραγώγισης ως προς t και r μπορεί να εναλλαχθεί. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση

$$(te^{rt})'' + p(te^{rt})' + q(te^{rt}) = 0,$$

Πράγμα που συνεπάγεται ότι η $y = te^{rt}$ είναι επίσης μια λύση.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Αν $y = e^{rt}$, τότε $y' = re^{rt} = ry$ και $y'' = r^2e^{rt} = r^2y$. **2.** $r^2 - 1 = 0$· ρίζες $r = \pm 1$ **3.** $r^2 + 2r + 1 = 0$· λύσεις $\{e^{-t}, te^{-t}\}$ **4.** $r^2 + 1 = 0$· ρίζες $r = \pm i$ **5.** $p^2 - 1 = 0$· ρίζες $p = \pm 1$. ◄

Δ2.3 Γραμμικές μη ομογενείς εξισώσεις

Οι ομογενείς εξισώσεις που εξετάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόζονται στην μοντελοποίηση μηχανικών και ηλεκτρικών ταλαντωτών *απουσία* εξωτερικών δυνάμεων. Εξίσου σημαντικοί είναι ταλαντωτές που διεγείρονται από εξωτερικές δυνάμεις (όπως ένα επιβαλλόμενο φορτίο ή μια πηγή τάσης). Όταν σε ένα μοντέλο διαφορικών εξισώσεων περιλαμβάνονται εξωτερικές δυνάμεις, το αποτέλεσμα είναι μια μη ομογενής εξίσωση, που αποτελεί και το αντικείμενο αυτής της ενότητας.

Οι λύσεις μιας ομογενούς εξίσωσης ταλαντωτή συνήθως ονομάζονται *ελεύθερες ταλαντώσεις*. Εκφράζουν τη φυσική αντίδραση ενός συστήματος σε μια αρχική απομάκρυνση ή ταχύτητα —όπως ορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα, φανταστείτε ένα τούβλο σε ένα ελατήριο που απομακρύνεται από τη θέση ηρεμίας και κατόπιν αφήνεται. Αν καμιά εξωτερική δύναμη δεν επιδρά στο σύστημα, η κίνηση του τούβλου καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες, την δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου (που εξαρτάται από την απομάκρυνση του τούβλου) και πιθανές τριβές (που συνήθως εξαρτώνται από την ταχύτητα του τούβλου). Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι το σύστημα αντιδρά χωρίς εξωτερικές παρεμβάσεις.

Αν είναι παρούσα μια εξωτερική δύναμη, τότε η προκύπτουσα αντίδραση του συστήματος ονομάζεται *εξαναγκασμένη ταλάντωση*. Πρόκειται για έναν συνδυασμό της φυσικής αντίδρασης και των συνεπειών της δύναμης. Για να κατανοήσουμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, πρέπει να γνωρίζουμε λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης (παρουσία δύναμης) *και* λύσεις ομογενούς εξίσωσης (απουσία δύναμης).

Μερικές λύσεις

Θεωρούμε τις εξισώσεις δεύτερης τάξης της μορφής

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = f(t),$$

➤ Για να διαμορφώσουμε την γενική λύση μιας μη ομογενούς εξίσωσης, δεν έχει σημασία ποια από τις άπειρες λύσης θα χρησιμοποιήσουμε. Επειδή δύο μερικές λύσεις διαφέρουν κατά μια λύση της ομογενούς εξίσωσης, η διαφορά μεταξύ δύο μερικών λύσεων συνοψίζεται στη μορφή $c_1y_1 + c_2y_2$.

όπου p και q είναι σταθερές και F μια συγκεκριμένη συνάρτηση που δεν είναι μηδέν εκ ταυτότητος στο διάστημα ενδιαφέροντος. Θυμηθείτε ότι κάθε λύση αυτής της εξίσωσης ονομάζεται **μερική λύση**, την οποία συμβολίζουμε με y_p. Όπως αποδείχτηκε στην Ενότητα Δ2.1, υπάρχουν απείρως πολλές μερικές λύσεις μιας δοσμένης εξίσωσης, που όλες διαφέρουν κατά μια λύση μιας ομογενούς εξίσωσης. Στην Ενότητα Δ2.1 αποδείχτηκε επίσης ότι αν η ομογενής εξίσωση

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0$$

έχει τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2, τότε η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y = \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2}_{\text{λύση της ομογενούς εξίσωσης}} + \underbrace{y_p}_{\text{μερική λύση}},$$

όπου τα c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Αν δίνονται αρχικές συνθήκες, χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των c_1 και c_2. Έτσι, η διαδικασία για την λύση προβλημάτων αρχικών τιμών που σχετίζονται με μια μη ομογενή εξίσωση, αποτελείται από τα επόμενα βήματα.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ Λύση προβλήματος αρχικών τιμών

Ακολουθήστε τα επόμενα βήματα για να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + py' + qy = f(t), y(0) = A, y'(0) = B.$$

1. Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2 της ομογενούς εξίσωσης $y'' + py' + qy = 0$.
2. Βρείτε μια μερική λύση y_p της μη ομογενούς εξίσωσης $y'' + py' + qy = f(t)$.
3. Διαμορφώστε τη γενική λύση $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$.
4. Χρησιμοποιήστε τις αρχικές συνθήκες $y(0) = A$ και $y'(0) = B$ για να υπολογίσετε τις σταθερές c_1 και c_2.

Γνωρίζουμε ήδη πώς να βρίσκουμε λύσεις μιας ομογενούς εξίσωσης, οπότε στρεφόμαστε τώρα σε μεθόδους με τις οποίες βρίσκουμε μερικές λύσεις.

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

Στη θεωρία, η συνάρτηση F του δεξιού μέλους μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση. Περιορίζουμε την προσοχή μας σε τρεις οικογένειες συναρτήσεων:

- πολυωνυμικές συναρτήσεις: $f(t) = p_n(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$,
- εκθετικές συναρτήσεις: $f(t) = Ae^{at}$, και
- συναρτήσεις ημίτονου και συνημίτονου: $f(t) = A \cos bt + B \sin bt$.

Για τις συναρτήσεις του δευτέρου μέλους που καταγράφονται πιο πάνω, η καλύτερη μέθοδος εύρεσης μιας μερικής λύσης είναι η **μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών**. Μερικά παραδείγματα επεξηγούν την μέθοδο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Απροσδιόριστοι συντελεστές με πολυώνυμα** Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης $y'' - 4y = t^2 - 3t + 2$.

ΛΥΣΗ Ακολουθούμε τα βήματα που αναφέραμε.

1. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι $y'' - 4y = 0$. Εφαρμόζοντας τις μεθόδους της Ενότητας Δ2.2, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2 - 4$, που έχει ρίζες $r = \pm 2$. Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$.

2. Μια μερική λύση είναι η συνάρτηση y_p, η οποία όταν προστίθεται στα πολλαπλάσια των παραγώγων της ισούται με $t^2 - 3t + 2$. Μια τέτοια συνάρτηση πρέπει να είναι πολυωνυμική και μάλιστα ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του δύο. Συνεπώς, χρησιμοποιούμε μια δοκιμαστική λύση της μορφής $y_p = At^2 + Bt + C$, όπου τα A, B, και C ονομάζονται *απροσδιόριστοι συντελεστές* που πρέπει να βρεθούν. Αντικαθιστούμε τώρα την δοκιμαστική λύση στο αριστερό μέλος της διαφορικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p &= \underbrace{(At^2 + Bt + C)''}_{2A} - 4(At^2 + Bt + C) && \text{Αντικατάσταση} \\ &= 2A - 4At^2 - 4Bt - 4C && \text{Παραγώγιση} \\ &= -4At^2 - 4Bt + 2A - 4C. && \text{Ομαδοποίηση} \end{aligned}$$

Εξισώνουμε το δεξί και το αριστερό μέλος της διαφορικής εξίσωσης και έχουμε την εξίσωση

$$-4At^2 - 4Bt + 2A - 4C = t^2 - 3t + 2.$$

Για να ισχύει αυτή η εξίσωση για κάθε t, οι συντελεστές των t^2, t, και 1 και στα δύο μέλη της εξίσωσης πρέπει να είναι ίσοι. Εξισώνουμε τους συντελεστές και βρίσκουμε τις ακόλουθες συνθήκες για τα A, B, και C.

$$\begin{aligned} t^2&: \quad -4A = 1 \\ t&: \quad -4B = -3 \\ 1&: \quad 2A - 4C = 2 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων δίνει

$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{3}{4}, \quad \text{και} \quad C = -\frac{5}{8}.$$

3. Διαμορφώνουμε τώρα τη γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης, η οποία είναι

$$y = \underbrace{c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}}_{\text{λύση της ομογενούς εξίσωσης}} \underbrace{- \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{5}{8}}_{\text{μερική λύση}}.$$

Σχετικές ασκήσεις 9–12 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1
Ποια δοκιμαστική λύση χρησιμοποιείται για να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 2y = 3t + 1$; ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Απροσδιόριστοι συντελεστές με εκθετικές** Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $y'' + y' - 2y = 6e^{3t} - e^{-t}$.

ΛΥΣΗ Ακολουθούμε πάλι τα βήματα που αναφέραμε.

1. Η ομογενής εξίσωση $y'' + y' - 2y = 0$ και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2 + r - 2$, που έχει ρίζες $r = 1$ και $r = -2$. Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $y = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$.
2. Για να βρούμε μια μερική λύση σκεφτόμαστε όπως στο Παράδειγμα 1.Μια μερική λύση είναι η συνάρτηση y_p και πρέπει να προστεθούν τα πολλαπλάσια των παραγώγων στην $6e^{3t} - e^{-t}$. Μια δοκιμαστική λύση σε αυτή την περίπτωση είναι η $y_p = Ae^{3t} + Be^{-t}$, όπου τα A και B πρέπει να βρεθούν. Αντικαθιστούμε τώρα τη δοκιμαστική λύση στη διαφορική εξίσωση:

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = \underbrace{(Ae^{3t} + Be^{-t})''}_{9Ae^{3t} + Be^{-t}} + \underbrace{(Ae^{3t} + Be^{-t})'}_{3Ae^{3t} - Be^{-t}} - 2(Ae^{3t} + Be^{-t}) \quad \text{Αντικατάσταση}$$

$$= 9Ae^{3t} + Be^{-t} + (3Ae^{3t} - Be^{-t}) - 2(Ae^{3t} + Be^{-t}) \quad \text{Παραγώγιση}$$

$$= e^{3t}(9A + 3A - 2A) + e^{-t}(B - B - 2B) \quad \text{Ομαδοποίηση}$$

$$= 10Ae^{3t} - 2Be^{-t} \quad \text{Απλοποίηση}$$

$$= 6e^{3t} - e^{-t}. \quad \text{Ισούται με το δεξί μέλος}$$

Αυτός ο υπολογισμός καταλήγει στην εξίσωση $10Ae^{3t} - 2Be^{-t} = 6e^{3t} - e^{-t}$, η οποία ισχύει για κάθε t μόνο αν οι συντελεστές των αντίστοιχων όρων και στις δύο πλευρές της εξίσωσης είναι ίσοι.

$$e^{3t}: \quad 10A = 6$$
$$e^{-t}: \quad -2B = -1$$

Εδώ έχουμε $A = \frac{3}{5}$ και $B = \frac{1}{2}$.

3. Η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Σχετικές ασκήσεις 13–16 ◀

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2
Ποια δοκιμαστική λύση πρέπει να εφαρμοστεί για να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 2y = 4e^{-5t}$; ◀

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 **Απροσδιόριστοι συντελεστές σε συναρτήσεις ημίτονου και συνημίτονου** Βρείτε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + 16y = 15 \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

ΛΥΣΗ

1. Η ομογενής εξίσωση $y'' + 16y = 0$ και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2 + 16$, που έχει ρίζες $r = \pm 4i$. Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $y = c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t$.
2. Βασιζόμενοι στη μορφή της συνάρτησης του δευτέρου μέλους, μια πιθανή δοκιμαστική λύση για την μερική λύση είναι $y_p = A \sin t + B \cos t$, όπου οι τιμές των A και B πρέπει να βρεθούν. Αντικαθιστούμε τώρα τη δοκιμαστική λύση στη διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$y_p'' + 16y_p = \underbrace{(A \sin t + B \cos t)''}_{-A \sin t - B \cos t} + 16(A \sin t + B \cos t) \quad \text{Αντικατάσταση}$$

$$= -A \sin t - B \cos t + 16(A \sin t + B \cos t) \quad \text{Παραγώγιση}$$

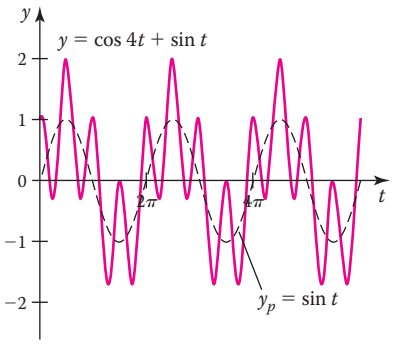
$$= 15A \sin t + 15B \cos t \quad \text{Ομαδοποίηση}$$

$$= 15 \sin t. \quad \text{Ισούται με } f(t).$$

Η συνθήκη $15A \sin t + 15B \cos t = 15 \sin t$, πρέπει να ισχύει για κάθε t, οπότε πρέπει $A = 1$ και $B = 0$.

3. Έπεται ότι η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y = c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t + \sin t.$$



Σχήμα Δ2.13

4. Στο παράδειγμα αυτό, μας είχαν δοθεί οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των σταθερών c_1 και c_2. Παρατηρήστε αρχικά ότι $y'(t) = 4c_1 \cos 4t - 4c_2 \sin 4t + \cos t$. Οι αρχικές συνθήκες συνεπάγονται τώρα ότι

$$y(0) = c_2 = 1 \quad \text{και} \quad y'(0) = 4c_1 + 1 = 1, \text{ ή } c_1 = 0.$$

Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = \cos 4t + \sin t.$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (κόκκινη καμπύλη στο Σχήμα Δ2.13) είναι κατατοπιστική. Περιέχει έναν όρο από την λύση της ομογενούς εξίσωσης, που εκφράζει τη φυσική αντίδραση του συστήματος και έναν όρο από τη μερική λύση, που εκφράζει τα αποτελέσματα της εξωτερικής δύναμης. Η προκύπτουσα αντίδραση είναι ένα κύμα υψηλής συχνότητας $y = \cos 4t$ πάνω σε ένα κύμα χαμηλής συχνότητας $y = \sin t$ (διακεκομμένη καμπύλη στο Σχήμα Δ2.13).

Ο υπολογισμός που οδήγησε στη λύση πρόσφερε μια ακόμη χρήσιμη πληροφορία. Η δοκιμαστική λύση έχει έναν όρο ($B \cos t$) που δεν εμφανίζεται στη μερική λύση. Η μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών θα δίνει πάντα μια μηδενική τιμή στον συντελεστή ενός όρου που δεν είναι αναγκαίος. Έτσι είναι προτιμότερο να κάνουμε λάθος στην πλευρά που περιέχει πολλούς όρους στη δοκιμαστική λύση.

Σχετικές ασκήσεις 17–20 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Ποια δοκιμαστική λύση πρέπει να εφαρμοστεί για να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 2y = \cos 5t - 3 \sin 5t$; ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Απροσδιόριστοι συντελεστές με συνδυασμό συναρτήσεων

Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + 6y' + 25y = 29e^{-t} \sin t.$$

ΛΥΣΗ

1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς εξίσωσης είναι $r^2 + 6r + 25 = 0$, του οποίου οι ρίζες είναι $r = -3 \pm 4i$. Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y = c_1 e^{-3t} \sin 4t + c_2 e^{-3t} \cos 4t.$$

2. Για να βρούμε μια μερική λύση, εικάζουμε ότι ένας όρος της μορφής $e^{at} \sin bt$ ή $e^{at} \cos bt$ στο δεξί μέλος της εξίσωσης απαιτεί μια δοκιμαστική λύση της μορφής $y_p = Ae^{at} \sin bt + Be^{at} \cos bt$. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα θέτουμε $a = -1$ και $b = 1$. Παραγωγίζοντας και ομαδοποιώντας όρους, βρίσκουμε ότι

$$y_p' = -(A + B)e^{-t} \sin t + (A - B)e^{-t} \cos t \quad \text{και}$$
$$y_p'' = 2Be^{-t} \sin t - 2Ae^{-t} \cos t.$$

Όταν αντικαταστήσουμε τις παραγώγους στην διαφορική εξίσωση και απλοποιήσουμε, το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση

$$(19A - 4B)e^{-t} \sin t + (4A + 19B)e^{-t} \cos t = 29e^{-t} \sin t.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των $e^{-t} \sin t$ και $e^{-t} \cos t$ στις δύο πλευρές της εξίσωσης και έχουμε το σύστημα για τα A και B:

$$19A - 4B = 29$$
$$4A + 19B = 0.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $A = \dfrac{19}{13}$ και $B = -\dfrac{4}{13}$.

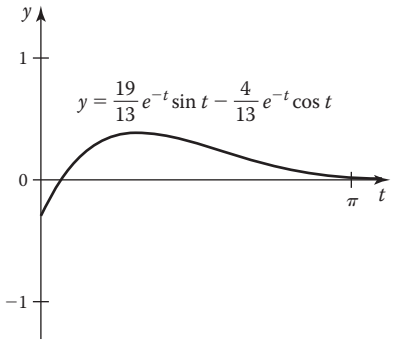
Άρα, η μερική λύση είναι

$$y_p = \frac{19}{13} e^{-t} \sin t - \frac{4}{13} e^{-t} \cos t.$$

3. Συνδυάζοντας τη λύση της ομογενούς εξίσωσης και τη μερική λύση, η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y = c_1 e^{-3t} \sin 4t + c_2 e^{-3t} \cos 4t + \frac{19}{13} e^{-t} \sin t - \frac{4}{13} e^{-t} \cos t.$$

Παίρνουμε $c_1 = c_2 = 0$, και βλέπουμε ότι η μερική λύση (Σχήμα Δ2.14) είναι μια ταχεία φθίνουσα κυματική ταλάντωση.



Σχήμα Δ2.14

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4
Ποια δοκιμαστική λύση πρέπει να εφαρμοστεί για να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 2y = 13e^{-2t} \cos 7t$;

Σχετικές ασκήσεις 21–28

Τα τέσσερα προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν πώς λειτουργεί η μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών. Από εδώ και στο εξής, μάλλον αντιλαμβάνεστε ότι αν επιλέξετε μια κατάλληλη δοκιμαστική λύση, τότε η μέθοδος ουσιαστικά παράγει μια μερική λύση μιας εξίσωσης, αν και σε μερικές περιπτώσεις χρειάζεται να επιμείνουμε κάπως. Συνεπώς, το κύριο σημείο της μεθόδου είναι να επιλέξουμε μια κατάλληλη δοκιμαστική λύση. Στον Πίνακα Δ2.2 καταγράφονται οι δοκιμαστικές λύσεις που είναι απαραίτητες για τις συναρτήσεις που συνήθως εμφανίζονται στο δεξί μέλος. Σε αυτόν τον πίνακα, τα πεζά γράμματα παριστάνουν συντελεστές που δίνονται, τα κεφαλαία είναι οι απροσδιόριστοι συντελεστές που πρέπει να βρεθούν και p_n είναι ο n-οστός βαθμός του πολυωνύμου

$$p_n(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0, \text{ όπου } a_n \neq 0.$$

Πίνακας Δ2.2 Δοκιμαστικές λύσεις—Σχεδόν πάντοτε

Συναρτήσεις δεξιού μέλους f **που περιέχουν ...**	**Δοκιμαστική λύση**
$p_n(t)$	$A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0$
e^{at}	Ae^{at}
$\sin bt$ ή $\cos bt$	$A \sin bt + B \cos bt$
$p_n(t)e^{at}$	$(A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0)e^{at}$
$p_n(t) \sin bt$ ή $p_n(t) \cos bt$	$(A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0) \sin bt + (B_n t^n + \cdots + B_1 t + B_0) \cos bt$
$e^{at} \sin bt$ ή $e^{at} \cos bt$	$Ae^{at} \sin bt + Be^{at} \cos bt$

Αν μια συνάρτηση δεξιού μέλους είναι άθροισμα δύο ή περισσότερων συναρτήσεων (όπως, $f = f_1 + f_2$), πρέπει να βρεθεί μια μερική λύση για κάθε συνάρτηση του αθροίσματος. Τότε η μερική λύση της f είναι το άθροισμα των μερικών λύσεων των f_1 και f_2 (Άσκηση 51).

Οι εξαιρέσεις

Οι δοκιμαστικές λύσεις του Πίνακα Δ2.2 εφαρμόζονται σχεδόν πάντοτε. Υπάρχουν όμως ορισμένες εξαιρέσεις. Αν οι εξαιρέσεις ήταν χωρίς σημασία, ίσως να τις παραβλέπαμε. Όπως δείχνουμε στην επόμενη ενότητα, οι εξαιρέσεις αντιστοιχούν σε κάποιο σημαντικό φυσικό φαινόμενο, οπότε είναι αναγκαίο να εξετάσουμε αυτές τις ειδικές περιπτώσεις.

Για να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + 9y = 4 \sin 3t,$$

προχωρούμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς εξίσωσης είναι $r^2 + 9$, του οποίου οι ρίζες είναι $r = \pm 3i$. Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t.$$

Για να βρούμε μια μερική λύση, ακολουθούμε τον Πίνακα Δ2.2 και εφαρμόζουμε την δοκιμαστική λύση $y_p = A \sin 3t + B \cos 3t$. Αντικαθιστούμε αυτή τη λύση στην διαφορική εξίσωση και οδηγούμαστε στην

$$\begin{aligned}
y_p'' + 9y_p &= \underbrace{(A \sin 3t + B \cos 3t)''}_{-9A \sin 3t - 9B \cos 3t} + 9(A \sin 3t + B \cos 3t) && \text{Αντικατάσταση} \\
&= -9A \sin 3t - 9B \cos 3t + 9A \sin 3t + 9B \cos 3t && \text{Παραγώγιση} \\
&= \underbrace{(-9A + 9A)}_{0} \sin 3t + \underbrace{(-9B + 9B)}_{0} \cos 3t && \text{Απλοποίηση} \\
&\neq 4 \sin 3t, \quad \text{για κάθε } t.
\end{aligned}$$

Κανονικά, σε αυτό το στάδιο των υπολογισμών, θα έπρεπε να ταυτίσουμε τους συντελεστές των $\sin 3t$ και $\cos 3t$ στα δύο μέλη της εξίσωσης και να λύσουμε ως προς A και B. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση, βρίσκουμε ότι $y_p'' + 9y_p = 0$, που σημαίνει ότι η δοκιμαστική λύση δεν εφαρμόζεται. Η αποτυχία οφείλεται στο ότι η λύση της ομογενούς εξίσωσης εμφανίζεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης.

Πριν εξηγήσουμε τον τρόπο αντιμετώπισης αυτής της ειδικής περίπτωσης, ας εξετάσουμε τι σημαίνει με βάση τη φυσική. Θυμηθείτε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης που εκφράζουν την φυσική αντίδραση ενός συστήματος απαλλαγμένου από εξωτερικές δυνάμεις. Όταν μια εξωτερική δύναμη εφαρμόζεται σε ένα σύστημα και ταιριάζει με τη φυσική αντίδραση του συστήματος, συμβαίνει κάτι ασυνήθιστο. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *συντονισμός*.

Όταν η λύση μιας ομογενούς εξίσωσης εμφανίζεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης, η δοκιμαστική λύση πρέπει κάπως να προσαρμοστεί. Η προσαρμοσμένη δοκιμαστική λύση είναι η δοκιμαστική λύση που δίνεται στον Πίνακα Δ2.2 πολλαπλασιασμένη επί t^s, όπου επιλέγουμε $s = 1$ ή $s = 2$ για να βεβαιωθούμε ότι κανείς όρος της δοκιμαστικής λύσης δεν είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης (Άσκηση 52).

Ο Πίνακας Δ2.2 μπορεί τώρα να ανασκευαστεί και παρουσιαστεί εν συντομία ως εξής.

ΣΥΝΟΨΗ Δοκιμαστικές λύσεις για την $y'' + py' + qy = f$

Για να βρούμε την μερική λύση της εξίσωσης

$$y'' + py' + qy = p_n(t)e^{at} \cdot \begin{cases} \sin bt \\ \cos bt \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε την δοκιμαστική λύση του Πίνακα Δ2.2 πολλαπλασιασμένη επί t^s, όπου s είναι ο μικρότερος μη μηδενικός ακέραιος που διασφαλίζει ότι κανείς όρος της y_p δεν είναι μια ομογενής λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 **Ειδικές περιπτώσεις** Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + 9y = 4 \sin 3t.$$

ΛΥΣΗ Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $4 \sin 3t$ του δεξιού μέλους είναι μια λύση της ομογενούς εξίσωσης. Συνεπώς, τροποποιούμε τη βασική δοκιμαστική λύση $y_p = A \sin 3t + B \cos 3t$ και γράφουμε

$$y_p = At \sin 3t + Bt \cos 3t.$$

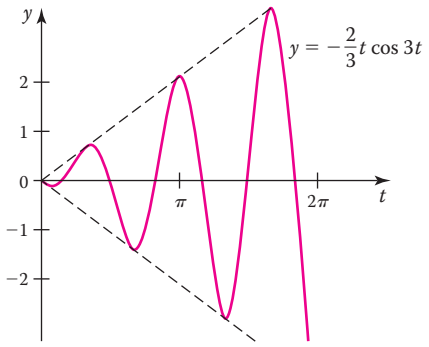
Αντικαθιστούμε στη διαφορική εξίσωση και βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
y_p'' + 9y_p &= (At\sin 3t + Bt\cos 3t)'' + 9(At\sin 3t + Bt\cos 3t) && \text{Αντικατάσταση}\\
&= \underbrace{A(6\cos 3t - 9t\sin 3t) + B(-6\sin 3t - 9t\cos 3t)}_{y_p''}\\
&\quad + 9At\sin 3t + 9Bt\cos 3t && \text{Παραγώγιση}\\
&= -6B\sin 3t + 6A\cos 3t\\
&\quad -\underbrace{(9A - 9A)}_{0}t\sin 3t - \underbrace{(9B - 9B)}_{0}t\cos 3t && \text{Απλοποίηση}\\
&= -6B\sin 3t + 6A\cos 3t && \text{Απλοποίηση}\\
&= 4\sin 3t. && \text{Ισούται με το δεξί μέλος}
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η διαγραφή όρων μας αφήνει έναν γραμμικό συνδυασμό των $\sin 3t$ και $\cos 3t$.
Χρησιμοποιούμε τώρα την εξίσωση $-6B\sin 3t + 6A\cos 3t = 4\sin 3t$ και εξισώνουμε τους συντελεστές των $\sin 3t$ και $\cos 3t$. Καταλήγουμε ότι $A = 0$ και $B = -\frac{2}{3}$.
Άρα, η μερική λύση είναι $y_p = -\frac{2}{3}t\cos 3t$, και η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t - \frac{2}{3}t\cos 3t.$$

Το Σχήμα Δ2.15 απεικονίζει τη μερική λύση ($c_1 = c_2 = 0$) και τη σημαντική της ιδιότητα: Λόγω του πολλαπλασιαστικού παράγοντα του t στην λύση, το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει γραμμικά με το t. Η λύση περιβάλλεται από δύο ευθείες με κλίσεις $\pm\frac{2}{3}$.



Σχήμα Δ2.15

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 5
Ποια δοκιμαστική λύση πρέπει να εφαρμοστεί για να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 4y = 6e^{2t}$; ◄

Σχετικές ασκήσεις 29–34 ◄

Κλείνοντας, επισημαίνουμε μια ακόμη περίπτωση που δεν έχει εξεταστεί. Θεωρήστε την εξίσωση $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2t}$. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για την ομογενή εξίσωση είναι το $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$. Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει την διπλή ρίζα $r = -2$ και η λύση της ομογενούς εξίσωσης (από την Ενότητα Δ2.2) είναι $y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$. Τώρα αν αναζητήσουμε μια μερική λύση, βλέπουμε πως μια λύση της ομογενούς εξίσωσης εμφανίζεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης. Η δοκιμαστική λύση δεν μπορεί να είναι $y_p = Ae^{-2t}$ ή $y_p = Ate^{-2t}$, επειδή και οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Σε αυτή την περίπτωση, η σωστή δοκιμαστική λύση είναι $y_p = At^2e^{-2t}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ2.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Εξηγήστε πώς θα βρείτε τη γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης $y'' + py' + qy = f(t)$, όπου p και q είναι σταθερές;

2. Ποια δοκιμαστική λύση θα εφαρμόζατε για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' + py' + qy = t^3 - t + 1$, όπου p και q είναι σταθερές;

3. Ποια δοκιμαστική λύση θα εφαρμόζατε για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 8y = 2e^{-4t}$;

4. Ποια δοκιμαστική λύση θα εφαρμόζατε για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 2y = 2\sin 3t$;

5. Ποια δοκιμαστική λύση θα εφαρμόζατε για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 2y = 6e^{-t}\cos 4t$;

6. Ποια δοκιμαστική λύση θα εφαρμόζατε για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 2y = 1 + t + \cos 3t$;

7. Ποια δοκιμαστική λύση θα εφαρμόζατε για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 4y = t^2e^{-t}$;

8. Ποια δοκιμαστική λύση θα εφαρμόζατε για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2t}$;

Βασικές δεξιότητες

9–12. Απροσδιόριστοι συντελεστές με πολυώνυμα
Βρείτε μια μερική λύση στις επόμενες εξισώσεις.

9. $y'' - 9y = 2t + 1$

10. $y'' - 2y' - 15y = 3t^3 - 2t - 4$

11. $y'' + 3y' - 18y = 2t^4 - t^2$

12. $y'' + 5y = 6t^3 - t^2$

13–16. Απροσδιόριστοι συντελεστές με εκθετικές
Βρείτε μια μερική λύση στις επόμενες εξισώσεις.

13. $y'' - y = e^{-2t}$

14. $y'' + 3y = 5e^{-3t}$

15. $y'' - 4y' - 32y = 6e^{-3t}$

16. $y'' + 2y' - 8y = e^{-t} - 2e^t$

17–20. Απροσδιόριστοι συντελεστές με συνδυασμό συναρτήσεων
Βρείτε μια μερική λύση στις επόμενες εξισώσεις.

17. $y'' - y = 3\sin 2t$

18. $y'' + 4y = 5\cos 3t$

19. $y'' - y' - 6y = \sin t + 3\cos t$

20. $y'' - 3y' - 4y = 2\cos 2t - 3\sin 2t$

21–28. Απροσδιόριστοι συντελεστές με συνδυασμό συναρτήσεων
Βρείτε μια μερική λύση στις επόμενες εξισώσεις.

21. $y'' - 4y = 2e^t - 1$

22. $y'' + y = \cos 2t + t^3$

23. $y'' + y' - 12y = 2te^{-t}$

24. $y'' + 4y = e^{-t}\cos t$

25. $y'' + 16y = t\cos 2t$

26. $y'' - 9y = (t^2 + 1)e^{-t}$

27. $y'' - y' - 2y = t(\cos t - \sin t)$

28. $y'' + 2y' - 4y = t^2\cos t$

29–34. Απροσδιόριστοι συντελεστές με ειδικές περιπτώσεις
Βρείτε μια μερική λύση στις επόμενες εξισώσεις.

29. $y'' - y = 3e^t$

30. $y'' + y = 3\cos t$

31. $y'' + y' - 6y = 4e^{-3t}$

32. $y'' + 4y = \cos 2t$

33. $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-2t}$

34. $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$

Περαιτέρω διερευνήσεις

35. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Εξετάστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια ερμηνεία ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 4y = t^3$, πρέπει να εφαρμόσετε την δοκιμαστική λύση $y_p = At^3$.

β. Για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' + y' - 6y = \sin t$, πρέπει να εφαρμόσετε την δοκιμαστική λύση $y_p = A\sin t$.

γ. Για να βρείτε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' + 10y' + 25y = e^{5t}$, πρέπει να εφαρμόσετε την δοκιμαστική λύση $y_p = Ae^{5t}$.

36–41. Προβλήματα αρχικών τιμών *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων εξισώσεων και μετά λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών που δίνονται.*

36. $y'' - 9y = 2e^{-t}, y(0) = 0, y'(0) = 0$

37. $y'' + y = 4\sin 2t, y(0) = 1, y'(0) = 0$

38. $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-3t}, y(0) = 0, y'(0) = 1$

39. $y'' + 4y' + 5y = 12, y(0) = 1, y'(0) = -1$

40. $y'' - y = 2e^{-t}\sin t, y(0) = 4, y'(0) = 0$

41. $y'' + 9y = 6\cos 3t, y(0) = 0, y'(0) = 0$

42–45. Μεγαλύτεροι υπολογισμοί *Βρείτε μια μερική λύση στις επόμενες εξισώσεις.*

42. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{-2t}\cos t$

43. $y'' + y' - y = 3t^4 - 3t^3 + t$

44. $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-t}\cos 2t$

45. $y'' - y = 25te^{-t}\sin 3t$

46–49. Εξισώσεις υψηλότερης τάξης *Η μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών επεκτείνεται φυσικά σε υψηλότερης τάξης εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Βρείτε μια μερική λύση στις επόμενες εξισώσεις.*

46. $y''' - y' = 8t^3$

47. $y''' - 8y = 7e^t$

48. $y^{(4)} - y = 5 \sin 2t$

49. $y^{(4)} - 3y'' + 2y = 6te^{2t}$

Εφαρμογές

Εφαρμογές των Ενοτήτων Δ2.2 και Δ2.3 εξετάζονται στην Ενότητα Δ2.4.

T **50.** **Κοιτώντας μπροστά: διακροτήματα** Μια από τις εφαρμογές που εξετάστηκαν στην Ενότητα Δ2.4 καταλήγει στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + \omega_0^2 y = a \cos \omega t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

όπου a, ω και ω_0 είναι θετικοί αριθμοί.

α. Υποθέστε ότι $\omega \neq \omega_0$ και βρείτε την γενική λύση αυτής της εξίσωσης.

β. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών και δείξτε ότι η λύση του είναι

$$y = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

γ. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία τα ω και ω_0 είναι σχεδόν ίσα. Θέστε $\omega = 5$ και $\omega_0 = 6$ και να κάνετε το γράφημα της λύσης στο $[0, 6\pi]$. Περιγράψτε την λύση που βλέπετε.

δ. Για να βρείτε τις συχνότητες στη λύση, εφαρμόστε την ταυτότητα

$$\cos \omega t - \cos \omega_0 t = 2 \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$$

για να γράψετε τη λύση ως γινόμενο δύο ημιτονοειδών συναρτήσεων.

ε. Ερμηνεύστε τώρα το γράφημα του μέρους (γ) και ταυτοποιήστε τις δύο συχνότητες στη Λύση.

Πρόσθετες ασκήσεις

51. **Άθροισμα μερικών λύσεων** Δείξτε ότι μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' + py' + qy = f(t) + g(t)$ είναι $y_{p1} + y_{p2}$, όπου y_{p1} είναι μια μερική λύση της $y'' + py' + qy = f(t)$ και y_{p2} είναι μια μερική λύση της $y'' + py' + qy = g(t)$.

52. **Μεταβολή παραμέτρων** Την εύρεση μιας μερικής λύσης όταν μια ομογενής λύση εμφανίζεται στη συνάρτηση του δεξιού μέλους, μπορούμε να την χειριστούμε εφαρμόζοντας μια μέθοδο που ονομάζεται *μεταβολή των παραμέτρων*. (Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται επίσης συχνά για την εύρεση μερικών λύσεων εξισώσεων που δεν μπορούμε να τις χειριστούμε με τους απροσδιόριστους συντελεστές.) Τα παρακάτω βήματα δείχνουν πώς εφαρμόζεται η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων για την εύρεση της μερικής λύσης μιας συγκεκριμένης εξίσωσης.

α. Θεωρήστε την εξίσωση $y'' - y = e^t$. Δείξτε ότι οι ομογενείς λύσεις είναι $y_1 = e^t$ και $y_2 = e^{-t}$. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση του δεξιού μέλους είναι μια ομογενής λύση.

β. Υποθέστε ότι μια μερική λύση έχει τη μορφή

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{-t},$$

όπου οι συναρτήσεις u_1 και u_2 πρέπει να βρεθούν. Υπολογίστε την y_p' και θέστε την συνθήκη $u_1'e^t + u_2'e^{-t} = 0$ για να δείξετε ότι $y_p' = u_1e^t - u_2e^{-t}$.

γ. Υπολογίστε την y_p'' και αντικαταστήστε την στη διαφορική εξίσωση. Αφού διαγράψετε μερικούς όρους, δείξτε ότι η εξίσωση απλοποιείται στην $u_1'e^t - u_2'e^{-t} = e^t$.

δ. Τα μέρη (γ) και (δ) δίνουν δύο εξισώσεις για τα u_1' και u_2'. Απαλείψτε το u_2' και δείξτε ότι η εξίσωση ως προς u_1 είναι $u_1' = \frac{1}{2}$.

ε. Λύστε την εξίσωση του μέρους (δ) ως προς u_1.

στ. Χρησιμοποιήστε το μέρος (ε) για δείξετε ότι η εξίσωση ως προς u_2 είναι $u_2' = -\frac{1}{2}e^{2t}$.

ζ. Λύστε την εξίσωση του μέρους (στ) ως προς u_2.

η. Τώρα συγκροτήστε τη μερική λύση $y_p(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{-t}$ και δείξτε ότι $y_p = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}e^t$.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

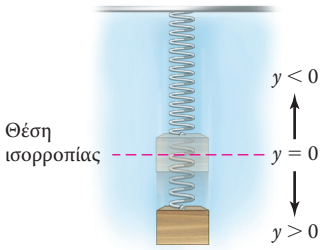
1. $y_p = At + B$ **2.** $y_p = Ae^{-5t}$ **3.** $y_p = A \sin 5t + B \cos 5t$ **4.** $y_p = Ae^{-2t} \sin 7t + Be^{-2t} \cos 7t$ **5.** $y_p = Ate^{2t}$. ◄

Δ2.4 Εφαρμογές

Σε όλο αυτό το κεφάλαιο έχουμε αναφερθεί σε πολλές εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Έχουμε λοιπόν τα απαραίτητα εργαλεία για να διατυπώσουμε και να λύσουμε μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης που εμφανίζονται σε πρακτικές εφαρμογές.

Εξισώσεις μηχανικών ταλαντωτών

Ο όρος *ταλαντωτής* χρησιμοποιείται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Μπορεί να είναι ένα τούβλο που αναπηδά σε ένα ελατήριο, το εκκρεμές σε ένα ρολόι δαπέδου, ένα κύμα σε έναν παλμογράφο, ή μια παλίρροια με την ανύψωση και την υποχώρηση των υδάτων. Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε μηχανικούς και ηλεκτρικούς ταλαντωτές και επειδή οι μηχανικοί ταλαντωτές είναι ευκολότερο να οπτικοποιηθούν, αρχίζουμε με αυτούς. Το σημαντικό είναι ότι οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση διάφορων ταλαντωτών μοιάζουν μεταξύ τους κατά πολλούς τρόπους.



Σχήμα Δ2.16

Ένας κλασικός μηχανικός ταλαντωτής είναι ένα τούβλο σε ένα ελατήριο. Αν το ελατήριο είναι προσανατολισμένο κατακόρυφα ή οριζόντια, η σχετική διαφορική εξίσωση είναι η ίδια. Θεωρούμε το σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα Δ2.16 στο οποίο ένα τούβλο μάζας m συνδέεται με ένα αβαρές ελατήριο που αναρτάται σε ένα άκαμπτο στήριγμα. Όταν το τούβλο κρέμεται σε ηρεμία, το ελατήριο είναι μερικώς τεντωμένο και το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Δηλώνουμε τη θέση αυτή του τούβλου με $y = 0$. Ο θετικός άξονας y δείχνει προς τα κάτω στην κατεύθυνση της δύναμης της βαρύτητας, δηλαδή οι θετικές θέσεις του τούβλου βρίσκονται κάτω από τη θέση ισορροπίας.

Κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, το τούβλο μπορεί να τραβηχτεί προς τα κάτω ή να ωθηθεί προς τα πάνω σε μια θέση y_0, και μπορεί να του έχει δοθεί μια αρχική ταχύτητα v_0. Συνεπώς έχουμε αρχικές συνθήκες της μορφής $y(0) = y_0$ και $y'(0) = v_0$. Ο στόχος μας είναι να διαμορφώσουμε μια διαφορική εξίσωση που να περιγράφει τη θέση $y(t)$ του τούβλου μετά από τη στιγμή που το σύστημα τέθηκε σε κίνηση στον χρόνο $t = 0$.

Ο δεύτερος νόμος κίνησης του Νεύτωνα εφαρμόζεται για να περιγράψει την κίνηση συνηθισμένων αντικειμένων. Για μονοδιάστατη κίνηση, λέει ότι

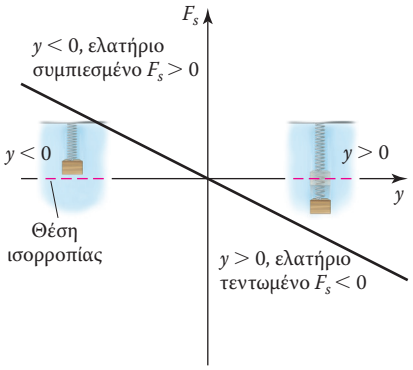
$$\underbrace{\text{μάζα}}_{m} \cdot \underbrace{\text{επιτάχυνση}}_{a = y''} = \underbrace{\text{άθροισμα δυνάμεων}}_{F}$$

ή πιο σύντομα $my'' = F$, όπου η F μπορεί να εξαρτάται από τα t, y και y'.

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε τρεις δυνάμεις που μπορούν να επιδρούν στο τούβλο: τη δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου, την απόσβεση (ή τριβή ή αντίσταση) και τις εξωτερικές δυνάμεις. Ας τις δούμε με την σειρά.

1. **Δύναμη επαναφοράς:** Σε πολλές περιπτώσεις, η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο τούβλο εκφράζεται ορθά από τον νόμο του Hooke —ένα πειραματικό αποτέλεσμα που ισχύει όταν ο βαθμός της έκτασης ή της συσπείρωσης του ελατηρίου είναι μικρός σε σχέση με το ολικό μήκος του ελατηρίου. Υποθέτουμε ότι το τούβλο συνδέεται με το ελατήριο στη θέση y. Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke, το ελατήριο ασκεί μια δύναμη στο τούβλο που τραβάει ή σπρώχνει το τούβλο προς την θέση ισορροπίας. Αυτή η δύναμη που συμβολίζεται $F_s = -ky$, όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά που καθορίζεται από την σκληρότητα του ελατηρίου. Σχήμα Δ2.17 δείχνει πώς εκφράζεται ο νόμος του Hooke. Αν $y > 0$, τότε το ελατήριο εκτείνεται και είναι $F_s < 0$, που σημαίνει ότι η δύναμη δρα προς τα επάνω, τραβώντας το τούβλο προς τη θέση ισορροπίας. Αν $y < 0$, τότε το ελατήριο συσπειρώνεται και είναι $F_s > 0$, που σημαίνει ότι η δύναμη δρα προς τα κάτω, ωθώντας το τούβλο να «επανέλθει» στη θέση ισορροπίας.

➤ Ίσως αναρωτηθείτε γιατί η δύναμη της βαρύτητας δεν περιλαμβάνεται στην εξίσωση της κίνησης. Μια σύντομη απάντηση είναι ότι η δύναμη της βαρύτητας στο τούβλο είναι mg, που είναι το βάρος του τούβλου. Όταν το τούβλο κρέμεται ακίνητο από το ελατήριο, αυτή η δύναμη εκτείνει το ελατήριο στη θέση που ονομάσαμε θέση ισορροπίας ($y = 0$). Μετρώντας τη θέση του τούβλου σχετικά με τη θέση ισορροπίας, η δύναμη της βαρύτητας ουσιαστικά περιλαμβάνεται στην εξίσωση της κίνησης. Δείτε την Άσκηση 42 για πιο λεπτομερή ανάλυση. Η εξίσωση της κίνησης για οριζόντιο σύστημα ελατηρίου-τούβλου είναι ταυτόσημη με την εξίσωση που προκύπτει εδώ (Ασκήσεις 43–46).



Σχήμα Δ2.17

2. **Δύναμη απόσβεσης:** Αντίσταση στην κίνηση του τούβλου μπορεί να συμβεί με πολλούς τρόπους. Το μέσον μέσα στο οποίο κινείται το τούβλο (όπως αέρας ή λάδι) μπορεί να δρα αντιδρώντας στην κίνηση. Σε ορισμένα πειράματα, η αντίσταση μπορεί να προκληθεί από έναν αποσβεστήρα (ένα έμβολο και κύλινδρο) συνδεμένο στο τούβλο. Σε όλες τις περιπτώσεις, η δύναμη απόσβεσης δρα στην αντίθετη κατεύθυνση της κίνησης. Μια συνήθης παραδοχή είναι ότι η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη προς την ταχύτητα y'. Συνεπώς υποθέτουμε ότι αυτή δύναμη έχει την μορφή $F_d = -cy'$, όπου $c > 0$ μετρά την ένταση της αντίστασης.

➤ Υπάρχουν πολλοί τρόποι να εκφραστεί η αντίσταση στην κίνηση. Μια άλλη συνήθης παραδοχή είναι ότι $F_d = -c(y')^2$, που οδηγεί σε μη γραμμική εξίσωση της κίνησης.

3. **Εξωτερικές δυνάμεις:** Ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο μοντελοποιείται ένα σύστημα, οι εξωτερικές δυνάμεις F_{ext} μπορούν να παρουσιαστούν με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, σε ένα κατακόρυφα αναρτημένο σύστημα ελατηρίου-τούβλου, η ανάρτηση του ελατηρίου μπορεί να κινηθεί, ίσως περιοδικά με συγκεκριμένο πλάτος και συχνότητα. Ενώ η δύναμη επαναφοράς εξαρτάται από το y και η δύναμη απόσβεσης εξαρτάται από το y', η εξωτερική δύναμη είναι σταθερή ή εξαρτάται μόνο από το t.

Με αυτές τις τρεις δυνάμεις, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή

$$my'' = F_s + F_d + F_{\text{ext}} = -ky - cy' + F_{\text{ext}}.$$

Κάθε όρος σε αυτή την εξίσωση έχει μονάδες δύναμης, που θεωρούμε ότι μετρώνται σε newtons ($1\ \text{N} = 1\ \text{kg m/s}^2$). Οπότε οι μονάδες του k είναι N/m ή kg/s^2, και οι μονάδες του C είναι kg/s. Διαιρώντας τα μέλη της εξίσωσης m και αναδιατάσσοντας τους όρους καταλήγουμε σε μια γνωστή εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές,

$$y'' + \underbrace{\frac{c}{m}}_{b} y' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} y = \underbrace{\frac{F_{\text{ext}}(t)}{m}}_{f} \quad \text{ή} \quad y'' + by' + \omega_0^2 y = f(t),$$

όπου $b = \dfrac{c}{m}$ και $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας, εξετάζουμε διάφορες εκδοχές αυτής της εξίσωσης. Η ορολογία που ακολουθεί βοηθάει στην οργάνωση αυτών των περιπτώσεων.

- Αν η δύναμη απόσβεσης είναι μηδέν ($c = b = 0$), η κίνηση ονομάζεται κίνηση **χωρίς απόσβεση.** Διαφορετικά, η κίνηση είναι **με απόσβεση.**
- Αν δεν υπάρχει παρουσία εξωτερικών δυνάμεων ($F_{\text{ext}} = f = 0$), το σύστημα εκτελεί **ελεύθερη ταλάντωση**. Σε διαφορετική περίπτωση η απόκριση οφείλεται σε **εξαναγκασμένη ταλάντωση**.

Με αυτή μόνο την εξίσωση κίνησης, υπάρχουν τέσσερις κατηγορίες κίνησης, κάθε μία από τις οποίες εξετάζουμε.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Χρησιμοποιήστε τους όρους με *απόσβεση/χωρίς απόσβεση* και *ελεύθερη/εξαναγκασμένη* ταλάντωση για να κατατάξετε τα συστήματα που περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις.
(α) $y'' + 0.5y' + 4.3y = 0$,
(β) $y'' + 9.2y = \sin 3t$. ◄

Ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση

Εξετάζουμε τώρα μερικά στοιχεία της συμπεριφοράς που περιγράφεται από τη γενική εξίσωση ταλαντωτή

$$y'' + by' + \omega_0^2 y = f(t).$$

Το πιο εύκολο σημείο για να ξεκινήσουμε είναι με ελεύθερη ($f(t) = 0$) και χωρίς απόσβεση ($b = 0$) κίνηση. Πρόκειται για την ιδανική περίπτωση όπου για ένα τούβλο δίνεται η αρχική απομάκρυνση και/ή η ταχύτητα (όπως ορίζουν οι αρχικές συνθήκες) και τότε επιτρέπεται η ταλάντωσή του με την παρουσία μόνο της δύναμης επαναφοράς. Η εξίσωση της κίνησης είναι απλά

$$y'' + \omega_0^2 y = 0, \text{ όπου } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

➤ Μπορείτε να ελέγξετε ότι οι μονάδες του ω_0 είναι s^{-1}, που είναι μονάδες συχνότητας. Για παράδειγμα, $\omega_0 = 3$ σημαίνει 3 ταλαντώσεις ανά 2π χρονικές μονάδες, ή $3/(2\pi)$ ταλαντώσεις στη χρονική μονάδα. Αν η γωνιακή συχνότητα είναι ω_0, τότε η περίοδος είναι $2\pi/\omega_0$ s.

Εξισώσεις αυτού του είδους λύθηκαν στην Ενότητα Δ2.2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2 + \omega_0^2$, που έχει ρίζες $r = \pm i\omega_0$. Η γενική λύση είναι

$$y = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t.$$

Βλέπουμε ότι το ω_0 παίζει τον ρόλο μιας γωνιακής συχνότητας. Εδώ είναι η **φυσική συχνότητα** (ή ιδιοσυχνότητα) του ταλαντωτή. Η λύση περιγράφει ένα κύμα με σταθερό πλάτος και περίοδο $2\pi/\omega_0$; που είναι επίσης ένα παράδειγμα μιας **απλής αρμονικής κίνησης**. Θυμηθείτε ότι η λύση της μορφής $y = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$ μπορεί πάντοτε να εκφραστεί στη μορφή πλάτους-φάσης $y = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

➤ Δείτε την Ενότητα Δ2.2 για μια επανάληψη της μορφής πλάτους-φάσης μιας λύσης. Εδώ,

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ και } \tan \varphi = \frac{c_2}{c_1}.$$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Θεωρήστε τη συνάρτηση $y = 2 \sin 4.5t$. Ποια είναι η περίοδος της ταλάντωσης που περιγράφει η συνάρτηση; Πόσες ταλαντώσεις κάνει το γράφημα κάθε 2π χρονικές μονάδες; Πόσες ταλαντώσεις κάνει το γράφημα σε κάθε χρονική μονάδα; ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση** Υποθέτουμε ότι ένα τούβλο μάζας 0.5 kg είναι συνδεδεμένο σε ένα ελατήριο και το ελατήριο επιμηκύνεται 0.5 m για να φέρει το σύστημα σε ισορροπία. Στη συνέχεια το τούβλο τραβιέται επιπλέον 0.25 m από την θέση ισορροπίας του και ελευθερώνεται με μια ταχύτητα προς τα κάτω 0.1 m/s. Βρείτε την θέση του τούβλου για $t \geq 0$.

ΛΥΣΗ Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε την σταθερά k. του ελατηρίου. Θυμόμαστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$. Όταν το τούβλο είναι συνδεδεμένο στο ελατήριο, ασκεί σε αυτό μια δύναμη (ίση με το βάρος) του $mg = (0.5\ \mathrm{kg}) \cdot (9.8\ \mathrm{m/s^2}) = 4.9\ \mathrm{N}$ Από τον νόμο του Hooke αυτή η δύναμη ισούται με ky, όπου $y = 0.5$ m είναι η απόσταση κατά την οποία επιμηκύνθηκε το ελατήριο λόγω της δύναμης. Άρα, η σταθερά της δύναμης ικανοποιεί την $0.5\,k = 4.9$, δηλαδή $k = 9.8.\ \mathrm{N/m}$. Αυτό σημαίνει ότι η φυσική συχνότητα του ταλαντωτή είναι $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{9.8}{0.5}} \approx 4.43\ \mathrm{s^{-1}}$, που αντιστοιχεί σε περίοδο $2\pi/4.43 \approx 1.42$ s.

Η εξίσωση της κίνησης έχει τη γενική λύση

$$y = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τις αρχικές συνθήκες για να υπολογίσουμε τα c_1 και c_2. Παρατηρούμε ότι

$$y' = c_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - c_2 \omega_0 \sin \omega_0 t$$

και εφαρμόζοντας το $\omega_0 = 4.43$, βρίσκουμε

$$y(0) = c_2 = 0.25 \quad \text{και} \quad y'(0) = c_1\omega_0 = 0.1 \text{ ή } c_1 = \frac{0.1}{\omega_0} \approx 0.023.$$

Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

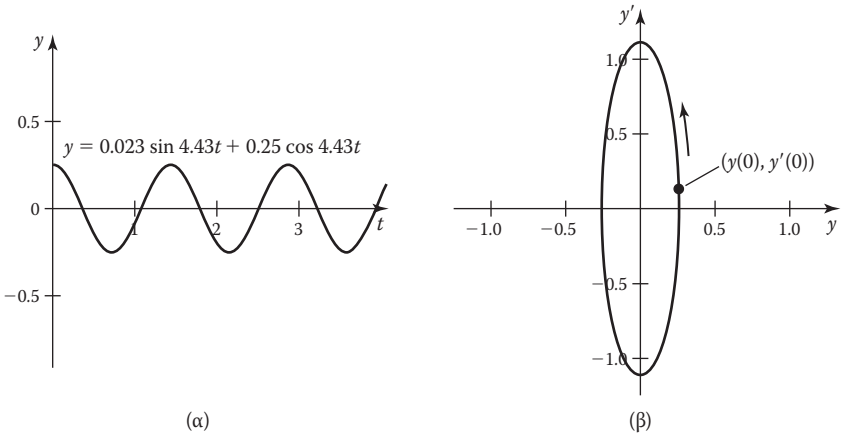
$$y = 0.023 \sin 4.43t + 0.25 \cos 4.43t.$$

➤ Αν και μπορεί να έχουν γίνει προσεγγίσεις στον υπολογισμό των συντελεστών των εξισώσεων, όταν γράφουμε εξισώσεις και λύσεις θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα της ισότητας.

Η λύση μπορεί να γραφεί επίσης στην μορφή πλάτους-φάσης ως

$$y = 0.251 \sin (4.43t + 1.48).$$

Όταν η λύση γραφεί σε αυτή τη μορφή, είναι φανερό ότι το τούβλο ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος περίπου 0.25 για όλο το χρονικό διάστημα (Σχήμα Δ2.18α). Χωρίς απόσβεση δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας στο σύστημα, πράγμα που συμβαίνει μόνο σε ιδανικές συνθήκες.



Σχήμα Δ2.18

Το γράφημα στο επίπεδο φάσης της λύσης (Σχήμα Δ2.18β) δείχνει ξεκάθαρα ότι το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται περίπου μεταξύ ± 0.25, ενώ η ταχύτητα μεταβάλλεται περίπου μεταξύ ± 1.1. Η κλειστή καμπύλη στο επίπεδο φάσης δηλώνει ότι η λύση είναι περιοδική με καμιά αλλαγή στο πλάτος σε όλη τη χρονική διάρκεια.

Σχετικές ασκήσεις 7–12 ◄

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση: Διακροτήματα

➤ Θυμόμαστε ότι διαιρέσαμε με τη μάζα, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για να πάρουμε μια εξίσωση με όρους επιτάχυνσης. Κατά συνέπεια, η εξωτερική δύναμη πρέπει επίσης να διαιρεθεί με το m.

Όταν μια εξωτερική δύναμη συμμετέχει σε ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση, εμφανίζονται μερικά αξιοπρόσεκτα αποτελέσματα. Περιορίζουμε την προσοχή μας σε εξωτερικές δυνάμεις της μορφής $F_{\text{ext}} = F_0 \cos \omega t$, όπου το πλάτος F_0 και η συχνότητα ω της δύναμης είναι γνωστά. Η μη ομογενής διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Εξισώσεις αυτού του είδους εξετάστηκαν στην Ενότητα Δ2.3. Όπως προηγουμένως, η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t.$$

Εφαρμόζουμε απροσδιόριστους συντελεστές με την προϋπόθεση ότι $\omega \neq \omega_0$, και η μερική λύση (Άσκηση 38) είναι

$$y_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Συνεπώς η γενική λύση για τον εξαναγκασμένο χωρίς απόσβεση ταλαντωτή είναι

$$y = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Για να απομονώσουμε το αποτέλεσμα της εξωτερικής δύναμης, θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες $y(0) = y'(0) = 0$, που συνεπάγεται ότι $c_1 = 0$ και $c_2 = -\dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών γίνεται

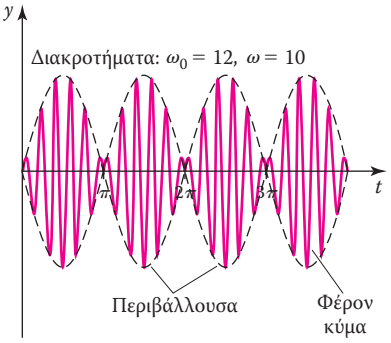
$$y = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t),$$

που είναι το άθροισμα δύο ταλαντευόμενων συναρτήσεων με διαφορετικές συχνότητες.

Η λύση είναι πιο εύκολο να απεικονιστεί όταν γραφεί με τη βοήθεια μιας τριγωνομετρικής ταυτότητας ως (Άσκηση 39)

$$y = \underbrace{\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}_{\text{κύμα χαμηλής συχνότητας}} \underbrace{\sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}}_{\text{κύμα υψηλής συχνότητας}}.$$

Αυτή η συνάρτηση είναι πολύ ενδιαφέρουσα όταν $\omega \approx \omega_0$. Σε αυτή την περίπτωση, το $\dfrac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \dfrac{(\omega_0 - \omega)t}{2}$ είναι ένα κύμα χαμηλής συχνότητας με πλάτος $\dfrac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ και μια (μεγάλη) περίοδο $\dfrac{2\pi}{(\omega_0 - \omega)/2}$, ενώ το $\sin \dfrac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$ είναι ένα κύμα υψηλής συχνότητας με πλάτος 1 και μια (μικρή) περίοδο $\dfrac{2\pi}{(\omega_0 + \omega)/2}$. Όταν τέτοιοι όροι εμφανίζονται σε ένα γινόμενο, το αποτέλεσμα είναι ένα υψηλής συχνότητας *φέρον κύμα* που περικλείεται από χαμηλής συχνότητας κύματα (Σχήμα Δ2.19), ένα φαινόμενο γνωστό ως **διακρότημα**. Το φαινόμενο μπορεί να συμβεί (ακουστεί) όταν δύο διαπασών με σχεδόν ίσες συχνότητες δονηθούν την ίδια στιγμή. Όταν το φαινόμενο συμβαίνει σε ηλεκτρικά κυκλώματα, ονομάζεται **διαμόρφωση πλάτους**.



Σχήμα Δ2.19

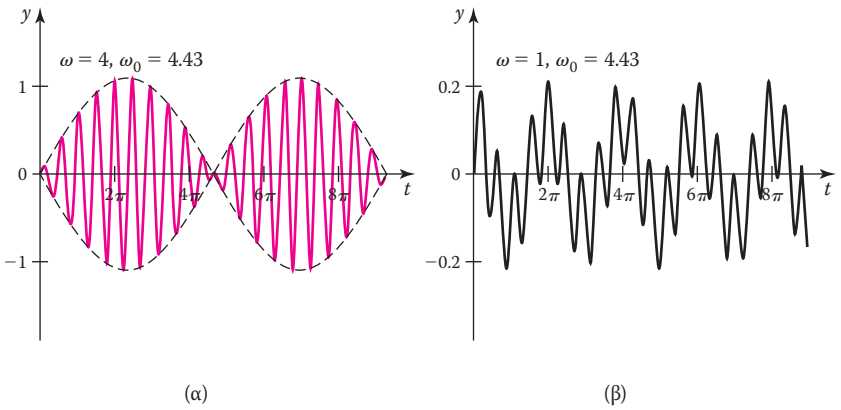
ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Αν το κύμα στο Σχήμα Δ2.19 ήταν ένα ηχητικό κύμα (ίσως αυτό που παράγεται από δύο διαπασών), σε ποιες χρονικές στιγμές ο ήχος είναι πιο δυνατός; ➤

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση** Θεωρούμε ότι το σύστημα ελατηρίου-τούβλου του Παραδείγματος 1 είναι συνδεδεμένο σε μια συσκευή που κινεί την ανάρτηση του συστήματος πάνω και κάτω κατακόρυφα προσδίδοντας στο σύστημα μια δύναμη που δίνεται από τον τύπο $F_{\text{ext}} = \cos \omega t$. Βρείτε τη θέση $y(t)$ του τούβλου για $t \geq 0$, με συχνότητες εξαναγκασμού $\omega = 4$ και $\omega = 1$, υποθέτοντας ότι $y(0) = y'(0) = 0$.

ΛΥΣΗ Από το Παράδειγμα 1, γνωρίζουμε ότι $m = 0.5$ kg, που συνεπάγεται $\dfrac{2F_0}{m} = 4$; Η φυσική συχνότητα είναι $\omega_0 \approx 4.43\ \text{s}^{-1}$. Συνεπώς, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι περίπου

$$y = \frac{4}{\underbrace{19.6}_{\omega_0^2} - \omega^2} \sin \frac{(4.43 - \omega)t}{2} \sin \frac{(4.43 + \omega)t}{2}.$$

Οι λύσεις απεικονίζονται στο Σχήμα Δ2.20 με $\omega = 4$ and $\omega = 1$. Στην πρώτη περίπτωση, η φυσική συχνότητα είναι ίση περίπου με την συχνότητα εξαναγκασμού και βλέπουμε ένα δείγμα διακροτημάτων. Αντίθετα, αν οι δύο συχνότητες διαφέρουν σημαντικά, η λύση που προκύπτει είναι μια λιγότερο οργανωμένη υπέρθεση των δύο κυμάτων. Παρατηρήστε ότι τα διακροτήματα παράγουν ενίσχυση των δύο επιμέρους κυμάτων και το πλάτος της ταλάντωσης είναι μεγαλύτερο με διακροτήματα.



(α) (β)

Σχήμα Δ2.20

Σχετικές ασκήσεις 13–16 ◄

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση: Συντονισμός

Το άλλο ενδιαφέρον θέμα που εμφανίζεται στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση συμβαίνει όταν $\omega = \omega_0$. Στην περίπτωση αυτή, η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης ταυτίζεται με την φυσική συχνότητα. Η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t.$$

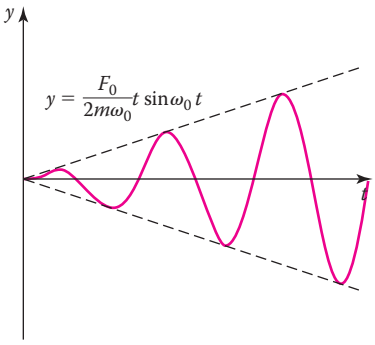
Έχουμε τώρα την ειδική περίπτωση που συζητήθηκε στην Ενότητα Δ2.3 κατά την οποία στο δεξί μέλος της εξίσωσης εμφανίζεται μια ομογενής λύση. Θυμηθείτε ότι για να βρούμε τότε μια μερική λύση, χρησιμοποιούμε μια δοκιμαστική λύση της μορφής $y_p = At \sin \omega_0 t + Bt \cos \omega_0 t$. Διεκπεραιώνοντας γνωστούς υπολογισμούς με απροσδιόριστους συντελεστές, βρίσκουμε τη μερική λύση

$$y_p = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Άρα, η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

➤ Η καταστροφική κατάρρευση της γέφυρας Tacoma Narrows το 1940, αποδόθηκε από πολλούς σε ένα συντονισμό που δημιουργήθηκε όταν η συχνότητα ριπών του ανέμου ταυτίστηκε με τη φυσική συχνότητα της γέφυρας. Προσεκτικότερες αναλύσεις θεωρούν ότι οι αιτίες της κατάρρευσης ήταν πιο περίπλοκες και πιθανά να εμπλέκονται αεροδυναμικά φαινόμενα. Δείτε το στο You Tube.



Σχήμα Δ2.21

Το κύριο χαρακτηριστικό αυτής της λύσης είναι ο όρος $t \sin \omega_0 t$, ο οποίος είναι μια ταλαντευόμενη συνάρτηση με αυξανόμενο πλάτος (Σχήμα Δ2.21). Αυτός ο όρος παραπέμπει σε ένα φαινόμενο γνωστό ως **συντονισμός**, που δεν μπορεί να εμμένει σε πραγματικά φυσικά συστήματα. Σε ένα πραγματικό σύστημα, είτε καταρρέει η ακεραιότητά του (για παράδειγμα, η καταστροφή ενός αμορτισέρ ή η κατάρρευση μιας γέφυρας) είτε η απόσβεση τελικά περιορίζει την ανάπτυξη των ταλαντώσεων.

Σχετικές ασκήσεις 13–16 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 **Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση** Θεωρούμε ότι το σύστημα ελατηρίου-τούβλου του Παραδείγματος 1 είναι συνδεδεμένο σε μια συσκευή που κινεί το στήριγμα του συστήματος πάνω και κάτω κατακόρυφα προσδίδοντας στο σύστημα μια δύναμη που δίνεται από τον τύπο $F_{\text{ext}} = \cos \omega t$, όπου $\omega = \omega_0 = 4.43$ είναι η φυσική συχνότητα του συστήματος. Βρείτε τη θέση $y(t)$ του τούβλου για $t \geq 0$, υποθέτοντας ότι $y(0) = y'(0) = 0$.

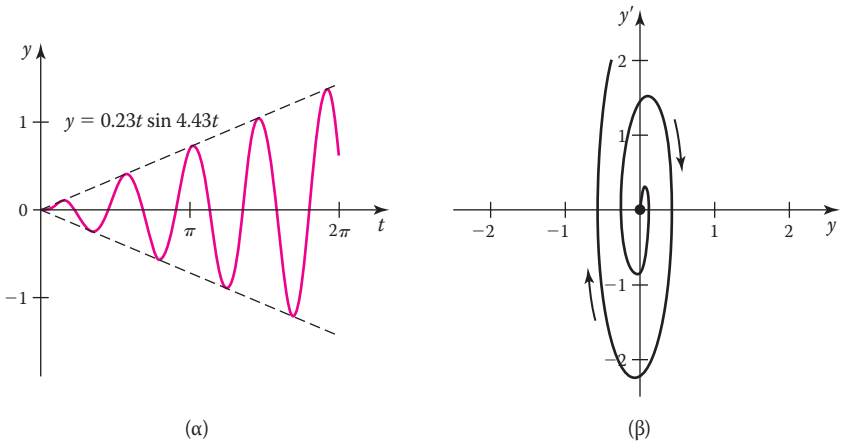
ΛΥΣΗ Με $F_0 = 1$, $m = 0.5$, και $\omega_0 = 4.43$, η γενική λύση γίνεται

$$y = c_1 \sin 4.43t + c_2 \cos 4.43t + 0.23t \sin 4.43t.$$

Παρεμβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες, ένας σύντομος υπολογισμός δίνει $c_1 = c_2 = 0$. Συνεπώς η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = 0.23t \sin 4.43t.$$

Η λύση (Σχήμα Δ2.22α) παρουσιάζει το αυξανόμενο πλάτος που σχετίζεται με τον συντονισμό. Η προς τα έξω στρεφόμενη σπείρα στο γράφημα του επιπέδου φάσης της λύσης (Σχήμα Δ2.22β) δίνει επίσης μια περιγραφική εικόνα της αύξησης του πλάτους.



Σχήμα Δ2.22

Σχετικές ασκήσεις 13-16 ◄

Ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση

Στην πραγματικότητα, ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση δεν συμβαίνουν στα περισσότερα φυσικά συστήματα διότι είναι πάντοτε παρούσες με κάποια μορφή τριβές ή αντιστάσεις. Στρεφόμαστε λοιπόν σε πιο ρεαλιστικούς ταλαντωτές στους οποίους είναι παρούσα κάποια μορφή απόσβεσης. Χωρίς εξωτερικές δυνάμεις, η εξίσωση είναι

$$y'' + by' + \omega_0^2 y = 0,$$

όπου το $b = \dfrac{c}{m} > 0$ μετράει την ισχύ της απόσβεσης και το $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ είναι η φυσική συχνότητα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για την εξίσωση αυτή είναι $r^2 + br + \omega_0^2$, και έχει ρίζες

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

Το πρόβλημα κεντρίζει το ενδιαφέρον επειδή ανακύπτουν τρεις περιπτώσεις οι οποίες εξαρτώνται από τα σχετικά μεγέθη του b (απόσβεση) και του ω_0 (δύναμη επαναφοράς).

1. Αν $b^2 > 4\omega_0^2$, η δύναμη απόσβεσης είναι επικρατέστερη και οι ρίζες r_1 και r_2 είναι πραγματικές και άνισες. Παρατηρήστε ακόμη ότι επειδή $b > 0$ και $\sqrt{b^2 - 4\omega_0^2} < b$, και οι δύο ρίζες είναι αρνητικές. Συνεπώς αναμένουμε εκθετικά μειούμενες λύσεις της μορφής

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \text{ με } r_1 < 0 \text{ και } r_2 < 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση, που συνήθως ονομάζεται **υπερκρίσιμη απόσβεση**, η απόσβεση είναι ικανή να περιορίσει ταλαντώσεις.

2. Αν $b^2 = 4\omega_0^2$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μια διπλή ρίζα $r_1 = -\dfrac{b}{2}$. Τώρα έχουμε λύσεις της μορφής

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}, \text{ με } r_1 < 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση, το σύστημα «προσπαθεί» να ταλαντωθεί, αλλά οι ταλαντώσεις μειώνονται γρήγορα ή δεν εμφανίζονται καθόλου. Αυτή η οριακή περίπτωση ονομάζεται **κρίσιμη απόσβεση.**

3. Αν $b^2 < 4\omega_0^2$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες της μορφής

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm i\frac{\sqrt{4\omega_0^2 - b^2}}{2}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, η δύναμη επαναφοράς υπερισχύει της δύναμης απόσβεσης. Ως αποτέλεσμα, οι λύσεις είναι ταλαντευόμενες με μειούμενα πλάτη. Αυτή η περίπτωση ονομάζεται **υποκρίσιμη απόσβεση**, και οι λύσεις έχουν τη μορφή

$$y = e^{-bt/2}(c_1 \sin at + c_2 \cos at), \text{ όπου } a = \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - b^2}}{2}.$$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4 Υπολογίστε το $\lim_{t\to\infty} Ate^{-at}$ με $a > 0$. Στην περίπτωση αυτή της κρίσιμης απόσβεσης, οι λύσεις μειώνονται πάντα καθώς το t αυξάνει; ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 **Ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση** Θεωρήστε ότι το σύστημα ελατηρίου-τούβλου του Παραδείγματος 1 ($\omega_0 = 4.43$) μοντελοποιείται έτσι ώστε να περιλαμβάνονται αποτελέσματα απόσβεσης. Βρείτε τη θέση $y(t)$ του τούβλου για $t \geq 0$, με τους ακόλουθους συντελεστές απόσβεσης και αρχικές συνθήκες.

α. $c = 1, y(0) = 0, y'(0) = 1$

β. $c = 4.43, y(0) = 0, y'(0) = 3$

γ. $c = 5, y(0) = 0, y'(0) = 5$

ΛΥΣΗ

α. Με $c = 1$ και $m = 0.5$, έχουμε $b = \dfrac{c}{m} = 2$. Επειδή η φυσική συχνότητα του ταλαντωτή είναι $\omega_0 = 4.43$, βρίσκουμε ότι $b^2 - 4\omega_0^2 \approx -74.5 < 0$, και έχουμε περίπτωση υποκρίσιμης απόσβεσης. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μιγαδικοί αριθμοί

$$r_1 \approx -1 + i\frac{\sqrt{74.5}}{2} \approx -1 + 4.3i \quad \text{και} \quad r_2 \approx -1 - i\frac{\sqrt{74.5}}{2} \approx -1 - 4.3i,$$

που δίνουν τη γενική λύση

$$y = e^{-t}(c_1 \sin 4.3t + c_2 \cos 4.3t).$$

Παρατηρήστε ότι

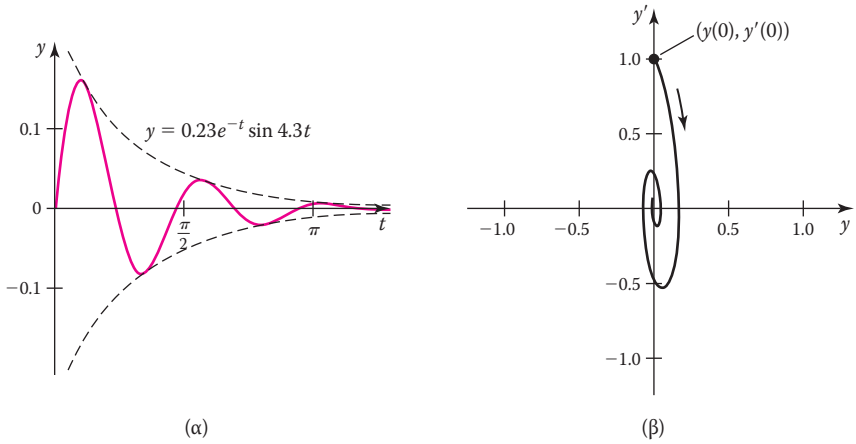
$$y' = -e^{-t}(c_1 \sin 4.3t + c_2 \cos 4.3t) + e^{-t}(4.3c_1 \cos 4.3t - 4.3c_2 \sin 4.3t).$$

Οι αρχικές συνθήκες συνεπάγονται ότι

$$y(0) = c_2 = 0 \text{ και } y'(0) = 4.3c_1 = 1 \text{ ή } c_1 \approx 0.23.$$

➤ Οι ρίζες μιας ταλαντευόμενης συνάρτησης με απόσβεση ισαπέχουν. Όμως δεν αναφερόμαστε γενικά στην *περίοδο* μιας τέτοιας συνάρτησης. Μερικά κείμενα χρησιμοποιούν τον όρο *ψευδοπερίοδο (quasiperiod)* για να περιγράψουν την απόσταση μεταξύ τοπικών μεγίστων σε αυτή την περίπτωση.

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y = 0.23e^{-t}\sin 4.3t$ και το γράφημά της (Σχήμα Δ2.23α) δείχνει ταλαντώσεις που αποσβένονται. Αφού το τούβλο ταλαντωθεί τρεις φορές, το πλάτος της ταλάντωσης έχει ελαττωθεί περίπου 20 φορές. Η προς τα μέσα στρεφόμενη σπείρα στο γράφημα του επιπέδου φάσης απεικονίζει επίσης τις μειούμενες ταλαντώσεις (Σχήμα Δ2.23β).



Σχήμα Δ2.23

β. Με $m = 0.5$ και $c = \omega_0 = 4.43$, έχουμε $b = 2c$, που συνεπάγεται ότι $b^2 - 4\omega_0^2 = 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε κρίσιμη απόσβεση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μια διπλή ρίζα $r_1 = -\dfrac{b}{2} = -4.43$. Άρα η γενική λύση της εξίσωσης είναι $y = c_1e^{-4.43t} + c_2te^{-4.43t}$. Πριν εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε

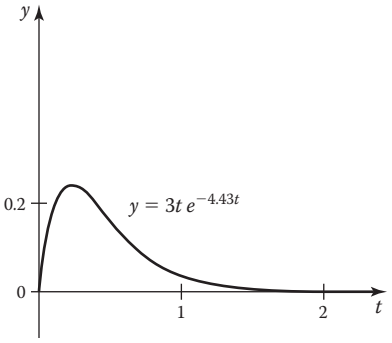
$$y' = -4.43c_1e^{-4.43t} + c_2e^{-4.43t}(1 - 4.43t).$$

Οι αρχικές συνθήκες συνεπάγονται ότι

$$y(0) = c_1 = 0 \quad \text{και} \quad y'(0) = c_2 = 3.$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών γίνεται

$$y = 3te^{-4.43t}.$$



Σχήμα Δ2.24

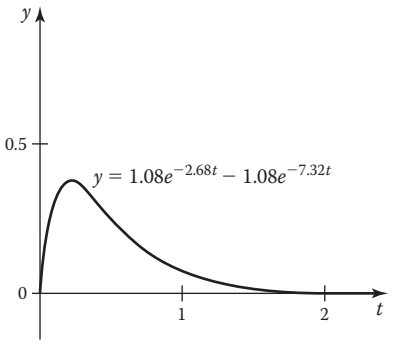
Η λύση περιγράφει (Σχήμα Δ2.24) την έννοια της κρίσιμης απόσβεσης. Αν το ελατήριο στο σύστημα είναι ένα αμορτισέρ φορτηγού, ένα ξαφνικό τράνταγμα ($y'(0) = 3$) αποσβένεται γρήγορα και το φορτηγό επανέρχεται ομαλά στην θέση ισορροπίας του. Ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες, το αντικείμενο μπορεί να υπερβεί μια φορά την θέση ισορροπίας, αλλά το σύστημα δεν υφίσταται ταλαντώσεις.

γ. Αν η σταθερά απόσβεσης αυξηθεί σε $c = 5$, παρατηρούμε ένα διαφορετικό είδος συμπεριφοράς. Με $m = 0.5$ και $\omega_0 = 4.43$, έχουμε $b = 2c = 10$, που συνεπάγεται ότι $b^2 - 4\omega_0^2 = 21.5 > 0$. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\omega_0^2}}{2} \approx -2.68 \text{ και } -7.32,$$

Ενώ η γενική λύση είναι

$$y = c_1e^{-2.68t} + c_2e^{-7.32t}.$$



Σχήμα Δ2.25

Οι αρχικές συνθήκες οδηγούν στις εξισώσεις

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -2.68c_1 - 7.32c_2 &= 5, \end{aligned}$$

που έχουν λύσεις $c_1 = 1.08$ και $c_2 = -1.08$. Συνεπώς η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y = 1.08e^{-2.68t} - 1.08e^{-7.32t}$. Η λύση (Σχήμα Δ2.25) φθίνει γρήγορα, με ρυθμό που καθορίζεται από την τελευταία αρνητική ρίζα. Σε αυτή την περίπτωση υπερκρίσιμης απόσβεσης, η αντίσταση υπερισχύει της δύναμης επαναφοράς και δεν υπάρχουν ταλαντώσεις.

Σχετικές ασκήσεις 17–20 ◄

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση

Η τελευταία περίπτωση περιλαμβάνει όλα τα φαινόμενα που συζητήθηκαν μέχρι τώρα: μια δύναμη επαναφοράς, απόσβεση και μια εξωτερική δύναμη. Ορισμένα από τα πολλά χαρακτηριστικά που παρατέθηκαν με αυτά τα μοντέλα εξετάζονται στις ασκήσεις. Σε αυτή την ενότητα εστιάζουμε στην συμπεριφορά που είναι κοινή στα περισσότερα προβλήματα αυτής της κατηγορίας.

Θεωρούμε τώρα εξισώσεις της μορφής

$$y'' + by' + \omega_0^2 y = F_0 \cos \omega t.$$

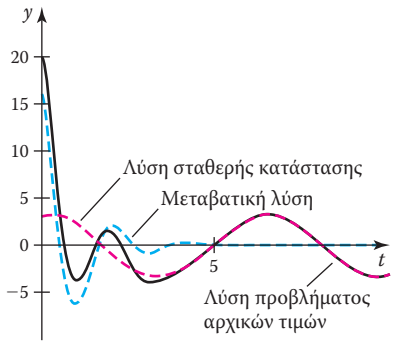
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι όσο το $b > 0$ (ταλαντώσεις που αποσβένονται), το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει πάντοτε είτε αρνητικές πραγματικές ρίζες ή μιγαδικές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος. Σε άλλη περίπτωση, η λύση της ομογενούς εξίσωσης αποτελείται από όρους που μειώνονται σε μέγεθος όσο το t αυξάνει. Ακόμη, όσο είναι $\omega \neq \omega_0$, η μερική λύση έχει την μορφή $A \sin \omega t + B \sin \omega t$. Συνεπώς η γενική λύση είναι κάπως έτσι

$$y = \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{\text{μειώνεται όσο } t \to \infty} + \underbrace{A \sin \omega t + B \sin \omega t}_{\text{μερική λύση}}.$$

Επειδή η λύση της ομογενούς εξίσωσης φθίνει όσο το t αυξάνει, ονομάζεται **μεταβατική λύση**. Περιέχει τα αποτελέσματα των αρχικών συνθηκών (που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των c_1 και c_2), αλλά τελικά σβήνει. Αυτό που απομένει όσο το t αυξάνει είναι η μερική λύση **σταθερής κατάστασης** που προσδιορίζεται από την εξωτερική δύναμη. Γενικά, βλέπουμε ότι αν as $t \to \infty$, $y(t) \to y_p(t)$.

Το Σχήμα Δ2.26 εμφανίζει την λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y'' + 2y' + 10y = 30 \cos t,\ y(0) = 20,\ y'(0) = -10.$$



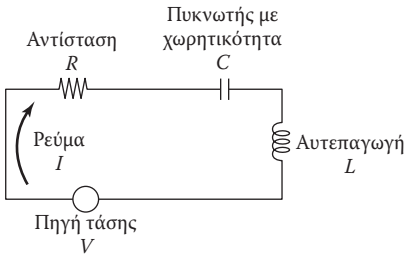
Σχήμα Δ2.26

Η μεταβατική λύση (διακεκομμένη μπλε καμπύλη) υφίσταται μέχρι $t = 5$, περίπου, στο οποίο σημείο υπερισχύει η λύση σταθερής κατάστασης (διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη) με συχνότητα ίδια με αυτή της εξωτερικής δύναμης. Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (πλήρης καμπύλη) είναι το άθροισμα της μεταβατικής λύσης και της λύσης σταθερής κατάστασης.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις που αποσβένονται συμβαίνουν συχνά στα ηλεκτρικά κυκλώματα, είναι το θέμα που θα εξετάσουμε τώρα.

Σχετικές ασκήσεις 21–24 ◄

Ηλεκτρικά κυκλώματα



Σχήμα Δ2.27

Η έρευνά μας στα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι σύντομη εν μέρει διότι όλο το μαθηματικό μέρος έχει διεκπεραιωθεί. Όπως θα διαπιστώσετε, οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν κυκλώματα είναι ταυτόσημες με τις εξισώσεις μηχανικών ταλαντωτών. Για να συμπληρωθεί αυτή η όμορφη αναλογία, απαιτείται μόνο μια αλλαγή στην ορολογία.

Ένα βασικό ηλεκτρικό κύκλωμα που παρουσιάζει μια μεγάλη ποικιλία συμπεριφοράς είναι το κύκλωμα LCR. Όπως φαίνεται στο Σχήμα Δ2.27, το κύκλωμα έχει τέσσερα στοιχεία συνδεδεμένα εν σειρά:

- μια πηγή τάσης όπως μια μπαταρία με έξοδο που μετριέται σε *volts (βολτς)*,
- ένα επαγωγικό πηνίο με μια αυτεπαγωγή *L henries (ανρί)*,
- έναν αντιστάτη με αντίσταση *R ohms (Ω)* και
- έναν πυκνωτή με χωρητικότητα *C farads (φαράντ)*.

Υποθέτουμε ότι αρχικά δεν υπάρχει ροή ρεύματος στο κύκλωμα και κανένα φορτίο στον πυκνωτή. Όταν κλείνει ο διακόπτης σε $t = 0$, ένα ρεύμα $I(t)$, μετρημένο σε *amperes*, διαρρέει το κύκλωμα και δημιουργείται στον πυκνωτή μια φόρτιση $Q(t)$, μετρημένη σε *coulomb*. Το ρεύμα είναι ο ρυθμός μεταβολής του ηλεκτρικού φορτίου, που είναι,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το ρεύμα στο κύκλωμα προκύπτει απευθείας από τον νόμο τάσης του Kirchhoff: *Σε ένα κλειστό κύκλωμα, το άθροισμα της τάσης που εισρέει στο πηνίο, στην αντίσταση και στον πυκνωτή ισούται με το ρεύμα που εισέρχεται.* Στοιχειώδης θεωρία κυκλωμάτων δίνει επίσης την πτώση τάσης στα στοιχεία.

- Ένα πηνίο αποθηκεύει ενέργεια σε ένα μαγνητικό πεδίο και δημιουργεί πτώση τάσης $L\dfrac{dI}{dt}$.
- Μια αντίσταση αναλώνει ενέργεια και δημιουργεί μια πτώση τάσης RI.
- Ένας πυκνωτής αποθηκεύει ενέργεια σε ένα ηλεκτρικό πεδίο και δημιουργεί μια πτώση τάσης Q/C.

Αν με $E(t)$ συμβολίσουμε την εφαρμοζόμενη τάση, η εξίσωση για το κύκλωμα είναι

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{1}$$

Όπως έχουν τα πράγματα, η εξίσωση περιλαμβάνει το ρεύμα I και το φορτίο Q. Μπορούμε να προχωρήσουμε με δύο τρόπους. Αρχικά μπορούμε να αξιοποιήσουμε το γεγονός ότι $Q'(t) = I(t)$ και $Q''(t) = I'(t)$, να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (1) και να γράψουμε την εξίσωση για το φορτίο:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{2}$$

Συνήθως το ρεύμα παρουσιάζει περισσότερο ενδιαφέρον, οπότε μπορούμε να παραγωγίσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης (1) και να χρησιμοποιήσουμε την $Q'(t) = I(t)$ για να δώσουμε μια εξίσωση για το ρεύμα:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t). \tag{3}$$

Θεωρούμε και τις δύο αυτές εξισώσεις.

Η προϋπόθεση ότι αρχικά δεν διέρχεται ρεύμα στο κύκλωμα και κανένα φορτίο στον πυκνωτή, σημαίνει ότι οι αρχικές συνθήκες για την εξίσωση (2) είναι $Q(0) = 0$ και $I(0) = Q'(0) = 0$. Οι αρχικές συνθήκες για την εξίσωση (3) πρέπει να δίνουν τις τιμές των $I(0)$ και $I'(0)$. Έχουμε ήδη ότι $I(0) = 0$. Για να βρούμε την αρχική τιμή $I'(0)$, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (1) για $t = 0$ και βρίσκουμε ότι

$$LI'(0) + \underbrace{RI(0)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{C}Q(0)}_{0} = E(0),$$

που συνεπάγεται ότι $I'(0) = \dfrac{E(0)}{L}$.

Εργαζόμενοι αρχικά με την εξίσωση ρεύματος (3), διαιρούμε την εξίσωση με L για να προκύψει το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}E'(t), I(0) = 0, \quad I'(0) = \frac{E(0)}{L}.$$

Παρατηρήστε ότι αυτή η διαφορική εξίσωση είναι δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές —όπως η εξίσωση του μηχανικού ταλαντωτή. Η αξιοσημείωτη αυτή αναλογία μεταξύ των δύο εξισώσεων εμφανίζεται στον Πίνακας Δ2.3.

Πίνακας Δ2.3

Μηχανικός ταλαντωτής	**Ηλεκτρικό κύκλωμα**
$my'' + cy' + ky = f$	$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'$
Ανάλογοι όροι	
Θέση y	Ρεύμα I
Μάζα m	Αυτεπαγωγή L
Απόσβεση c	Αντίσταση R
Σταθερά ελατηρίου k	Αντίστροφη χωρητικότητα $1/C$
Εξωτερική δύναμη f	Παράγωγος της πηγής τάσης E'

Πριν λύσουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών, μπορούμε να διατυπώσουμε μερικές παρατηρήσεις για τη γενική λύση. Αν θέσουμε

$$p = \frac{R}{L}, q = \frac{1}{LC}, \quad \text{και} \quad f(t) = \frac{1}{L}E'(t),$$

Η εξίσωση εμφανίζεται ως

$$I'' + pI' + qI = f(t).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2 + pr + q$, και επειδή $p = \frac{R}{L} > 0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει πάντοτε είτε αρνητικές ρίζες ή μιγαδικές ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη (όπως στην περίπτωση των εξαναγκασμένων ταλαντωτών με απόσβεση). Συνεπώς, η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι μια μεταβατική λύση που φθίνει με τον χρόνο. Η λύση σταθερής κατάστασης είναι η μερική λύση, που εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης f του δευτέρου μέλους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 **Κύκλωμα LCR με σταθερή τάση** Ένα κύκλωμα αποτελείται από ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής 1 henry, μια αντίσταση 50 ohm και έναν πυκνωτή χωρητικότητας 1/7025 farad, συνδεδεμένα εν σειρά από τα οποία διέρχεται ρεύμα σταθερής τάσης 800 volt. Όταν κλείσει ο διακόπτης βρείτε το ρεύμα στο κύκλωμα σε κάθε χρονική στιγμή.

ΛΥΣΗ Έστω $L = 1$, $R = 50$, $1/C = 7025$, και $E(t) = 800$. Παρατηρούμε ότι $E'(t) = 0$, και η εξίσωση γίνεται

$$I'' + 50I' + 7025I = 0,$$

που είναι μια ομογενής εξίσωση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^2 + 50r + 7025$ έχει ρίζες

$$r = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 - 4 \cdot 7025}}{2} = -25 \pm 80i.$$

Άρα, η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$I = e^{-25t}(c_1 \sin 80t + c_2 \cos 80t).$$

Παρατηρήστε ότι το κύκλωμα είναι ανάλογο με έναν ταλαντωτή με υποκρίσιμη απόσβεση. Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$I(0) = 0 \quad \text{και} \quad I'(0) = \frac{E(0)}{L} = 800.$$

Βρίσκουμε αρχικά ότι

$$I'(t) = -25e^{-25t}(c_1 \sin 80t + c_2 \cos 80t) + e^{-25t}(80c_1 \cos 80t - 80c_2 \sin 80t),$$

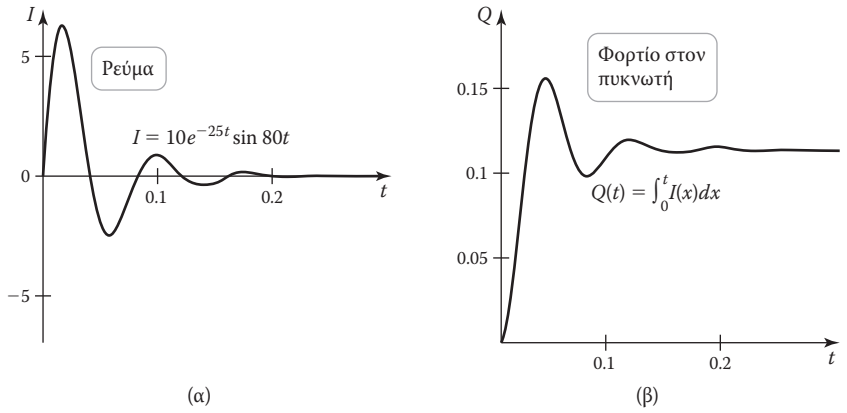
που συνεπάγεται ότι $I'(0) = -25c_2 + 80c_1$. Οι αρχικές συνθήκες δίνουν τις τιμές των c_1 και c_2:

$$I(0) = c_2 = 0 \quad \text{και} \quad I'(0) = \underbrace{-25c_2}_{0} + 80c_1 = 800, \quad \text{ή} \quad c_1 = 10.$$

Συμπεραίνουμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$I = 10\,e^{-25t} \sin 80t.$$

Το γράφημα του ρεύματος δείχνει ένα κύμα υψηλής συχνότητας που αποσβένεται γρήγορα (Σχήμα Δ2.28α). Το φορτίο στον πυκνωτή (προκύπτει από την ολοκλήρωση του ρεύματος) δείχνει λίγες ταλαντώσεις μεταβατικής απόκρισης πριν φτάσει στο επίπεδο της σταθερής κατάστασης περίπου 0.11 C, μέσα σε 0.2 seconds (Σχήμα Δ2.28β).



Σχήμα Δ2.28

Σχετικές ασκήσεις 25–32 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 **Κύκλωμα LCR με ταλαντευόμενη τάση** Θεωρήστε ένα κύκλωμα LCR με ένα πηνίο 1 henry, μια αντίσταση 50 ohm και έναν πυκνωτή χωρητικότητας 1/2500 farad, από τα οποία διέρχεται τάση $E(t) = 1021 \cos 60t$. Βρείτε τη φόρτιση του πυκνωτή σε κάθε χρονική στιγμή όταν κλείσει ο διακόπτης.

ΛΥΣΗ Εργαζόμαστε τώρα στην εξίσωση φόρτισης (2). Με $L = 1$, $R = 50$, και $1/C = 2500$, το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών είναι

$$Q'' + 50Q' + 2500Q = 1021 \cos 60t, \quad Q(0) = Q'(0) = 0.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $r^2 + 50r + 2500$, και έχει ρίζες

$$r = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 - 4 \cdot 2500}}{2} = -25 \pm 25\sqrt{3}\,i.$$

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης αποτελείται από ταλαντευόμενες συναρτήσεις με πλάτη που μειώνονται:

$$Q_h = e^{-25t}(c_1 \sin 25\sqrt{3}t + c_2 \cos 25\sqrt{3}t).$$

Για να βρούμε τη μερική λύση χρησιμοποιώντας απροσδιόριστους συντελεστές, η κατάλληλη δοκιμαστική λύση (που καθορίζεται από τη συνάρτηση του δεύτερου μέλους) είναι

$$Q_p = A \sin 60t + B \cos 60t.$$

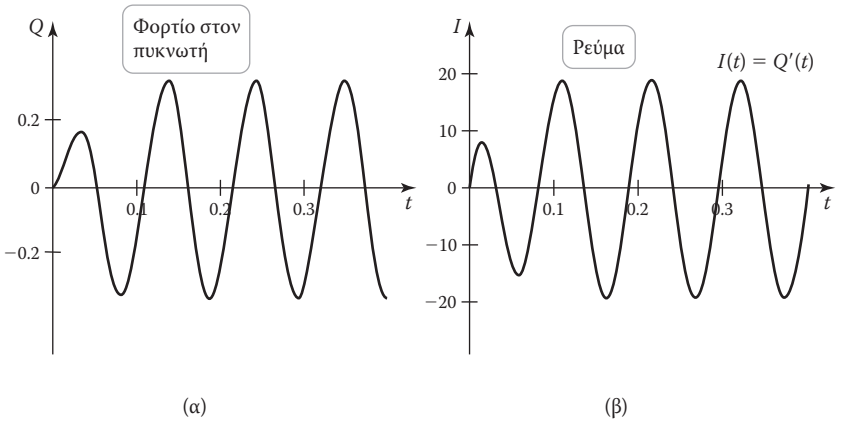
Αντικαθιστώντας τη δοκιμαστική λύση και κάνοντας τους αναγκαίους υπολογισμούς, βρίσκουμε ότι $A = \dfrac{3}{10}$ και $B = -\dfrac{11}{100}$. Άρα η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$Q = e^{-25t}(c_1 \sin 25\sqrt{3}t + c_2 \cos 25\sqrt{3}t) + \frac{3}{10} \sin 60t - \frac{11}{100} \cos 60t.$$

Τελικώς, θέτουμε τις αρχικές συνθήκες $Q(0) = Q'(0) = 0$. Μετά και από άλλους υπολογισμούς (σε μεγάλο βαθμό μέσω ενός υπολογιστή), εμφανίζεται η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$Q = e^{-25t}\left(-\frac{61}{100\sqrt{3}}\sin 25\sqrt{3}t + \frac{11}{100}\cos 25\sqrt{3}t\right) + \frac{3}{10}\sin 60t - \frac{11}{100}\cos 60t.$$

Πολύ επεξηγηματικό είναι το γράφημα του φορτίου που φαίνεται στο Σχήμα Δ2.29α. Το μεταβατικό μέρος της λύσης έχει μια γωνιακή συχνότητα $\omega = 25\sqrt{3}$, αλλά αποσβένεται γρήγορα. Η λύση σταθερής κατάστασης με σταθερό πλάτος και μια γωνιακή συχνότητα $\omega = 60$ (περίοδος $2\pi/60 \approx 0.1$) είναι ό,τι απομένει για $t > 0.1$. Παρομοίως, το ρεύμα $I(t) = Q'(t)$ δείχνει μια σύντομη μεταβατική λύση ακολουθούμενη από μια λύση σταθερής κατάστασης με σταθερό πλάτος και συχνότητα $\omega = 60$ (Σχήμα Δ2.29β). Βλέπουμε πως η παρουσία μιας μεταβλητής τάσης διατηρεί ένα ταλαντευόμενο ρεύμα στο κύκλωμα και φορτίο στον πυκνωτή.



Σχήμα Δ2.29

Σχετικές ασκήσεις 25–32 ◄

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ2.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Εξηγήστε το νόημα των εκφράσεων με *απόσβεση, χωρίς απόσβεση, ελεύθερος*, και *εξαναγκασμένος* όπως εμφανίζονται στο σύστημα ενός ταλαντωτή.

2. Στα μοντέλα που αναφέρθηκαν σε αυτή την ενότητα, υπό ποιες συνθήκες εμφανίζονται ταλαντώσεις με απόσβεση;

3. Στα μοντέλα που αναφέρθηκαν σε αυτή την ενότητα, υπό ποιες συνθήκες εμφανίζονται διακροτήματα;

4. Στα μοντέλα που αναφέρθηκαν σε αυτή την ενότητα, υπό ποιες συνθήκες εμφανίζεται συντονισμός;

5. Δώστε τα βήματα που είναι απαραίτητα για τη λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση.

6. Περιγράψτε τις αναλογίες μεταξύ ενός μοντέλου εξαναγκασμένου ταλαντωτή με απόσβεση και του μοντέλου ενός κυκλώματος LCR.

Βασικές δεξιότητες

T **7–12. Ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση** *Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών που σχετίζονται με τα ακόλουθα πειράματα.*

7. Ένα τούβλο 1 kg κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου $k = 1.44$ N/m. Το τούβλο τραβιέται 0.75 m προς τα κάτω και ελευθερώνεται χωρίς αρχική ταχύτητα. Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει αντίσταση ή εξωτερική δύναμη, βρείτε τη θέση του τούβλου σε κάθε χρονική στιγμή μετά την ελευθέρωσή του. Να κάνετε το γράφημα, να περιγράψετε την κίνηση του τούβλου και να δώσετε την περίοδο της ταλάντωσής του.

8. Ένα τούβλο 1.5 kg κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου $k = 3.375$ N/m. Το τούβλο τραβιέται 0.25 m προς τα κάτω και ελευθερώνεται προς τα επάνω με ταχύτητα 0.2 m/s. Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει αντίσταση ή εξωτερική δύναμη, βρείτε την θέση του τούβλου σε κάθε χρονική στιγμή μετά την ελευθέρωσή του. Να κάνετε το γράφημα, να περιγράψετε την κίνηση του τούβλου και να δώσετε την περίοδο της ταλάντωσής του.

9. Όταν ένα τούβλο 2 kg συνδεθεί σε ένα ελατήριο, επιμηκύνει το ελατήριο 2.45 m. Το τούβλο υψώνεται 0.3 m πάνω από την θέση ισορροπίας και αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα. Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει αντίσταση ή εξωτερική δύναμη, βρείτε την θέση του τούβλου σε κάθε χρονική στιγμή μετά την άφεσή του. Να κάνετε το γράφημα, να περιγράψετε την κίνηση του τούβλου και να δώσετε την περίοδο της ταλάντωσής του.

10. Ένα τούβλο 0.5 kg συνδέεται σε ένα ελατήριο και το επιμηκύνει 0.49 m. Το τούβλο τραβιέται 0.6 m προς τα κάτω και ελευθερώνεται με ταχύτητα 0.25 m/s προς τα κάτω. Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει αντίσταση ή εξωτερική δύναμη, βρείτε τη θέση του τούβλου σε κάθε χρονική στιγμή μετά την άφεσή του. Να κάνετε το γράφημα, να περιγράψετε την κίνηση του τούβλου και να δώσετε την περίοδο της ταλάντωσής του.

11. Θεωρήστε ένα εκκρεμές που αποτελείται από ένα βαρίδι στερεωμένο με μια αβαρή στερεά ράβδο σε έναν άξονα χωρίς τριβές που αιωρείται σε ένα επίπεδο. Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει αντίσταση ή εξωτερική δύναμη, η γωνιακή μετατόπιση του εκκρεμούς μπορεί να προσεγγιστεί από την εξίσωση $\theta'' + \omega_0^2\theta = 0$, όπου $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, ℓ είναι το μήκος της ράβδου και $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας (βλ. Άσκηση 47). Υποθέτουμε ότι ένα εκκρεμές μήκους $\ell = 0.98$ m υψώνεται 0.2 radian (ακτίνια) από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του και αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα. Βρείτε τη γωνιακή μετατόπιση του εκκρεμούς σε κάθε χρονική στιγμή μετά την άφεσή του. Να κάνετε το γράφημα, να περιγράψετε την κίνηση του βαριδίου και να δώσετε την περίοδο της ταλάντωσής του.

12. Αναφερόμενοι στις Ασκήσεις 11 και 47, θεωρήστε ότι ένα εκκρεμές μήκους $\ell = 0.49$ m υψώνεται 0.25 radian (ακτίνια) από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του και αφήνεται με αρχική ταχύτητα $\theta'(0) = 0.1$ rad/s. Βρείτε τη γωνιακή μετατόπιση του εκκρεμούς σε κάθε χρονική στιγμή μετά την άφεσή του. Να κάνετε το γράφημα, να περιγράψετε την κίνηση του βαριδίου και να δώσετε την περίοδο της ταλάντωσής του.

T **13–16. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση** *Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών που σχετίζονται με τα ακόλουθα πειράματα.*

13. Ένα τούβλο 2 kg κρέμεται από ένα ελατήριο σταθεράς $k = 5.12$ N/m. Η ανάρτηση του ελατηρίου δονείται και παράγει μια εξωτερική δύναμη $F_{\text{ext}} = 4\cos\omega t$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αρχική μετατόπιση και ταχύτητα στο τούβλο και καμία απόσβεση. Να κάνετε το γράφημα της λύσης σε δύο περιπτώσεις: $\omega = 1.5$ και $\omega = 4$. Σε ποια περίπτωση η λύση έχει διακροτήματα;

14. Ένα τούβλο 0.5 kg κρέμεται από ένα ελατήριο σταθεράς $k = 4.5$ N/m. Η ανάρτηση του ελατηρίου δονείται και παράγει μια εξωτερική δύναμη $F_{\text{ext}} = 2\cos\omega t$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αρχική μετατόπιση και ταχύτητα στο τούβλο και καμία απόσβεση. Να κάνετε το γράφημα της λύσης σε δύο περιπτώσεις: $\omega = 3.1$ και $\omega = 0.5$. Σε ποια περίπτωση η λύση έχει διακροτήματα;

15. Ένα τούβλο 0.25 kg κρέμεται από ένα ελατήριο σταθεράς $k = 4.0$ N/m. Η ανάρτηση του ελατηρίου δονείται και παράγει μια εξωτερική δύναμη $F_{\text{ext}} = \sin\omega t$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αρχική μετατόπιση και ταχύτητα στο τούβλο και καμία απόσβεση. Να κάνετε το γράφημα της λύσης σε δύο περιπτώσεις: $\omega = 4$ και $\omega = 1$. Σε ποια περίπτωση η λύση έχει συντονισμό;

16. Ένα τούβλο 4/3 kg κρέμεται από ένα ελατήριο σταθεράς $k = 12.0$ N/m. Η ανάρτηση του ελατηρίου δονείται και παράγει μια εξωτερική δύναμη $F_{\text{ext}} = 9\cos\omega t$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αρχική μετατόπιση και ταχύτητα στο τούβλο και καμία απόσβεση. Να κάνετε το γράφημα της λύσης σε δύο περιπτώσεις: $\omega = 3$ και $\omega = 0.5$. Σε ποια περίπτωση η λύση έχει συντονισμό;

T **17–18. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση** *Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών που σχετίζονται με τα ακόλουθα πειράματα.*

17. Ένα τούβλο 0.3 kg κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου $k = 30$ N/m. Η αντίσταση του αέρα επιβραδύνει την κίνηση του τούβλου με συντελεστή απόσβεσης C kg/s. Λύστε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με τις ακόλουθες τιμές του C και αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Να κάνετε το γράφημα κάθε λύσης και να απαντήσετε αν το πρόβλημα δηλώνει υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή κρίσιμη απόσβεση.

α. $c = 4.8$ kg/s **β.** $c = 6$ kg/s **γ.** $c = 7.5$ kg/s

18. Τρία τούβλα 10 kg κρέμονται από ελατήρια σταθεράς k. Η τριβή σε κάθε σύστημα εκφράζεται με έναν συντελεστή απόσβεσης $c = 40$ kg/s. Λύστε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με τις ακόλουθες τιμές του k και αρχικές συνθήκες $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. Να κάνετε το γράφημα κάθε λύσης και να απαντήσετε αν το πρόβλημα δηλώνει υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή κρίσιμη απόσβεση.

α. $k = 30$ N/m **β.** $k = 40$ N/m **γ.** $k = 62.5$ N/m

T **19. Σχεδιασμός αμορτισέρ** Ένα αμορτισέρ πρέπει να αντέξει ένα φορτίο 250 kg (ένα τέταρτο του βάρους ενός αυτοκινήτου). Εκτιμάται ότι η τριβή του συστήματος μπορεί να εκφραστεί με μια σταθερά απόσβεσης $c = 500$ kg/s.

α. Βρείτε την τιμή της σταθεράς του ελατηρίου που προσδίδει κρίσιμη απόσβεση στο σύστημα.
β. Λύστε την διαφορική εξίσωση που προκύπτει σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.1$ που μοντελοποιούν ένα αιφνίδιο τράνταγμα.
γ. Να κάνετε το γράφημα της λύσης του μέρους (β). Ποια είναι η μέγιστη μετατόπιση του αυτοκινήτου σύμφωνα με αυτό το μοντέλο;
δ. Ερευνήστε το αποτέλεσμα της αύξησης της τιμής του k του μέρους (α) κατά 50% και κατά 100%.
ε. Ποιο είναι το αποτέλεσμα της μείωσης της τιμής του k του μέρους (α) κατά 50%;

T **20. Σχεδιασμός συστήματος ανάρτησης** Ένα ελατήριο σε ένα σύστημα ανάρτησης συγκρατεί ένα βάρος 400 kg και έχει σταθερά ελατηρίου $k = 324$ N/m. Η σταθερά απόσβεσης c του συστήματος μπορεί να μεταβάλλεται καθώς το ελατήριο εισέρχεται σε ένα έμβολο γεμάτο με υγρό.

α. Βρείτε την τιμή του συντελεστή απόσβεσης του ελατηρίου c που δίνει κρίσιμη απόσβεση στο σύστημα.
β. Λύστε τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.1$.
γ. Να κάνετε το γράφημα της λύσης του μέρους (β). Ποια είναι η μέγιστη μετατόπιση του φορτίου σύμφωνα με αυτό το μοντέλο;
δ. Ερευνήστε το αποτέλεσμα της αύξησης της τιμής του συντελεστή απόσβεσης σε $c = 720\sqrt{2}$ και μείωσης του συντελεστή απόσβεσης σε $c = 360\sqrt{3}$ σε αυτό το μοντέλο.

T **21–24. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση**

21. Ένα τούβλο 1 kg κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου $k = 5$ N/m. Ένας αποσβεστήρας συνδεδεμένος με το τούβλο δημιουργεί τριβή με συντελεστή απόσβεσης $c = 2$ kg/s. Η ανάρτηση του ελατηρίου δονείται και παράγει εξωτερική δύναμη $F_{\text{ext}} = 4\cos 2t$. Υποθέτουμε ότι το τούβλο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία στην θέση ισορροπίας και αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα.

α. Να βρείτε και να κάνετε το γράφημα της θέσης του τούβλου αφού αφεθεί.
β. Βρείτε τις μεταβατικές και τις λύσεις σταθερής κατάστασης και να κάνετε το γράφημά τους με τη λύση του μέρους (α).
γ. Μετά από πόσα δευτερόλεπτα κατά προσέγγιση η μεταβατική λύση γίνεται αμελητέα;

22. Ένα τούβλο 20 kg κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου $k = 180$ N/m. τούβλο ταλαντώνεται σε ένα υγρό δημιουργεί αντίσταση με συντελεστή απόσβεσης $c = 80$ kg/s. Η ανάρτηση του ελατηρίου δονείται και παράγει εξωτερική δύναμη $F_{\text{ext}} = 3\sin t$. Υποθέτουμε ότι η αρχική θέση του τούβλου είναι ένα μέτρο πάνω από την θέση ισορροπίας και αφήνεται με αρχική ταχύτητα μηδέν.

α. Να βρείτε και να κάνετε το γράφημα της θέσης του τούβλου αφού αφεθεί.
β. Βρείτε τις μεταβατικές και τις λύσεις σταθερής κατάστασης και να κάνετε τα γραφήματά τους ξεχωριστά.
γ. Μετά από πόσα δευτερόλεπτα κατά προσέγγιση η μεταβατική λύση γίνεται αμελητέα;

23. Θεωρήστε τον ταλαντωτή που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = 2\cos \omega t.$$

α. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης.
β. Βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών με $y(0) = y'(0) = 0$.
γ. Βρείτε τις συνιστώσες μεταβατικής και σταθερής κατάστασης της λύσης.
δ. Να σχεδιάσετε την λύση του προβλήματος αρχικών τιμών με $\omega = \frac{1}{2}$, 1 και $\frac{3}{2}$. Ποια συχνότητα εξαναγκασμού παράγει την ταλάντωση σταθερής κατάστασης με το μέγιστο πλάτος;

24. Θεωρήστε τον ταλαντωτή που περιγράφεται από την εξίσωση $y'' + 2y' + (\omega_0^2 + 1)y = 2\cos t$.

α. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης.
β. Βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών με $y(0) = y'(0) = 0$.
γ. Βρείτε τις συνιστώσες μεταβατικής και σταθερής κατάστασης της λύσης.
δ. Να σχεδιάσετε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών με $\omega_0 = 1$, 2 και 3. Ποια φυσική συχνότητα παράγει την ταλάντωση σταθερής κατάστασης με το μέγιστο πλάτος;

25. **Ένα κύκλωμα RC** Δείξτε ότι το φορτίο του πυκνωτή ενός κυκλώματος χωρίς πηνίο ικανοποιεί την εξίσωση $RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$ (με $L = 0$, πρόκειται για ένα κύκλωμα RC). Βρείτε το φορτίο του πυκνωτή σε ένα κύκλωμα με αντίσταση 50 ohms (Ω) και χωρητικότητα 0.001 farad (F), όταν συνδέεται με σταθερή πηγή 50 volts (V). Η φόρτιση φτάνει μια τιμή σταθερής κατάστασης; Αν ναι, ποια είναι αυτή;

26. **Ένα κύκλωμα RL** Δείξτε ότι το ρεύμα σε ένα κύκλωμα χωρίς πυκνωτή ικανοποιεί την εξίσωση $LI' + RI = E(t)$. Βρείτε το ρεύμα στο κύκλωμα με αντίσταση 200 Ω και πηνίο 2 henries (H), όταν συνδέεται με σταθερή πηγή 100 V. Το ρεύμα φτάνει μια τιμή σταθερής κατάστασης; Αν ναι, ποια είναι αυτή;

T **27–32. Κυκλώματα LCR**

27. Ένα κύκλωμα LCR που αποτελείται από μια αντίσταση 10 Ω, ένα πηνίο 0.1 H και έναν πυκνωτή 1/240 F, είναι συνδεδεμένα εν σειρά με μια μπαταρία σταθερής τάσης 100 V.

α. Βρείτε το ρεύμα στο κύκλωμα υποθέτοντας ότι $I(0) = Q(0) = 0$.
β. Βρείτε τα ρεύματα μεταβατικής και τα σταθερής κατάστασης.

28. Το κύκλωμα της Άσκησης 27 (αντίσταση 10 Ω, ένα πηνίο 0.1 H και ένας πυκνωτής 1/240 F), είναι συνδεδεμένο εν σειρά με μια πηγή τάσης, εξόδου $E(t) = 100 \sin 150t$.

α. Βρείτε το ρεύμα στο κύκλωμα υποθέτοντας ότι $I(0) = Q(0) = 0$.
β. Βρείτε τα ρεύματα μεταβατικής και σταθερής κατάστασης.
γ. Σχεδιάστε τα γραφήματα για το ρεύμα σταθερής κατάστασης, το μεταβατικό ρεύμα και το ολικό ρεύμα, για $t \geq 0$.

29. Ένα κύκλωμα LCR που αποτελείται από μια αντίσταση 80 Ω, ένα πηνίο 0.5 H και έναν πυκνωτή 1/3230 F, είναι συνδεδεμένα εν σειρά με μια μπαταρία σταθερής τάσης.

α. Βρείτε το ρεύμα στο κύκλωμα υποθέτοντας ότι $I(0) = Q(0) = 0$.
β. Βρείτε τα ρεύματα μεταβατικής και σταθερής κατάστασης.

30. Ένα κύκλωμα LCR που αποτελείται από μια αντίσταση 80 Ω, ένα πηνίο 0.5 H και έναν πυκνωτή 1/3232 F, είναι συνδεδεμένα εν σειρά με μια πηγή εξόδου $E(t) = 90.5 \sin 64t$.

α. Βρείτε το ρεύμα στο κύκλωμα υποθέτοντας ότι $I(0) = Q(0) = 0$.
β. Βρείτε τα ρεύματα μεταβατικής και σταθερής κατάστασης.
γ. Σχεδιάστε τα γραφήματα για το ρεύμα σταθερής κατάστασης, το μεταβατικό ρεύμα και το ολικό ρεύμα, για $t \geq 0$.

31. Βρείτε το φορτίο ενός πυκνωτή και το ρεύμα σε ένα κύκλωμα LCR στο οποίο μια αντίσταση 16 Ω, ένα πηνίο 2 H και ένας πυκνωτής 1/50 F είναι συνδεδεμένα εν σειρά με μια πηγή σταθερής τάσης 120 V. Υποθέστε ότι $Q(0) = Q'(0) = 0$.

32. Βρείτε το φορτίο ενός πυκνωτή και το ρεύμα σε ένα κύκλωμα LCR στο οποίο μια αντίσταση 4 Ω, ένα πηνίο 0.5 H και ένας πυκνωτής 2/25 F είναι συνδεδεμένα εν σειρά με μια πηγή τάσης εξόδου $E(t) = 30 \sin t$. 32. Υποθέστε ότι $Q(0) = Q'(0) = 0$.

Περαιτέρω διερευνήσεις

33. **Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι** Εξετάστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια ερμηνεία ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Ένας ταλαντωτής με απόσβεση δεν μπορεί να έχει μια συνάρτηση θέσης με σταθερό πλάτος.
β. Ο συντονισμός εμφανίζεται μόνο σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.
γ. Ο συντονισμός όπως ορίζεται στο κείμενο (λύσεις της μορφής $y = At \sin \omega t$ ή $y = At \cos \omega t$) δεν μπορεί να συμβεί αν υπάρχει απόσβεση στο σύστημα.
δ. Ένα κύκλωμα ($R = 0$) έχει ταλαντώσεις με απόσβεση.
ε. Τα διακροτήματα μπορούν να εμφανιστούν σε ένα σύστημα με απόσβεση.
στ. Το μοντέλο που αναφέρθηκε στο κείμενο για ταλαντωτές με απόσβεση με περιοδική διέγερση έχει πάντοτε μια λύση που αποτελείται από μια φθίνουσα μεταβατική συνιστώσα και μια μη φθίνουσα συνιστώσα σταθερής κατάστασης.

T **34–35. Μεταβατική εναντίον σταθερής κατάστασης** *Θεωρήστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών.*

α. *Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών και βρείτε τις μεταβατικές λύσεις και τις λύσεις σταθερής κατάστασης.*
β. *Να κάνετε το γράφημα του προβλήματος αρχικών τιμών, της μεταβατικής λύσης και της λύσης σταθερής κατάστασης.*
γ. *Πόσος χρόνος απαιτείται προσεγγιστικά για να εξαφανιστεί η μεταβατική λύση; Επαληθεύστε ότι όσο το t αυξάνει, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών προσεγγίζει την λύση σταθερής κατάστασης.*

34. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

35. $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{17}{16}y = 65 \sin t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

T **36–37. Όλες οι μεταβατικές λύσεις πεθαίνουν** *Θεωρήστε τις επόμενες εξισώσεις ταλαντωτών.*

α. *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης, τις μεταβατικές λύσεις και τις λύσεις σταθερής κατάστασης.*
β. *Θέστε $c_2 = 0$ και $c_1 = -2, -1, 0, 1$ και 2 στην γενική λύση. Για κάθε τιμή του c_1, να κάνετε το γράφημα της λύσης και της συνάρτησης εξωτερικής δύναμης στο ίδιο σύστημα αξόνων.*
γ. *Περιγράψτε την σχέση μεταξύ των λύσεων (για κάθε τιμή του c_1) και της συνάρτησης εξωτερικής δύναμης.*

36. $y'' + 2y' + 2y = 130 \sin 4t$

37. $y'' + 3y' + 2y = 170 \cos 4t$

38. Εξαναγκασμένη λύση χωρίς απόσβεση Δείξτε ότι μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$ είναι $y_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos \omega t$.

T **39. Λύση με διακροτήματα** Θυμηθείτε την ταυτότητα

$$\cos A - \cos B = 2\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)\sin\left(\frac{B+A}{2}\right).$$

α. Δείξτε ότι

$$\cos \omega t - \cos \omega_0 t = 2\sin\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\sin\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}.$$

β. Να κάνετε τα γραφήματα των δύο μελών της ισότητας του μέρους (α) με (i) $\omega_0 = 10, \omega = 9$ και (ii) $\omega_0 = 10, \omega = 2$ για να επαληθεύσετε την ταυτότητα. Σε ποια περίπτωση διαπιστώνετε διακροτήματα;

40. Μελέτη της εξίσωσης εξαναγκασμένης ταλάντωσης με απόσβεση Θεωρήστε την εξίσωση $my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$, που περιγράφει την κίνηση ενός εξαναγκασμένου ταλαντωτή με απόσβεση. Υποθέτουμε θετικές όλες τις παραμέτρους της εξίσωσης.

α. Εξηγήστε γιατί οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης φθίνουν με τον χρόνο.

β. Δείξτε ότι μια μερική λύση είναι $y_p = A\sin \omega t + B\cos \omega t$, όπου

$$A = \frac{c\omega F_0}{(c\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(c\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}.$$

γ. Χρησιμοποιώντας τη μορφή πλάτους-φάσης μιας εξίσωσης, δείξτε ότι $y_p = A\sin \omega t + B\cos \omega t = C^*\sin(\omega t + \varphi)$, όπου

$$C^* = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ και } \tan \varphi = \frac{B}{A}.$$

δ. Δείξτε ότι $C^* = \frac{F_0}{\sqrt{c^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$, όπου $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

ε. Ποια είναι σχέση μεταξύ της εξαναγκασμένης συχνότητας ω και της φυσικής συχνότητας ω_0 που παράγει το μέγιστο πλάτος C^*; Εξηγήστε γιατί το αποτέλεσμα είναι ανάλογο του συντονισμού στην περίπτωση της εξαναγκασμένης κίνησης χωρίς απόσβεση.

στ. Έστω $m = c = F_0 = 1$ και $\omega_0 = 3$. Να κάνετε το γράφημα του εύρους C^* ως συνάρτησης του ω. Περιγράψτε πώς μεταβάλλεται το C^* ως προς ω.

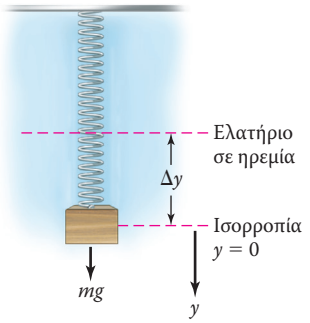
41. Εμπέδηση Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 40 δ και εκφράστε το πλάτος ως προς τις παραμέτρους του κυκλώματος, δηλαδή αντικαταστήστε το m με L, το c με R, ω_0^2 με $\frac{1}{CL}$, και το F_0 με το ωE_0. Εκφράστε το πλάτος του ρεύματος σταθερής κατάστασης ως

$$C^* = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Ο παρονομαστής αυτής της έκφρασης ονομάζεται **εμπέδηση** (μονάδες Ω). Δείξτε ότι η εμπέδηση ελαχιστοποιείται (μεγιστοποιείται το C^*) όταν $\omega^2 = \frac{1}{CL}$, που είναι ανάλογο του $\omega_0 = \omega$. Η μεγιστοποίηση του C^* (ελαχιστοποίηση της εμπέδησης) δίνει συνήθως την καλύτερη λήψη σε έναν ραδιοφωνικό δέκτη.

42. Βαρύτητα στον κατακόρυφο ταλαντωτή Δείξαμε γιατί η δύναμη της βαρύτητας δεν εμφανίζεται στην εξίσωση ενός κατακόρυφα αιωρούμενου ταλαντωτή.

α. Θεωρήστε το σχήμα όπου ένα τούβλο κρέμεται σε ηρεμία από ένα ελατήριο. Το ελατήριο επιμηκύνεται κατά Δy από το βάρος mg του τούβλου. Δηλώνουμε με $y = 0$, αυτή την θέση ισορροπίας του τούβλου. Όταν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, εξηγήστε γιατί $mg = k\Delta y$, όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου.

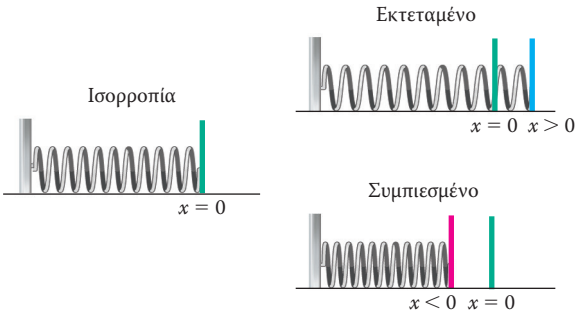


β. Υποθέτουμε ότι το τούβλο τραβιέται προς τα κάτω σε απόσταση y από την θέση ισορροπίας. Εφαρμόζουμε τώρα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχοντας ως σημείο αναφοράς το άκρο του εν ηρεμία ελατηρίου, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει απόσβεση ή εξωτερική δύναμη και ότι ο άξονας του y έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Εξηγήστε γιατί $my'' = -k(y + \Delta y) + mg$.

γ. Χρησιμοποιήστε την σχέση ισορροπίας $mg = k\Delta y$, για να εκφράσετε την εξίσωση της κίνησης ως $my'' = -ky$, που είναι η εξίσωση που προέκυψε νωρίτερα. Σημειώστε ότι η δύναμη της βαρύτητας δεν εμφανίζεται.

Εφαρμογές

43–46. Οριζόντιοι ταλαντωτές *Η εξίσωση της κίνησης ενός συστήματος ελατηρίου-τούβλου που βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια (βλ. Σχήμα) είναι ίδια με την εξίσωση της κίνησης σε ένα κατακόρυφα αιωρούμενο σύστημα. Όπως προηγουμένως, m είναι η μάζα του τούβλου, k σταθερά του ελατηρίου, C ο συντελεστής απόσβεσης (ίσως λόγω της τριβής καθώς το τούβλο γλιστράει στην επιφάνεια) και F_{ext} μια εξωτερική δύναμη. Ονομάζουμε $x(t)$ τη θέση του τούβλου σε χρόνο t, όπου το x αυξάνει προς τα δεξιά και $x = 0$ είναι η θέση του τούβλου στην οποία το ελατήριο ούτε επιμηκύνεται ούτε συμπιέζεται.*



α. *Βρείτε την θέση του τούβλου στις επόμενες περιπτώσεις.*

β. *Να κάνετε το γράφημα της συνάρτησης θέσης.*

γ. *Περιγράψτε τον τύπο της κίνησης που παρατηρείτε.*

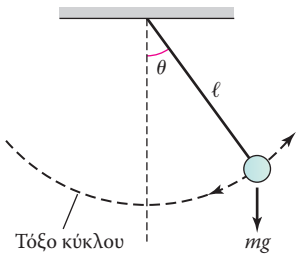
43. $m = 2\text{ kg}, c = 6\text{ kg/s}, k = 8\text{ N/m}, F_{ext} = 0, x(0) = 2, x'(0) = -1$

44. $m = 4\text{ kg}, c = 8\text{ kg/s}, k = 140\text{ N/m}, F_{ext} = 0, x(0) = -2, x'(0) = 1$

45. $m = 4\text{ kg}, c = 4\text{ kg/s}, k = 17\text{ N/m},$
$F_{\text{ext}} = 148 \sin t, x(0) = 0, x'(0) = 0$

46. $m = 8\text{ kg}, c = 16\text{ kg/s}, k = 136\text{ N/m},$
$F_{\text{ext}} = 130 \cos t, x(0) = 0, x'(0) = 0$

47. **Η εξίσωση του εκκρεμούς** Ένα εκκρεμές αποτελείται από ένα βαρίδι μάζας m στερεωμένο σε μια αβαρή στερεά ράβδο μήκους ℓ και μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας ταλαντωτής (βλ. Σχήμα). Έστω $\theta(t)$ η γωνιακή μετατόπιση του εκκρεμούς t sec μετά την ελευθέρωσή του (μετρημένη σε rad-ακτίνια). Υποθέτοντας πως η μόνη δύναμη που επενεργεί στο βαρίδι είναι η βαρύτητα, γράφουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην κατεύθυνση της κίνησης (κάθετη στην ράβδο). Παρατηρήστε ότι το μήκος του τόξου ταλάντωσης είναι $s(t) = \ell\theta(t)$, οπότε η ταχύτητα του βαριδιού είναι $s'(t) = \ell\theta'(t)$ και η επιτάχυνση $s''(t) = \ell\theta''(t)$.



α. Θεωρώντας μόνο την συνιστώσα της δύναμης στην κατεύθυνση της κίνησης, εξηγήστε γιατί ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα είναι $ml\theta''(t) = -mg \sin\theta(t)$, όπου $g = 9.8\text{ m/s}^2$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

β. Γράψτε την εξίσωση ως $\theta'' + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, όπου $\omega_0^2 = \dfrac{g}{\ell}$.

γ. Παρατηρήστε ότι αυτή η εξίσωση είναι μη γραμμική. Μπορεί να μετατραπεί σε γραμμική υποθέτοντας ότι οι γωνιακές μετατοπίσεις είναι μικρές ($|\theta| \ll 1$) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $\sin\theta \approx \theta$. Δείξτε ότι η γραμμική εξίσωση του εκκρεμούς που προκύπτει, είναι $\theta'' + \omega_0^2\theta = 0$.

δ. Βρείτε την περίοδο του εκκρεμούς συναρτήσει των g και ℓ. Αν το μήκος του εκκρεμούς αυξάνει πολλαπλασιαζόμενο με παράγοντα 2, κατά ποιον παράγοντα μεταβάλλεται η περίοδος;

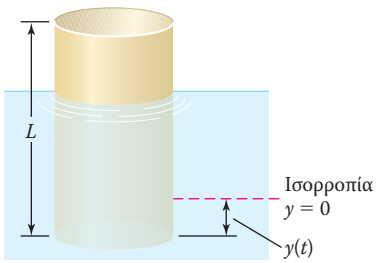
T **48–49. Λύση εξισώσεων εκκρεμούς** *Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 47 και θεωρήστε τα επόμενα προβλήματα εκκρεμούς.*

α. *Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών και σχεδιάστε τη λύση.*
β. *Εκφράστε τη λύση στην μορφή πλάτους-φάσης.*
γ. *Βρείτε την περίοδο του εκκρεμούς.*

48. $m = 1\text{ kg}, \ell = 4.9\text{ m}, \theta(0) = 0.25, \theta'(0) = 0$

49. $m = 10\text{ kg}, \ell = 3\text{ m}, \theta(0) = 0.4, \theta'(0) = -0.2$

50. **Η άνωση ως δύναμη επαναφοράς** Θεωρήστε ένα κύλινδρο ύψους L και βάσης A μερικώς βυθισμένο σε μια λίμνη (βλ. Σχήμα). Υποθέτουμε την πυκνότητα του νερού $\rho_w = 1000\text{ kg/m}^3$ και την πυκνότητα του $\rho < 1000\text{ kg/m}^3$. Η αρχή του Αρχιμήδη λέει ότι ο κύλινδρος υφίσταται δύναμη άνωσης ίση με το βάρος του νερού που εκτοπίζεται από τον κύλινδρο.



α. Όπως φαίνεται στο σχήμα, υποθέτουμε ότι όταν επιπλέει σε ηρεμία, είναι βυθισμένο ένα μέρος (κλάσμα) y^*/L του κυλίνδρου. Σημειώστε ότι το βάρος του κυλίνδρου είναι $mg = \rho ALg$ και το βάρος του εκτοπισμένου νερού είναι $y^*\rho_w Ag$. Συμπεραίνουμε ότι το κλάσμα του κυλίνδρου που είναι βυθισμένο ισούται με τον λόγο των πυκνοτήτων, δηλαδή $\dfrac{y^*}{L} = \dfrac{\rho}{\rho_w}$.

β. Έστω ότι το $y = 0$ αντιστοιχεί στο επίπεδο του πυθμένα του κυλίνδρου στη θέση ισορροπίας. Υποθέστε ότι ο κύλινδρος πιέζεται προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του και μετά αφήνεται. Έστω $y(t)$ η θέση του πυθμένα του κυλίνδρου t sec μετά την στιγμή που αφήνεται, όπου το y αυξάνεται με κατεύθυνση προς τα κάτω. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $my'' = F_{\text{ext}}$, εξηγήστε γιατί η ανοδική δύναμη είναι $F_{\text{ext}} = -\rho_w Ayg$ (επιπρόσθετα στη δύναμη άνωσης που διατηρεί την ισορροπία).

γ. Να συμπεράνετε ότι ο κύλινδρος υφίσταται ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση που εκφράζονται από την εξίσωση

$$y'' = -\omega_0^2 y, \text{ όπου } \omega_0^2 = \frac{\rho_w g}{\rho L}.$$

δ. Ποια είναι η περίοδος των ταλαντώσεων; Πώς μεταβάλλεται η περίοδος με το ύψος του κυλίνδρου; Είναι η περίοδος μεγαλύτερη όταν $\rho \approx \rho_w$ ή όταν $\rho \ll \rho_w$; Εξηγήστε την απάντησή σας.

ε. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, ποια είναι η περίοδος των ταλαντώσεων όταν $\rho = \rho_w$; Περιγράψτε την περίπτωση από φυσική άποψη.

T **51–52. Λύση προβλημάτων άνωσης** *Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 50 και θεωρήστε τα επόμενα προβλήματα άνωσης κυλίνδρων που ταλαντώνονται με δοσμένες αρχικές συνθήκες.*

α. *Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών και σχεδιάστε τη λύση.*
β. *Εκφράστε τη λύση στη μορφή πλάτους-φάσης.*
γ. *Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.*

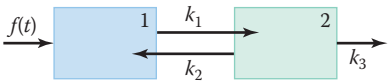
51. $L = 4.9\text{ m}, \dfrac{\rho}{\rho_w} = \dfrac{1}{2}, y(0) = 0.25, y'(0) = 0$

52. $L = 2\text{ m}, \dfrac{\rho}{\rho_w} = 0.7, y(0) = 0.5, y'(0) = 0$

53. **Διαμερισματικά μοντέλα και μεταβολισμού φαρμάκων** Τα διαμερισματικά μοντέλα χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση διαδικασιών κατασκευής, οικολογικών συστημάτων και απορρόφησης φαρμάκων από το σώμα (φαρμακοκινητική). Το σχήμα δείχνει δύο διαμερισματικά μοντέλα για προβλήματα απορρόφησης φαρμάκων. Το διαμέρισμα 1 αντιστοιχεί στον όγκο του αίματος στον οποίο εισέρχεται ένα φάρμακο με συγκεκριμένο ρυθμό f. Το διαμέρισμα 2 αντιστοιχεί στα νεφρά και περιέχει μια εκροή του φαρμάκου που καθορίζεται από τη σταθερά ρυθμού k_3. Υπάρχει επιπλέον διαρροή του φαρμάκου μεταξύ των διαμερισμάτων που καθορίζεται από τις σταθερές ρυθμού k_1 και k_2 (βλ. Σχήμα). Έστω ότι $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι η ποσότητα του φαρμάκου σε κάθε διαμέρισμα t χρονικές μονάδες από την στιγμή που αρχίζει η χορήγησή του. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την ποσότητα του φαρμάκου σε κάθε διαμέρισμα είναι

$$x_1' = \underbrace{-k_1x_1}_{\text{εκροή από 1}} + \underbrace{k_2x_2}_{\text{εισροή από 2}} + \underbrace{f(t)}_{\text{εισροή από έξω}}$$

$$x_2' = \underbrace{k_1x_1}_{\text{εισροή από 1}} - \underbrace{k_2x_2}_{\text{εκροή από 2}} - \underbrace{k_3x_2}_{\text{διαρροή προς τα έξω}}$$



α. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν προηγμένες μέθοδοι για την λύση δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Εναλλακτικά, μπορούμε να μετατρέψουμε αυτές τις εξισώσεις σε μια ισοδύναμη εξίσωση δεύτερης τάξης την οποία μπορούμε να λύσουμε. Παραγωγίστε την πρώτη εξίσωση ως προς t και χρησιμοποιήστε τη δεύτερη εξίσωση για να απαλείψετε τα x_2 και $x_2{}'$. Δείξτε ότι η εξίσωση που προκύπτει είναι

$$x'' = -(k_1 + k_2 + k_3)x' - k_1k_3x + (k_2 + k_3)f(t) + f'(t),$$

στην οποία έχουμε αντικαταστήσει το x_1 με x.

β. Δείξτε ότι οι αρχικές συνθήκες $x_1(0) = A, x_2(0) = 0$ γίνονται $x(0) = A, x'(0) = -k_1x(0) + f(0)$, στην οποία πάλι έχουμε αντικαταστήσει το x_1 με x.

T **54–55. Λύση μοντέλων διαμερισμάτων** *Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 53 και θεωρήστε τα επόμενα διαμερισματικά μοντέλα με δοσμένες αρχικές συνθήκες.*

α. *Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την ποσότητα του φαρμάκου στο διαμέρισμα 1.*

β. *Βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου στο διαμέρισμα 2.*

γ. *Να κάνετε το γράφημα της ποσότητας του φαρμάκου και στα δύο διαμερίσματα και να ερμηνεύσετε τις λύσεις.*

54. $k_1 = 0.1, k_2 = 0.02, k_3 = 0.05, f(t) = 1,$
$x_1(0) = x_2(0) = 0$
(έγχυση με καθετήρα: σταθερή εισροή)

55. $k_1 = 0.1, k_2 = 0.02, k_3 = 0.05, f(t) = 0,$
$x_1(0) = 10, x_2(0) = 0$
(ένεση σε $t = 0$)

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Με απόσβεση, ελεύθερες ταλαντώσεις, χωρίς απόσβεση, εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. **2.** Περίοδος $= 2\pi/4.5$, 4.5 ταλαντώσεις ανά 2π χρονικές μονάδες, $4.5/2\pi$ ταλαντώσεις ανά χρονική μονάδα. **3.** Ο ήχος είναι ο πιο δυνατός στις κορυφές των μακρών κυμάτων: $t = \pi/2, 3\pi/2, \ldots$. **4.** Η τιμή του ορίου είναι 0. Οι λύσεις μειώνονται σε μέγεθος για όλα τα A και a. ◄

Δ2.5 Μιγαδικές συναρτήσεις εξαναγκασμού

Η εξίσωση ταλαντωτή με απόσβεση και εξωτερική δύναμη είναι η πιο γενική εξίσωση που έχουμε συναντήσει και χρησιμοποιείται για να μοντελοποιηθούν τόσο μηχανικοί όσο και ηλεκτρικοί ταλαντωτές. Για αυτόν το λόγο θα μελετήσουμε αυτή την εξίσωση με περισσότερη λεπτομέρεια.

Η συνάρτηση μεταφοράς

Η εξίσωση ταλαντωτή

$$my'' + cy' + ky = f^*(t),$$

εκφράζει ένα *χρονικά-αναλλοίωτο* σύστημα επειδή τα χαρακτηριστικά του συστήματος, που περιγράφονται από τους συντελεστές m, c, και k, είναι σταθερά στον χρόνο. Διαιρώντας τα μέλη της εξίσωσης με το m, μπορούμε να γράψουμε

$$y'' + by' + \omega_0^2 y = F(t), \text{ όπου } b = \frac{c}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \text{ και } F(t) = \frac{f^*}{m};$$

Όλοι οι όροι στην εξίσωση είναι επιταχύνσεις. Θυμηθείτε ότι το b μετρά την απόσβεση στο σύστημα και $\omega_0 > 0$ είναι η φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) του ταλαντωτή. Θεωρούμε την περίπτωση των *παθητικών συστημάτων*, όπου $b > 0$.

Όπως έχει ήδη αποδειχθεί, η λύση αυτής της εξίσωσης έχει δύο συνιστώσες: μια μεταβατική λύση που περιλαμβάνει τις αρχικές συνθήκες και φθίνει με τον χρόνο και μια (μερική) λύση σταθερής κατάστασης που καθορίζεται από τη συνάρτηση εξαναγκασμού F. Ο σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τη λύση σταθερής κατάστασης υπό την παρουσία περιοδικών συναρτήσεων εξαναγκασμού. Έτσι τηρούμε δύο προϋποθέσεις για να εστιάσουμε στο θέμα.

➤ Η αρχική φάση α συμπεριλαμβάνεται για να ληφθούν υπόψη πιθανές χρονικές καθυστερήσεις στη συνάρτηση εξαναγκασμού.

Αρχικά υποθέτουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες $y(0) = y'(0) = 0$, που αφαιρούν την μεταβατική λύση. Δευτερευόντως, θεωρούμε συναρτήσεις εξαναγκασμού με ταλάντωση της μορφής

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

όπου το πλάτος F_0, η συχνότητα εξαναγκασμού ω, και η αρχική φάση α έχουν οριστεί.

Για τα χρονικά αναλλοίωτα γραμμικά συστήματα, είναι προτιμότερο να εργαστούμε με μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις εξαναγκασμού. Παρατηρώντας ότι $F_0 \cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\{F_0 e^{i(\omega t + \alpha)}\}$, θεωρούμε συναρτήσεις εξαναγκασμού της μορφής

$$F(t) = F_0 e^{i(\omega t + \alpha)} = \underbrace{F_0 e^{i\alpha}}_{f} e^{i\omega t} = f e^{i\omega t}.$$

Η σταθερά $f = F_0 e^{i\alpha}$ είναι το **πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού**. Το μέτρο της είναι

$$|f| = |F_0 e^{i\alpha}| = |F_0| \underbrace{|e^{i\alpha}|}_{1} = |F_0|.$$

Θα διαπιστώσετε ότι η χρήση της συνάρτησης εξαναγκασμού αυτής της μορφής απλοποιεί την εργασία εύρεσης λύσεων. Για να βρούμε μια μερική λύση της εξίσωσης

$$y'' + by' + \omega_0^2 y = f e^{i\omega t},$$

εφαρμόζουμε μια φορά ακόμη την μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών και χρησιμοποιούμε την δοκιμαστική λύση $y_p = A e^{i\omega t}$, όπου το A πρέπει να προσδιοριστεί. Αντικαθιστώντας την y_p στην εξίσωση καταλήγουμε στους επόμενους υπολογισμούς:

$$(Ae^{i\omega t})'' + b(Ae^{i\omega t})' + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = f e^{i\omega t} \qquad \text{Αντικατάσταση } y_p.$$

$$-A\omega^2 e^{i\omega t} + bAi\omega e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = f e^{i\omega t} \qquad \text{Παραγώγιση, } i^2 = -1.$$

$$e^{i\omega t} A(-\omega^2 + ib\omega + \omega_0^2) = f e^{i\omega t}. \qquad \text{Κοινός παράγοντας}$$

Ο κοινός παράγοντας $e^{i\omega t}$ δεν είναι μηδέν και μπορεί να παραλειφθεί. Επειδή στόχος μας είναι ο υπολογισμός του A, βρίσκουμε ότι

$$A(-\omega^2 + ib\omega + \omega_0^2) = f \qquad \text{Απλοποίηση του } e^{i\omega t}.$$

$$A = \frac{f}{-\omega^2 + ib\omega + \omega_0^2} \qquad \text{Λύνουμε ως προς } A$$

Συνεπώς, η μερική λύση της εξίσωσης γίνεται

$$y_p = Ae^{i\omega t} = \underbrace{\frac{1}{-\omega^2 + ib\omega + \omega_0^2}}_{H(\omega)} f e^{i\omega t} = H(\omega) f e^{i\omega t}.$$

Η συνάρτηση

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + ib\omega + \omega_0^2}$$

που βρήκαμε ονομάζεται *συνάρτηση μεταφοράς* για το χρονικά αναλλοίωτο γραμμικό σύστημα. Εξαρτάται από τον συντελεστή απόσβεσης b, τη φυσική συχνότητα ω_0, και τη συχνότητα εξαναγκασμού ω. Γράφουμε την H ως συνάρτηση του ω, διότι διατηρούμε σταθερές τις παραμέτρους b και ω_0 του συστήματος και εξετάζουμε την απόκριση του συστήματος καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα εξαναγκασμού ω.

Επειδή πρόκειται για μιγαδική ποσότητα, μπορούμε να τη γράψουμε στην πολική μορφή

$$H(\omega) = g(\omega)e^{i\gamma(\omega)},$$

➤ Θυμηθείτε ότι ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να γραφεί στην πολική μορφή $re^{i\theta}$, όπου $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $\tan\theta = y/x$.

όπου $g(\omega) = |H(\omega)|$ είναι η *συνάρτηση κέρδους* του συστήματος και η γωνία φάσης $\gamma(\omega)$ είναι η *συνάρτηση υστέρησης φάσης*. Παρατηρήστε ότι οι συναρτήσεις εισόδου F και εξόδου y_p έχουν την ίδια συχνότητα ω. Η συνάρτηση φάσης υστέρησης $\gamma(\omega)$ δίνει τη φάση της εξόδου *σε σχέση* με της εισόδου για κάθε στιγμή.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι για παθητικά συστήματα ($b > 0$), η συνάρτηση υστέρησης φάσης είναι αρνητική ($\gamma(\omega) < 0$), πράγμα που σημαίνει ότι η έξοδος (output) *υστερεί* της εισόδου (input) (από όπου και η ορολογία). Για ενεργά συστήματα ($b < 0$), η υστέρηση φάσης είναι θετική και η έξοδος *προηγείται* της εισόδου.

Ένας σύντομος υπολογισμός (Άσκηση 22) μας επιτρέπει να χωρίσουμε την H σε πραγματικά και φανταστικά μέρη:

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + ib\omega + \omega_0^2} = \underbrace{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}_{H_r(\omega)} - i\underbrace{\frac{b\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}_{H_i(\omega)}.$$

Βρίσκουμε τώρα ότι η συνάρτηση κέρδους είναι

$$g(\omega) = |H(\omega)| = \sqrt{H_r(\omega)^2 + H_i(\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

Παρομοίως η συνάρτηση υστέρησης φάσης δίνεται από την

$$\tan\gamma(\omega) = \frac{H_i(\omega)}{H_r(\omega)} = -\frac{b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Όπως φαίνεται εν συντομία, η συνάρτηση υστέρησης φάσης έχει τιμές στο διάστημα $-\pi < \gamma(\omega) \leq 0$.

ΣΥΝΟΨΗ Συναρτήσεις μεταφοράς, κέρδους, υστέρησης φάσης

Η εξίσωση ταλαντωτή $y'' + by' + \omega_0^2 y = F(t)$ έχει τη **συνάρτηση μεταφοράς**

$$H(\omega) = g(\omega)e^{i\gamma(\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 + ib\omega + \omega_0^2},$$

όπου η **συνάρτηση κέρδους** είναι

$$g(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

και η **συνάρτηση υστέρησης φάσης** δίνεται από την

$$\tan\gamma(\omega) = -\frac{b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Η συνάρτηση μεταφοράς ορίζει πλήρως τη σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου (ή απόκρισης) του συστήματος. Από εννοιολογική άποψη, η συνάρτηση μεταφοράς «μεταφέρει» την είσοδο στην έξοδο με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\text{Είσοδος: } F(t) = fe^{i\omega t} \xrightarrow{H(\omega)} \text{Έξοδος: } y_p(t) = \underbrace{H(\omega)}_{g(\omega)e^{i\gamma(\omega)}} f e^{i\omega t}.$$

Τόσο η είσοδος όσο και η έξοδος είναι μιγαδικές συναρτήσεις. Εκείνα όμως που δίνουν ευθέως μετρήσιμες ποσότητες είναι τα πραγματικά μέρη τους. Ειδικά, το πραγματικό μέρος της εισόδου είναι

$$\mathrm{Re}\{F(t)\} = F_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

και το πραγματικό μέρος της εξόδου είναι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{y_p(t)\} &= \mathrm{Re}\{H(\omega) f e^{i\omega t}\} && \text{Αντικατάσταση } y_p.\\
&= \mathrm{Re}\Big\{\underbrace{g(\omega)e^{i\gamma(\omega)}}_{H(\omega)}\ \underbrace{F_0 e^{i\alpha}}_{f}\ e^{i\omega t}\Big\} && \text{Αντικατάσταση } H(\omega) \text{ και } f.\\
&= g(\omega)F_0 \cdot \mathrm{Re}\{e^{i\gamma(\omega)}e^{i\alpha}\, e^{i\omega t}\} && \text{τα } g(\omega) \text{ και } F_0 \text{ είναι πραγματικά}\\
&= g(\omega)F_0 \cos(\omega t + \alpha + \gamma(\omega)). && e^a e^b = e^{a+b} \text{ και } \mathrm{Re}\{e^{i\theta}\} = \cos\theta
\end{aligned}$$

➤ Σημειώστε ότι αν $\cos(\omega t + \alpha)$ είναι η είσοδος και $\cos(\omega t + \alpha + \gamma)$ είναι η έξοδος με $\gamma < 0$, τότε το γράφημα της εξόδου είναι το γράφημα της εισόδου μετατοπισμένο προς τα *δεξιά*. Συνεπώς, η έξοδος υστερεί της εισόδου.

Βλέπουμε ότι το πλάτος εξόδου $g(\omega)F_0$ είναι το $g(\omega)$ πολλαπλασιασμένο με το πλάτος εισόδου F_0, ενώ η έξοδος υστερεί της εισόδου σε κάθε χρονική στιγμή (διότι $\gamma(\omega) < 0$ όταν $b > 0$).

ΣΥΝΟΨΗ Λύση εξισώσεων εξαναγκασμένου ταλαντωτή

Η εξίσωση ταλαντωτή

$$y'' + by' + \omega_0^2 y = \underbrace{\mathrm{Re}\{f e^{i\omega t}\} = F_0 \cos(\omega t + \alpha)}_{\text{είσοδος}}$$

έχει τη λύση (έξοδος)

$$\mathrm{Re}\,\{y_p(t)\} = g(\omega)F_0 \cos(\omega t + \alpha + \gamma(\omega)),$$

όπου g η συνάρτηση κέρδους και γ η συνάρτηση υστέρησης φάσης.

Ιδιότητες της συνάρτησης μεταφοράς

Η συνάρτηση μεταφοράς —ειδικότερα οι συνιστώσες της, η συνάρτηση κέρδους και η συνάρτηση υστέρησης φάσης— είναι θεμελιώδεις στον σχεδιασμό ακουστικών και ηλεκτρικών φίλτρων, συσκευών ακύρωσης θορύβου και άλλων εργαλείων. Ας τις εξετάσουμε λοιπόν καλύτερα.

Η συχνότητα εξαναγκασμού που παράγει την μέγιστη απόκριση του συστήματος έχει συχνά πρακτικό ενδιαφέρον. Σε ορισμένες περιπτώσεις (συνήθως μηχανολογικές), αυτή η συχνότητα πρέπει να αποφεύγεται ενώ σε άλλες περιπτώσεις (συνήθως ηλεκτρικές) την επιδιώκουμε επειδή αντιστοιχεί στη βέλτιστη απόδοση μιας συσκευής. Μπορεί να αποδειχθεί (Άσκηση 23) ότι η συνάρτηση κέρδους

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

έχει μια μέγιστη τιμή στο $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{b^2}{2}}$, υπό την προϋπόθεση $b < \sqrt{2}\omega_0$, που αντιστοιχεί σε ασθενή (υποκρίσιμη) απόσβεση. Στην περίπτωση ταχείας (υπερκρίσιμης) απόσβεσης ($b \geq \sqrt{2}\omega_0$), η μέγιστη τιμή της g συμβαίνει όταν $\omega = 0$.

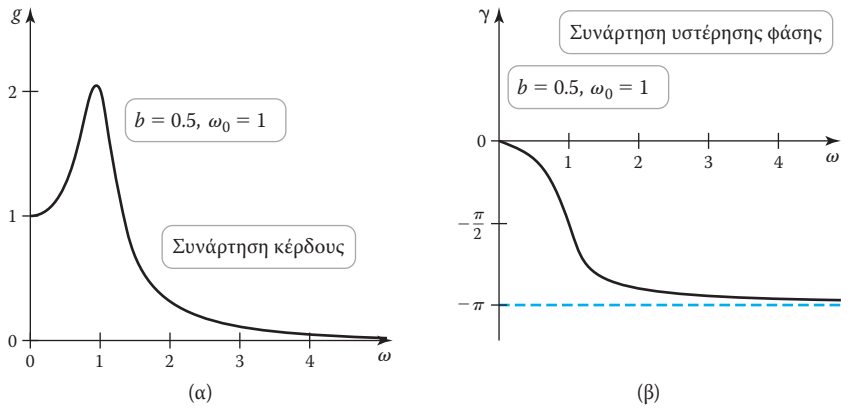
Η περίπτωση που εμφανίζεται στο Σχήμα Δ2.30a ($b = 0.5$ και $\omega_0 = 1$) αντιστοιχεί σε ασθενή (υποκρίσιμη) απόσβεση και η συνάρτηση κέρδους μεγιστοποιείται όταν $\omega \approx 0.935$. Γενικά, όσο το b της απόσβεσης προσεγγίζει το μηδέν, η εύρεση του μέγιστου της καμπύλης κέρδους προσεγγίζει όλο και περισσότερο την ω_0, που είναι η φυσική συχνότητα του συστήματος. Θυμηθείτε πως σε ένα σύστημα *χωρίς απόσβεση* η συνθήκη $\omega = \omega_0$ δημιουργεί *συντονισμό* (απεριόριστη αύξηση λύσεων). Σε ένα σύστημα με ασθενή (υποκρίσιμη) απόσβεση, τα μέγιστα πλάτη εμφανίζονται όταν $\omega \approx \omega_0$.

➤ Αν $\gamma = 0$, η είσοδος και η έξοδος είναι εναρμονισμένες. Τα μέγιστα και τα ελάχιστά τους συμπίπτουν. Αν $\gamma = \pm\pi/2$, η είσοδος και η έξοδος έχουν διαφορά φάσης ένα τέταρτο της περιόδου. Αν $\gamma = \pm\pi$, η συνάρτηση υστέρησης φάσης έχει ένα μέγιστο και οι είσοδος και έξοδος έχουν διαφορά φάσης μισή περίοδο (ή 180 μοίρες).

Ας δούμε τώρα την συνάρτηση υστέρησης φάσης (Σχήμα Δ2.30b)

$$\tan\gamma(\omega) = -\frac{b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Παρατηρήστε ότι $\gamma(0) = 0$, που σημαίνει ότι αν η συχνότητα εξαναγκασμού είναι μηδέν ($\omega = 0$), η δύναμη διέγερσης και η έξοδος είναι σταθερές και δεν υπάρχει καμιά υστέρηση μεταξύ εισόδου και εξόδου. Όταν το ω είναι μικρό και θετικό, η $\gamma(\omega)$



Σχήμα Δ2.30

είναι μικρή και αρνητική, που συνεπάγεται ότι η απόκριση του ταλαντωτή ακολουθεί από κοντά τις μεταβολές της δύναμης διέγερσης. Καθώς το ω αυξάνεται, η $\gamma(\omega)$ μειώνεται μονοτονικά και αν $\omega \to \omega_0^-$, βλέπουμε ότι $\tan\gamma(\omega) \to -\infty$, που συνεπάγεται ότι $\gamma(\omega) \to -\dfrac{\pi}{2}$. Όσο το ω συνεχίζει να αυξάνεται, $\tan\gamma(\omega) \to 0$, που σημαίνει ότι $\gamma(\omega) \to -\pi$. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση υστέρησης φάσης βρίσκεται πάντοτε στο διάστημα $-\pi < \gamma(\omega) \leq 0$. Εν συντομία, όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα εξαναγκασμού, τόσο μεγαλύτερη είναι υστέρηση φάσης μεταξύ εισόδου και εξόδου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Κέρδος και υστέρηση φάσης** Θεωρήστε την εξίσωση ταλαντωτή $y'' + by' + \omega_0^2 y = F_0 \cos \omega t$, όπου $\omega_0 = 1$, $b = 0.5$, και $F_0 = 2$ (οι συναρτήσεις κέρδους και υστέρησης φάσης φαίνονται στο Σχήμα Δ2.30).

α. Βρείτε τις συναρτήσεις κέρδους και υστέρησης φάσης.

β. Υποθέτοντας $y(0) = y'(0) = 0$, βρείτε και σχεδιάστε τη λύση της εξίσωσης $\mathrm{Re}\{y_p\}$ με συχνότητες εξαναγκασμού $\omega = 0.8$ και $\omega = 2$.

ΛΥΣΗ

α. Με τις δοσμένες τιμές των ω_0 και b, η συνάρτηση κέρδους είναι

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2}{4}}},$$

και η συνάρτηση υστέρησης φάσης δίνεται από την

$$\tan\gamma(\omega) = -\frac{\omega/2}{1-\omega^2}.$$

β. Θυμηθείτε ότι η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\mathrm{Re}\{y_p\} = g(\omega)F_0 \cos(\omega t + \gamma(\omega)).$$

Αν θέσουμε $\omega = 0.8$, βρίσκουμε ότι $g(0.8) \approx 1.86$ και $\gamma(0.8) \approx -0.84$. Άρα με $F_0 = 2$, η λύση είναι

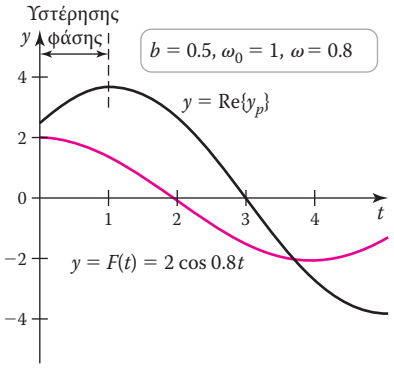
$$\mathrm{Re}\{y_p\} = 1.86 \cdot 2 \cdot \cos(0.8t - 0.84) = 3.72 \cos(0.8t - 0.84).$$

Τα γραφήματα της δύναμης διέγερσης $F(t) = 2\cos 0.8t$ και του πραγματικού μέρους της λύσης φαίνονται στο Σχήμα Δ2.31. Βλέπουμε ότι το πλάτος της συνάρτησης εξαναγκασμού είναι $F_0 = 2$ και το πλάτος της λύσης είναι περίπου διπλάσιο, φανερώνοντας μια «ενίσχυση» κατά έναν παράγοντα $g(0.8) \approx 1.86$. Παρατηρήστε επίσης ότι το πρώτο τοπικό μέγιστο της καμπύλης της λύσης (έξοδος) εμφανίζεται *μετά*

το πρώτο τοπικό μέγιστο της καμπύλης της συνάρτησης εξαναγκασμού, φανερώνοντας την υστέρηση φάσης. Για να υπολογίσουμε την πραγματική απομάκρυνση στις καμπύλες, γράφουμε

$$\cos(0.8t - 0.84) = \cos\left(0.8\left(t - \frac{0.84}{0.8}\right)\right) = \cos(0.8(t - 1.05)).$$

Στη μορφή αυτή, βλέπουμε την απομάκρυνση (προς τα δεξιά) της καμπύλης της λύσης σε σχέση με την καμπύλη της συνάρτησης εξαναγκασμού είναι περίπου 1.05, σύμφωνα με το Σχήμα Δ2.31. Γενικά, η μετατόπιση στις καμπύλες δίνεται από την $\dfrac{\gamma(\omega)}{\omega}$.

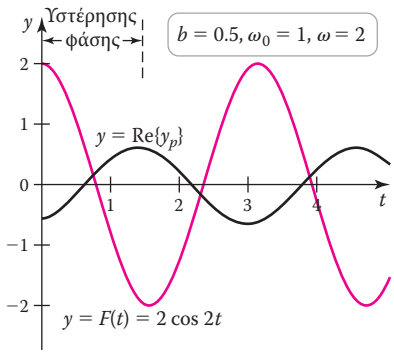


Σχήμα Δ2.31

Με την υψηλότερη συχνότητα εξαναγκασμού $\omega = 2$, βρίσκουμε ότι $g(2) \approx 0.32$ και $\gamma(2) \approx -2.82$. Η λύση τώρα είναι

$$\mathrm{Re}\{y_p\} = 0.32 \cdot 2 \cdot \cos(2t - 2.82) = 0.64\cos(2t - 2.82).$$

Τα γραφήματα της συνάρτησης εξαναγκασμού και του πραγματικού μέρους της λύσης φαίνονται στο Σχήμα Δ2.32. Στην περίπτωση αυτή, το πλάτος της λύσης (έξοδος) έχει μειωθεί κατά έναν παράγοντα $g(2) \approx 0.32$. Το πρώτο μέγιστο της καμπύλης της λύσης υστερεί πάλι από το πρώτο μέγιστο της καμπύλης της συνάρτησης εξαναγκασμού. Η μετατόπιση στις καμπύλες είναι $\dfrac{\gamma(\omega)}{\omega} = \dfrac{\gamma(2)}{2} \approx -1.41$, σύμφωνα με το Σχήμα Δ2.32.

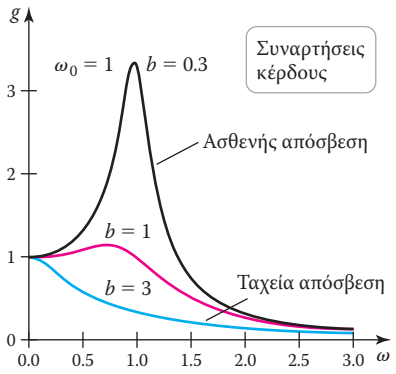


Σχήμα Δ2.32

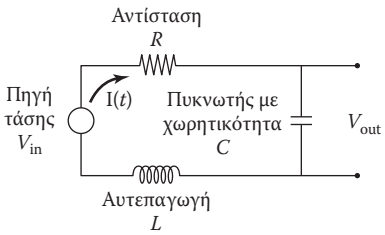
Σχετικές ασκήσεις 5–16 ◄

Μια διαφορετική άποψη για την συνάρτηση κέρδους παρουσιάζεται στο Σχήμα Δ2.33. Σε αυτό το σχήμα ορίζουμε $\omega_0 = 1$ και θέτουμε $b = 0.3$, 1 και 3. Για $b \geq \sqrt{2}\omega_0$ (ταχεία απόσβεση), το πλάτος της καμπύλης έχει ένα μοναδικό τοπικό μέγιστο στο $\omega = 0$ με τιμή 1. Στην περίπτωση αυτή, οι τιμές της συνάρτησης κέρδους είναι μικρότερες από 1 σε μέτρο,

που σημαίνει ότι το πλάτος της απόκρισης (έξοδος) είναι μικρότερο από το πλάτος της συνάρτησης εξαναγκασμού (είσοδος). Στο $b = \sqrt{2}\omega_0$, οι καμπύλες κέρδους «αναστρέφονται» και για $b < \sqrt{2}\omega_0$ (ασθενής απόσβεση), βλέπουμε τιμές του κέρδους που είναι μεγαλύτερες από 1. Σε αυτή την περίπτωση ασθενούς απόσβεσης, είναι δυνατόν να διευρύνουμε το πλάτος της απόκρισης με την προϋπόθεση ότι η συχνότητα εξαναγκασμού έχει επιλεγεί κατάλληλα.



Σχήμα Δ2.33



Σχήμα Δ2.34

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων** Θεωρήστε το κύκλωμα LCR που εμφανίζεται στο Σχήμα Δ2.34.

α. Να βρείτε τη διαφορική εξίσωση για την v_{out}.

β. Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς και υπολογίστε τη συνάρτηση κέρδους.

γ. Δώστε τη σχέση μεταξύ v_{in} και v_{out}.

δ. Βρείτε σχέση μεταξύ των L, C, και R ώστε η συνάρτηση κέρδους να είναι γνησίως φθίνουσα για $0 \leq \omega < \infty$.

ε. Υπολογίστε τη συνάρτηση κέρδους όπως και τον λόγο $\left|\frac{v_{out}}{v_{in}}\right|$ (ως συνάρτηση του ω) όταν $L = 0.5$, $C = 1/25$, και $R = 6$. Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

ΛΥΣΗ

α. Από τον νόμο τάσης του Kirchhoff (βλ. Ενότητα Δ2.4) έχουμε

$$v_{in} - RI - L\frac{dI}{dt} - v_{out} = 0.$$

Η πτώση τάσης διαμέσου του πυκνωτή είναι $v_{out} = \frac{Q}{C}$. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη αυτής της έκφρασης και χρησιμοποιώντας ότι $I = Q'(t)$ έχουμε $v'_{out} = \frac{Q'}{C} = \frac{I}{C}$, ή $I = Cv'_{out}$. Αντικαθιστούμε το I στον νόμο της τάσης και έχουμε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης για την v_{out}:

$$v_{in} - RCv'_{out} - LCv''_{out} - v_{out} = 0.$$

Διαιρούμε με LC και κάνουμε αναδιάταξη όρων

$$v''_{out} + \frac{R}{L}v'_{out} + \frac{1}{LC}v_{out} = \frac{1}{LC}v_{in} = \frac{1}{LC}\underbrace{fe^{i\omega t}}_{v_{in}},$$

στην οποία έχουμε υποθέσει ότι η συνάρτηση εισόδου είναι η μιγαδική εκθετική $v_{in} = fe^{i\omega t}$.

β. Για να προκύψει η συνάρτηση μεταφοράς, χρησιμοποιούμε τον ορισμό που δώσαμε προηγουμένως με $b = \frac{R}{L}$ και $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Το αποτέλεσμα είναι ότι

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2 - i\frac{R}{L}\omega}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2\omega^2}.$$

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση κέρδους

$$g(\omega) = |H(\omega)| = \sqrt{H_r(\omega)^2 + H_i(\omega)^2}$$

και βρίσκουμε ότι

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2\omega^2}}.$$

γ. Η είσοδος στο σύστημα είναι $v_{\text{in}} = f e^{i\omega t}$ και το δεξί μέλος της διαφορικής εξίσωσης είναι $\frac{1}{LC}v_{\text{in}}$. Συνεπώς, η έξοδος του συστήματος είναι

$$v_{\text{out}} = H(\omega)\frac{1}{LC}v_{\text{in}}.$$

δ. Για να εξετάσουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης κέρδους, εντοπίζουμε τα τοπικά ακρότατα της g. Παρατηρούμε ότι η g έχει ένα τοπικό μέγιστο στα ίδια σημεία που ο παρονομαστής έχει ένα τοπικό ελάχιστο. Για να ελαχιστοποιήσουμε τον παρονομαστή, ελαχιστοποιούμε απλώς την υπόριζη ποσότητα του παρονομαστή

$$h(\omega) = \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2\omega^2$$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της h, υπολογίζουμε

$$h'(\omega) = 2\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)(-2\omega) + 2\left(\frac{R}{L}\right)^2\omega \quad \text{Παραγώγιση}$$

$$= 2\omega\left(2\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right) + \left(\frac{R}{L}\right)^2\right). \quad \text{Απλοποίηση}$$

Παρατηρούμε $h'(0) = 0$, άρα το $\omega = 0$ είναι ένα κρίσιμο σημείο για όλες τις τιμές των L, C, και R. Πρόσθετα κρίσιμα σημεία, αν υπάρχουν, ικανοποιούν την

$$2\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right) + \left(\frac{R}{L}\right)^2 = 0.$$

Μετά από κάποιες απλοποιήσεις, η συνθήκη γίνεται

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}.$$

Το κρίσιμο σημείο στο διάστημα $\omega > 0$ είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}},$$

Υπό την προϋπόθεση $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} \geq 0$ ή $R \leq \sqrt{\frac{2L}{C}}$. Λίγη παραπάνω έρευνα δείχνει ότι αυτό το κρίσιμο σημείο αντιστοιχεί σε ένα τοπικό ελάχιστο της h και συνεπώς ένα τοπικό μέγιστο της g. Συνοψίζοντας,

- αν $R \leq \sqrt{\frac{2L}{C}}$, τότε η g έχει ένα τοπικό μέγιστο για $\omega > 0$;
- αν $R > \sqrt{\frac{2L}{C}}$, τότε η g έχει ένα τοπικό μέγιστο για $\omega = 0$ και είναι μονοτονικά φθίνουσα για $\omega \geq 0$.

Παρατηρήστε ότι για όλες τις τιμές των παραμέτρων $g(0) = LC$.

ε. Αντικαθιστούμε τις δοσμένες τιμές των L, C, και R, και βλέπουμε ότι $R > \sqrt{\frac{2L}{C}}$, οπότε αναμένουμε ότι η συνάρτηση κέρδους θα έχει ένα μοναδικό μέγιστο στο $\omega = 0$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές των παραμέτρων, η συνάρτηση κέρδους γίνεται

$$g(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{(50 - \omega^2)^2 + 144\omega^2}}.$$

Για να ερμηνεύσουμε την συνάρτηση κέρδους, υπολογίζουμε το μέτρο του λόγου της εξόδου προς την είσοδο. Από το μέρος (γ), έχουμε

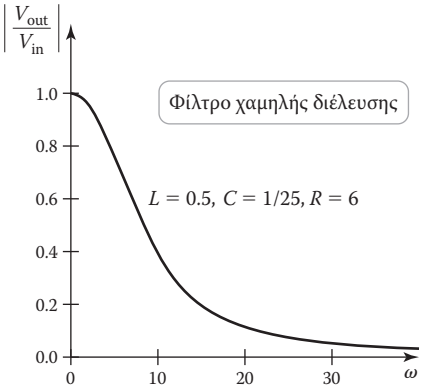
$$\left|\frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}\right| = \left|\frac{H(\omega)\frac{1}{LC}v_{\text{in}}}{v_{\text{in}}}\right| \qquad \text{Αντικατάσταση}$$

$$= \frac{g(\omega)}{LC} \qquad \text{Απλοποίηση, } |H(\omega)| = g(\omega)$$

$$= \frac{1}{LC}\frac{1}{\sqrt{(50 - \omega^2)^2 + 144\omega^2}} \qquad \text{Αντικατάσταση του } g$$

➤ Μια παρόμοια εξέταση για ένα φίλτρο υψηλών συχνοτήτων δίνεται στις Ασκήσεις 24–28.

Αν κάνουμε το γράφημα του λόγου, μπορούμε να δούμε το αποτέλεσμα των διαφόρων συχνοτήτων εξαναγκασμού ω στο σήμα εισόδου. Το γράφημα (Σχήμα Δ2.35) δείχνει ότι όλες οι συχνότητες εξαναγκασμού δημιουργούν μια εξασθένηση του σήματος εισόδου. Όμως οι χαμηλές συχνότητες εξασθενούν το λιγότερο, ενώ συχνότητες με $\omega > 10$ μειώνονται σε μέτρο κατά έναν παράγοντα τουλάχιστον 0.5. Επειδή οι χαμηλές συχνότητες επιτρέπεται να «διέλθουν», το κύκλωμα ονομάζεται *φίλτρο χαμηλής διέλευσης*.



Σχήμα Δ2.35

Σχετικές ασκήσεις 17–20 ◄

Επεκτάσεις

Έχουμε δείξει πώς χρησιμοποιείται η συνάρτηση μεταφοράς για την εύρεση και την ερμηνεία λύσεων εξισώσεων ταλαντωτών. Το ίδιο σημαντική είναι και η επέκταση αυτών των ιδεών. Ας προχωρήσουμε σταδιακά.

Υποθέστε ότι η συνάρτηση εξαναγκασμού αποτελείται από δύο συνιστώσες με δύο διαφορετικές συχνότητες ω_1 και ω_2; Δηλαδή

$$F(t) = F_1 e^{i\omega_1 t} + F_2 e^{i\omega_2 t}.$$

Επειδή η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, μπορούμε να παραθέσουμε τις λύσεις που αντιστοιχούν σε κάθε συνιστώσα ξεχωριστά. Η λύση που προκύπτει είναι

$$y = H(\omega_1)F_1 e^{i\omega_1 t} + H(\omega_2)F_2 e^{i\omega_2 t}.$$

Θυμηθείτε ότι άπαξ και τα b και ω_0 είναι γνωστά, έχουμε μια μοναδική συνάρτηση μεταφοράς και είναι εύκολο να υπολογίσουμε τα $H(\omega_1)$ και $H(\omega_2)$.

Υποθέστε τώρα ότι η συνάρτηση εξαναγκασμού είναι ένα άθροισμα n συνιστωσών με διαφορετικές συχνότητες και πλάτη, δηλαδή

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} F_k e^{i\omega_k t}.$$

Μπορούμε πάλι να παραθέσουμε λύσεις μεμονωμένων εξισώσεων και να δώσουμε τη λύση στη μορφή

$$y = \sum_{k=1}^{n} H(\omega_k)F_k e^{i\omega_k t}.$$

Όπως και προηγουμένως, άπαξ και η συνάρτηση μεταφοράς είναι ορισμένη, είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις τιμές των $H(\omega_k)$, για $k = 1, \ldots, n$.

Τώρα μπορούμε να κάνουμε ένα σημαντικό άλμα. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση της εξαναγκασμού F είναι μια *οποιαδήποτε* λεία περιοδική συνάρτηση. Τότε είναι δυνατόν να εκφράσουμε την F ως μια *σειρά Fourier* της μορφής

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k e^{i\omega_k t}.$$

Τυπικά, η μέθοδος λύσης που περιγράφεται πιο πάνω μπορεί να αντιμετωπιστεί και η λύση μπορεί επίσης να εκφραστεί ως μια σειρά Fourier.

Ας περάσουμε στο τελικό στάδιο. Αν η συνάρτηση εξαναγκασμού είναι οποιαδήποτε συνάρτηση —όχι υποχρεωτικά περιοδική— που πληροί αρκούντως γενικές προϋποθέσεις, μπορεί να εκφραστεί ως ένα *ολοκλήρωμα Fourier*. Ισχύει πάλι η μέθοδος λύσης που περιγράφεται πιο πάνω και η λύση μπορεί να εκφραστεί ως ένα ολοκλήρωμα Fourier. Η απλή ιδέα χρησιμοποίησης μιας μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης εξαναγκασμού, αποδεικνύεται απίστευτα σημαντική και οδηγεί στην λύση ενός ευρέος φάσματος προβλημάτων ταλαντωτών.

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ2.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Γράψτε τη συνάρτηση μεταφοράς μέσω των συναρτήσεων κέρδους και υστέρησης φάσης.

2. Στα συστήματα που εξετάστηκαν σε αυτήν την ενότητα, ερμηνεύστε τη σχέση μεταξύ της εισόδου και της εξόδου ως προς την συνάρτηση κέρδους.

3. Στα συστήματα που εξετάστηκαν σε αυτήν την ενότητα, ερμηνεύστε τη σχέση μεταξύ της εισόδου και της εξόδου ως προς την συνάρτηση υστέρησης φάσης.

4. Εξηγήστε με ένα διάγραμμα τι σημαίνει η έξοδος να υστερεί της εισόδου.

Βασικές δεξιότητες

T **5–10. Συναρτήσεις κέρδους και υστέρησης φάσης** *Θεωρήστε την εξίσωση ταλαντωτή* $y'' + by' + \omega_0^2 y = F_0 \cos \omega t$.

α. *Γράψτε και σχεδιάστε τη συνάρτηση κέρδους και τη συνάρτηση υστέρησης φάσης για τα επόμενα συστήματα.*

β. *Βρείτε τη θέση των τοπικών μεγίστων της συνάρτησης κέρδους για* $\omega \geq 0$. *Να αναφέρετε αν το σύστημα έχει ταχεία ή ασθενή απόσβεση.*

5. $b = 1, \omega_0 = 1$

6. $b = 3, \omega_0 = 1$

7. $b = 0.1, \omega_0 = 1$

8. $b = 90, \omega_0 = 100$

9. $b = 150, \omega_0 = 100$

10. $b = 300, \omega_0 = 400$

T **11–16 Λύσεις εξισώσεων ταλαντωτών** *Θεωρήστε την εξίσωση ταλαντωτή* $y'' + by' + \omega_0^2 y = F_0 \cos \omega t$. *Για τις επόμενες παραμετρικές τιμές να κάνετε τα ακόλουθα.*

α. *Βρείτε τη συνάρτηση κέρδους και τη συνάρτηση υστέρησης φάσης (βλ. Ασκήσεις 5–10).*
β. *Βρείτε το πραγματικό μέρος της λύσης.*
γ. *Να κάνετε το γράφημα της συνάρτησης εξαναγκασμού και το πραγματικό μέρος της λύσης. Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση κέρδους και η συνάρτηση υστέρησης φάσης είναι σωστές.*

11. $b = 1, \omega_0 = 1, F_0 = 2, \omega = 2$

12. $b = 3, \omega_0 = 1, F_0 = 10, \omega = 1$

13. $b = 0.1, \omega_0 = 1, F_0 = 5, \omega = 3$

14. $b = 90, \omega_0 = 100, F_0 = 50, \omega = 50$

15. $b = 150, \omega_0 = 100, F_0 = 80, \omega = 200$

16. $b = 300, \omega_0 = 400, F_0 = 150, \omega = 200$

T **17–20. Ανάλυση εξισώσεων κυκλώματος** *Θεωρήστε την εξίσωση κυκλώματος*

$$v''_{\text{out}} + \frac{R}{L} v'_{\text{out}} + \frac{1}{LC} v_{\text{out}} = \frac{1}{LC} v_{\text{in}} = \frac{1}{LC} f e^{i\omega t}.$$

α. *Για τις επόμενες παραμετρικές τιμές να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους.*
β. *Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση κέρδους και να εντοπίσετε τη μέγιστη τιμή της για* $\omega \geq 0$.
γ. *Σε ποιο διάστημα είναι μονοτονικά φθίνουσα;*
δ. *Να βρείτε και να κάνετε το γράφημα του λόγου* $\left|\frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}\right|$ *και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.*

17. $L = 2, C = 1/144, R = 20$

18. $L = 2, C = 1/144, R = 40$

19. $L = 8, C = 1/120, R = 400$

20. $L = 8, C = 1/100, R = 30$

Περαιτέρω διερευνήσεις

21. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Εξετάστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε ένα παράδειγμα ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Η συνάρτηση μεταφοράς σε μια εξίσωση ταλαντωτή είναι ανεξάρτητη από τη συνάρτηση εξαναγκασμού.
β. Η συνάρτηση μεταφοράς για έναν ταλαντωτή χωρίς απόσβεση είναι μια πραγματική συνάρτηση.

22. Πραγματικά και φανταστικά μέρη Δείξτε ότι η συνάρτηση μεταφοράς που εξετάστηκε σε αυτή την ενότητα μπορεί να εκφραστεί ως προς τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της στη μορφή

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega b + \omega_0^2}$$

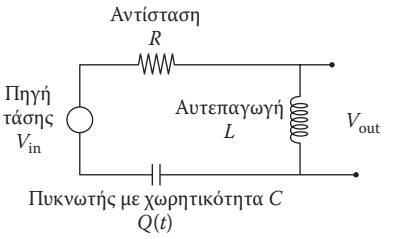
$$= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} - i\frac{b\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}.$$

T **23. Μέγιστη τιμή της συνάρτησης κέρδους** Ο στόχος είναι να εντοπίσουμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης κέρδους

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

α. Εξηγήστε γιατί οι τιμές των τοπικών μεγίστων της g, για $\omega \geq 0$, εμφανίζονται στα ίδια σημεία με τις τιμές τοπικών ελαχίστων του παρονομαστή.
β. Εξηγήστε γιατί οι τιμές των τοπικών μεγίστων της g, για $\omega \geq 0$, εμφανίζονται στα ίδια σημεία με τις τιμές τοπικών ελαχίστων της $h(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2$.
γ. Δείξτε ότι $h'(\omega) = 2\omega(b^2 - 2\omega_0^2 + 2\omega^2)$.
δ. Δείξτε ότι αν $b < \sqrt{2}\omega_0$, τότε η g έχει ένα τοπικό μέγιστο στο $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2}}$. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της g;
ε. Δείξτε ότι αν $b \geq \sqrt{2}\omega_0$, τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα για $\omega \geq 0$, και έχει ένα τοπικό μέγιστο στο $\omega = 0$.
στ. Ποια περίπτωση, του μέρους (δ) ή του μέρους (γ), αντιστοιχεί σε ταχεία απόσβεση; Εξηγήστε.

T **24. Φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων** Θεωρήστε το κύκλωμα LCR του σχήματος.



α. Εξηγήστε γιατί ο νόμος τάσης του Kirchhoff για το κύκλωμα είναι

$$v_{\text{in}} - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} - v_{\text{out}} = 0.$$

β. Χρησιμοποιήστε ότι $I(t) = Q'(t)$ και ότι η τάση διαμέσου του πηνίου είναι $v_{\text{out}} = LI'(t) = LQ''(t)$ για να δείξετε ότι η εξίσωση για το φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{1}{LC}Q = \frac{1}{L}v_{\text{in}} = \frac{1}{L}fe^{i\omega t}.$$

γ. Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς για την εξίσωση και υπολογίστε την συνάρτηση κέρδους.
δ. Δείξτε ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $Q(t) = H(\omega)\frac{1}{L}fe^{i\omega t}$. Στη συνέχεια να συμπεράνετε ότι $Q''(t) = -\omega^2 Q(t)$.
ε. Τώρα πρέπει να συσχετίσετε το v_{out} με το Q. Χρησιμοποιήστε το μέρος (β) για να δείξετε ότι

$$v_{\text{out}} = -\omega^2 LQ = -\omega^2 L\, H(\omega)\frac{1}{L}fe^{i\omega t} = -\omega^2 H(\omega)v_{\text{in}}.$$

στ. Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι ο λόγος των μέτρων εισόδου και εξόδου. Δείξτε ότι

$$\left|\frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}\right| = \omega^2|H(\omega)| = \omega^2 g(\omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}}.$$

ζ. Δείξτε ότι για $R > \sqrt{\frac{2L}{C}}$ ο λόγος του μέρους (στ) είναι μονοτονικά αύξουσα για $\omega > 0$.

η. Υπό ποιες προϋποθέσεις, αν υφίστανται, ο λόγος του μέρους (στ) έχει ένα τοπικό μέγιστο για $\omega > 0$;

θ. Εξηγήστε γιατί το κύκλωμα ονομάζεται *φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων*.

T **25–28. Φίλτρα διέλευσης υψηλών συχνοτήτων** *Θεωρήστε το φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων της Άσκησης 24.*

α. *Για τις δοσμένες τιμές των παραμέτρων, βρείτε τη συνάρτηση κέρδους.*

β. *Σχεδιάστε τη συνάρτηση κέρδους και περιγράψτε τη συμπεριφορά της για* $\omega \geq 0$.

γ. *Βρείτε και κάντε το γράφημα του λόγου* $\left|\dfrac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}\right|$ *και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.*

25. $L = 0.2, C = 1/250, R = 8$

26. $L = 0.2, C = 1/250, R = 12$

27. $L = 40, C = 1/2000, R = 10$

28. $L = 40, C = 1/2000, R = 30$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Εξετάστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε ένα παράδειγμα ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Η εξίσωση $y'' + 2y' - ty = 0$ είναι δεύτερης τάξης, γραμμική και ομογενής.

β. Η εξίσωση $y'' + 2y' - y^2 = 3$ είναι δεύτερης τάξης, γραμμική και μη ομογενής.

γ. Για να λύσουμε την $t^2y'' + 2ty' + 4y = 0$, χρησιμοποιούμε την δοκιμαστική λύση $y = e^{rt}$ και βρίσκουμε το r.

δ. Για να βρούμε μια μερική λύση της εξίσωσης $y'' - 2y' + y = e^t$, χρησιμοποιούμε τη δοκιμαστική λύση $y_p = Ae^t$.

ε. Η συνάρτηση $y = 0$ είναι πάντα μια λύση μιας γραμμικής ομογενούς εξίσωσης δεύτερης τάξης.

2–9. Λύση ομογενών εξισώσεων *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων ομογενών εξισώσεων.*

2. $y'' + y' - 6y = 0$

3. $y'' - 2y' - 8y = 0$

4. $y'' + 8y = 0$

5. $y'' + 36y = 0$

6. $y'' + 4y' + 13y = 0$

7. $y'' + 4y' + 4y = 0$

8. $t^2y'' + 3ty' + 8y = 0$ για $t > 0$

9. $y'' - 2y' + 5y = 0$

10–15. Μερικές λύσεις *Βρείτε μια μερική λύση των ακόλουθων εξισώσεων.*

10. $y'' - 3y' - 4y = 2e^{2t}$

11. $y'' + 25y = 3\cos 2t$

12. $y'' - y' - 2y = 3t^2 + 10$

13. $y'' + 5y' - 6y = t + 2e^{-t}$

14. $y'' - y' - 6y = 2e^{-2t}$

15. $y'' + 16y = 2\cos 4t$

16–21. Γενικές λύσεις *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων εξισώσεων.*

16. $y'' - 6y' - 7y = 4e^t$

17. $y'' + 4y = 3\sin 3t$

18. $y'' - 2y' + 2y = 1 + e^{-t}$

19. $y'' + 4y' + 5y = 2\cos t$

20. $y'' + 4y' - 32y = 1 + 2t$

21. $y'' - y = 2e^t$

T **22. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση** Ένα τούβλο βάρους 4 kg κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου $k = 16$ N/m. Το σύστημα διεγείρεται από μια εξωτερική δύναμη $F_{\text{ext}} = 4\cos \omega t$. Υποθέτουμε καμία αρχική απομάκρυνση και ταχύτητα του τούβλου και καμία απόσβεση. Να κάνετε το γράφημα της λύσης σε δύο περιπτώσεις: $\omega = 2.2$ και $\omega = 4$. Σε ποια περίπτωση η λύση περιέχει διακροτήματα;

T **23. Ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση** Ένα τούβλο βάρους 0.2 kg κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου $k = 20$ N/m. Οι τριβές του συστήματος εκφράζονται με έναν συντελεστή απόσβεσης c kg/s. Λύστε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με τις ακόλουθες τιμές του c και αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Να κάνετε το γράφημα κάθε λύσης και να δηλώσετε αν το πρόβλημα παρουσιάζει υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή κρίσιμη απόσβεση.

α. $c = 3$ kg/s

β. $c = 4$ kg/s

γ. $c = 5$ kg/s

T **24. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση** Ένα τούβλο βάρους 10 kg κρέμεται από ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου $k = 62.5$ N/m. Το τούβλο ταλαντώνεται μέσα σε υγρό που δημιουργεί αντίσταση με συντελεστή απόσβεσης $c = 40$ kg/s.

Η ανάρτηση του ελατηρίου δονείται και παράγει μια εξωτερική δύναμη $F_{ext} = 10 \cos 2t$. Υποθέτουμε ότι το τούβλο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία στη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο χωρίς ταχύτητα.

α. Να βρείτε και να κάνετε το γράφημα της θέσης του τούβλου αφού αφεθεί ελεύθερο.

β. Βρείτε τη μεταβατική λύση και τη λύση σταθερής κατάστασης και να τις σχεδιάσετε ξεχωριστά.

γ. Μετά από πόσα δευτερόλεπτα περίπου, η μεταβατική λύση καθίσταται αμελητέα;

δ. Βρείτε την συνάρτηση θέσης του τούβλου χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση μεταφοράς και επιβεβαιώστε ότι η λύση σας είναι συνεπής με το μέρος (α).

T **25.** **Κύκλωμα LCR** Ένα κύκλωμα LCR αποτελείται από μια αντίσταση 10 Ω, ένα πηνίο 0.1 H και έναν πυκνωτή 1/240 F συνδεδεμένα εν σειρά με μια πηγή μεταβλητής τάσης με έξοδο $E(t) = 200 \sin 60t$.

α. Βρείτε το ρεύμα του κυκλώματος, υποθέτοντας ότι $I(0) = Q(0) = 0$.

β. Βρείτε τα ρεύματα μεταβατικής και σταθερής κατάστασης.

γ. Να σχεδιάσετε το ρεύμα σταθερής κατάστασης, το μεταβατικό και το ολικό ρεύμα, για $t \geq 0$.

δ. Βρείτε το ρεύμα χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση μεταφοράς και ελέγξτε αν συμφωνεί με το μέρος (α).

Απαντήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ2

Ενότητα Δ2.1, σελ. Δ2-10–Δ2-13

1. Η τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου στην εξίσωση. **3.** Μια διαφορική εξίσωση της μορφής $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t)$ είναι ομογενής αν $f(t) = 0$ στο διάστημα που εξετάζουμε. **5.** Αν μια συνάρτηση είναι ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιο της άλλης, τότε οι δύο συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες. **7.** Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2, της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Βρείτε κάθε μερική λύση y_p, της αρχικής διαφορικής εξίσωσης. Η γενική λύση είναι $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.
9. τάξη 2, γραμμική, μη ομογενής **11.** τάξη 2, μη γραμμική, μη ομογενής

13. $y'' - 4y = (3e^{2t} - 5e^{-2t})'' - 4(3e^{2t} - 5e^{-2t})$
$= 12e^{2t} - 20e^{-2t} - 12e^{2t} + 20e^{-2t}$
$= 0$

15. $y'' - 9y = (4e^{3t} + 3e^{-3t} - 2t)'' - 9(4e^{3t} + 3e^{-3t} - 2t)$
$= 36e^{3t} + 27e^{-3t} - 36e^{3t} - 27e^{-3t} + 18t$
$= 18t$

17. $y'' - y' - 2y = (c_1e^{-t} + c_2e^{2t})'' - (c_1e^{-t} + c_2e^{2t})'$
$- 2(c_1e^{-t} + c_2e^{2t})$
$= c_1e^{-t} + 4c_2e^{2t} - (-c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t})$
$- 2c_1e^{-t} - 2c_2e^{2t}$
$= 0$

19. $y'' + 6y' + 25y$
$= (c_1e^{-3t}\sin 4t + c_2e^{-3t}\cos 4t)''$
$+ 6(c_1e^{-3t}\sin 4t + c_2e^{-3t}\cos 4t)'$
$+ 25(c_1e^{-3t}\sin 4t + c_2e^{-3t}\cos 4t)$
$= (-7c_1e^{-3t}\sin 4t - 24c_1e^{-3t}\cos 4t + 24c_2e^{-3t}\sin 4t - 7c_2e^{-3t}\cos 4t)$
$+6(-3c_1e^{-3t}\sin 4t + 4c_1e^{-3t}\cos 4t - 4c_2e^{-3t}\sin 4t$
$- 3c_2e^{-3t}\cos 4t) + 25(c_1e^{-3t}\sin 4t + c_2e^{-3t}\cos 4t)$
$= (-7 - 18 + 25)c_1e^{-3t}\sin 4t + (-24 + 24)c_1e^{-3t}\cos 4t$
$+(24 - 24)c_2e^{-3t}\sin 4t + (-7 - 18 + 25)c_2e^{-3t}\cos 4t$
$= 0$

21. $ty'' - (t + 1)y' + y = t[c_1e^t + c_2(t + 1)]'' - (t + 1)\cdot$
$[c_1e^t + c_2(t + 1)]' + [c_1e^t + c_2(t + 1)]$
$= t(c_1e^t) - (t + 1)(c_1e^t + c_2) + [c_1e^t + c_2(t + 1)]$
$= tc_1e^t - tc_1e^t - c_1e^t - (t + 1)c_2 + c_1e^t + c_2(t + 1)$
$= 0$

23. $y = c_1e^{-6t} + c_2e^{6t}$

25. $y = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$

27. $y'' - y = (e^{-3t})'' - e^{-3t} = 9e^{-3t} - e^{-3t} = 8e^{-3t}$

29. $y'' - 4y' + 4y = (t^2e^{2t})'' - 4(t^2e^{2t})' + 4t^2e^{2t}$
$= (4t^2e^{2t} + 8te^{2t} + 2e^{2t}) - 4(2t^2e^{2t} + 2te^{2t}) + 4t^2e^{2t}$
$= (4 - 8 + 4)t^2e^{2t} + (8 - 8)te^{2t} + 2e^{2t}$
$= 2e^{2t}$

31. Έστω $y_1 = \frac{e^{-t}}{2}$, $y_2 = \frac{e^{-t}}{2} + 3e^{7t}$, και $y_3 = y_2 - y_1 = 3e^{7t}$. Τότε

$$y_1'' - 49y_1 = \left(\frac{e^{-t}}{2}\right)'' - 49\left(\frac{e^{-t}}{2}\right) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{49e^{-t}}{2} = -24e^{-t}$$

$$y_2'' - 49y_2 = \left(\frac{e^{-t}}{2} + 3e^{7t}\right)'' - 49\left(\frac{e^{-t}}{2} + 3e^{7t}\right)$$
$$= \frac{e^{-t}}{2} + 147e^{7t} - \frac{49e^{-t}}{2} - 147e^{7t} = -24e^{-t}$$

$y_3'' - 49y_3 = (3e^{7t})'' - 49(3e^{7t}) = 147e^{7t} - 147e^{7t} = 0$

33. Έστω $y_1 = -e^t$, $y_2 = 6e^{4t} - e^t$, και $y_3 = y_2 - y_1 = 6e^{4t} - e^t - (-e^t) = 6e^{4t}$. Τότε

$y_1'' - y_1' - 12y_1 = (-e^t)'' - (-e^t)' - 12(-e^t)$
$= -e^t + e^t + 12e^t = 12e^t$

$y_2'' - y_2' - 12y_2$
$= (6e^{4t} - e^t)'' - (6e^{4t} - e^t)' - 12(6e^{4t} - e^t)$
$= (96e^{4t} - e^t) - (24e^{4t} - e^t) - 72e^{4t} + 12e^t = 12e^t$

$y_3'' - y_3' - 12y_3 = (6e^{4t})'' - (6e^{4t})' - 12(6e^{4t})$
$= 96e^{4t} - 24e^{4t} - 72e^{4t} = 0$

35. ομογενείς λύσεις: $\sin\sqrt{2}t$, $\cos\sqrt{2}t$
γενική λύση: $y = c_1\sin\sqrt{2}t + c_2\cos\sqrt{2}t + e^t$

37. ομογενείς λύσεις: $e^{\frac{3}{2}t}\sin 4t$, $e^{\frac{3}{2}t}\cos 4t$
γενική λύση: $y = c_1e^{\frac{3}{2}t}\sin 4t + c_2e^{\frac{3}{2}t}\cos 4t + 100t + 48$

39. $y = 4\cos 3t$ **41.** $y = -e^{5t} - 2e^{-4t}$

43. $y = \frac{1}{16}e^{4t} + \frac{1}{16}e^{-4t} - t^2 - \frac{1}{8}$ **45.** $y = \frac{3}{4}t^{-2} + \frac{1}{4}t^2$

47. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος

49. $y'' - 12y' + 36y = (c_1e^{6t} + c_2te^{6t} + t^2e^{6t})''$
$-12(c_1e^{6t} + c_2te^{6t} + t^2e^{6t})' + 36(c_1e^{6t} + c_2te^{6t} + t^2e^{6t})$
$= (36c_1e^{6t} + 12c_2e^{6t} + 36c_2te^{6t} + 2e^{6t} + 24te^{6t} + 36t^2e^{6t})$
$- 12(6c_1e^{6t} + c_2e^{6t} + 6c_2te^{6t} + 2te^{6t} + 6t^2e^{6t})$
$+ 36(c_1e^{6t} + c_2te^{6t} + t^2e^{6t})$
$= (36 - 72 + 36)c_1e^{6t} + (12 - 12)c_2e^{6t} + (36 - 72 + 36)c_2te^{6t}$
$+ 2e^{6t} + (24 - 24)te^{6t} + (36 - 72 + 36)t^2e^{6t}$
$= 2e^{6t}$

51. $t^2y'' - 3ty' + 4y$
$= t^2(c_1t^2 + c_2t^2\ln t)'' - 3t(c_1t^2 + c_2t^2\ln t)' + 4(c_1t^2 + c_2t^2\ln t)$
$= t^2(2c_1 + 3c_2 + 2c_2\ln t) - 3t(2c_1t + c_2t + 2c_2t\ln t)$
$+ 4(c_1t^2 + c_2t^2\ln t) = (2c_1 + 3c_2 - 6c_1 - 3c_2 + 4c_1)t^2$
$+(2c_2 - 6c_2 + 4c_2)t^2\ln t$
$= 0$

53. $t^2y'' + ty' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y$
$= t^2(c_1t^{-1/2}\cos t + c_2t^{-1/2}\sin t)'' + t(c_1t^{-1/2}\cos t + c_2t^{-1/2}\sin t)'$
$+ \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)(c_1t^{-1/2}\cos t + c_2t^{-1/2}\sin t)$
$= t^2\left(\frac{3}{4}c_1t^{-5/2}\cos t + \frac{3}{4}c_2t^{-5/2}\sin t - c_2t^{-3/2}\cos t + c_1t^{-3/2}\sin t\right.$
$\left. - c_1t^{-1/2}\cos t - c_2t^{-1/2}\sin t\right)$
$+ t\left(-c_1t^{-1/2}\sin t + c_2t^{-1/2}\cos t - \frac{1}{2}c_1t^{-3/2}\cos t - \frac{1}{2}c_2t^{-3/2}\sin t\right)$
$+ \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)(c_1t^{-1/2}\cos t + c_2t^{-1/2}\sin t)$

$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)c_1 t^{-1/2}\cos t + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)c_2 t^{-1/2}\sin t$
$+ (-1 + 1)c_2 t^{1/2}\cos t + (1 - 1)c_1 t^{1/2}\sin t$
$+ (-1 + 1)c_1 t^{3/2}\cos t + (-1 + 1)c_2 t^{3/2}\sin t$
$= 0$

55. α. $y'' - y = (e^t)'' - e^t = e^t - e^t = 0$
$y'' - y = (e^{-t})'' - e^{-t} = e^{-t} - e^{-t} = 0$
Οι συναρτήσεις δεν είναι πολλαπλάσια η μία της άλλης, άρα πρόκειται για γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο λύσεων. **β.** Οι $y = \sinh t$ και $y = \cosh t$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των λύσεων e^{-t} και e^t οπότε πρέπει και οι ίδιες να είναι λύσεις βάσει της Αρχής της υπέρθεσης. Είναι γραμμικά ανεξάρτητες αφού η μια δεν είναι πολλαπλάσιο της άλλης. **γ.** $(\sinh t)' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$ και $(\cosh t)' = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$ άρα $(\sinh t)'' - \sinh t =$
$(\cosh t)' - \sinh t = \sinh t - \sinh t = 0$
$(\cosh t)'' - \cosh t = (\sinh t)' - \cosh t = \cosh t - \cosh t = 0$
δ. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$, $y = c_3 \sinh t + c_4 \cosh t$ **ε.** Για $y = e^{kt}$, $y'' - k^2 y = (e^{kt})'' - k^2 e^{kt} = (ke^{kt})' - k^2 e^{kt} = k^2 e^{kt} - k^2 e^{kt} = 0$. Για $y = e^{kt}$, $y'' - k^2 y = (e^{-kt})'' - k^2 e^{-kt} = (-ke^{-kt})' - k^2 e^{-kt} = k^2 e^{-kt} - k^2 e^{-kt} = 0$. **στ.** $y = c_1 e^{-kt} + c_2 e^{kt}$, $y = c_3 \sinh kt + c_4 \cosh kt$

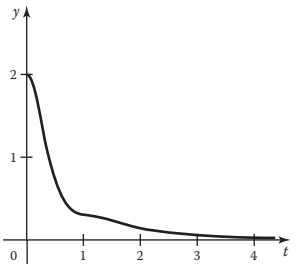
57. $y^{(4)} - 16y$
$= (c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t)^{(4)}$
$- 16(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t)$
$= (16c_1 e^{-2t} + 16c_2 e^{2t} + 16c_3 \sin 2t + 16c_4 \cos 2t)$
$- 16(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t)$
$= 0$

59. α. Από τον Κανόνα της αλυσίδας
$\frac{d}{dt}(y'(t)^2) = 2y'(t)\frac{d}{dt}y'(t) = 2y'(t)y''(t)$
β. $y''y' = 1 \Rightarrow 2y''y' = 2 \Rightarrow (y'(t)^2)' = 2$ χρησιμοποιώντας το μέρος (α).
γ. $(y'(t)^2)' = 2 \Rightarrow y'(t)^2 = \int 2\,dt = 2t + c_1$ άρα $y'(t) = \pm\sqrt{2t + c_1}$ **δ.** Από το μέρος (γ), $y(t) = \int \pm\sqrt{2t + c_1}\,dt =$
$\pm\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}(2t + c_1)^{3/2} + c_2 = c_2 \pm \frac{1}{3}(2t + c_1)^{3/2}$

61. $y = c_1 e^{3t} + c_2 - \frac{4}{3}t$ **63.** $y = -\frac{1}{\sqrt{c_1}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{c_1}} + c_2$
αν $c_1 > 0$; $y = -\frac{1}{2\sqrt{|c_1|}}\ln\left|\frac{t - \sqrt{|c_1|}}{t + \sqrt{|c_1|}}\right| + c_2$ αν $c_1 < 0$

65. α. $y'' + 3y' + \frac{25}{4}y$
$= [e^{-3t/2}(c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t)]'' + 3[e^{-3t/2}(c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t)]'$
$+ \frac{25}{4}[e^{-3t/2}(c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t)]$
$= \left(6c_2 - \frac{7}{4}c_1\right)e^{-3t/2}\sin 2t + \left(-6c_1 - \frac{7}{4}c_2\right)e^{-3t/2}\cos 2t$
$+ \left(-6c_2 - \frac{9}{2}c_1\right)e^{-3t/2}\sin 2t + \left(6c_1 - \frac{9}{2}c_2\right)e^{-3t/2}\cos 2t$
$+ \frac{25}{4}c_1 e^{-3t/2}\sin 2t + \frac{25}{4}c_2 e^{-3t/2}\cos 2t$
$= 0$
β. $y = e^{-3t/2}(3 \sin 2t + 4 \cos 2t)$ **γ.**

67. α. $y'' + 6y' + 25y$
$= [e^{-3t}(c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t)]'' + 6[e^{-3t}(c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t)]'$
$+ 25[e^{-3t}(c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t)]$
$= (24c_2 - 7c_1)e^{-3t}\sin 4t + (-24c_1 - 7c_2)e^{-3t}\cos 4t + e^{-t}$
$+ (-24c_2 - 18c_1)e^{-3t}\sin 4t + (24c_1 - 18c_2)e^{-3t}\cos 4t - 6e^{-t}$
$+ 25c_1 e^{-3t}\sin 4t + 25c_2 e^{-3t}\cos 4t + 25e^{-t}$
$= 20e^{-t}$
β. $y = e^{-3t}(\sin 4t + \cos 4t) + e^{-t}$
γ.



69. α. Από τον Κανόνα της αλυσίδας
$\frac{d}{dt}\varphi(x) = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt} = -F(x)x'(t)$, τότε
$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(x'(t))^2 + \varphi(x)\right] = 2\left(\frac{1}{2}m\right)x'(t)x''(t) - F(x)x'(t)$
$= mx'(t)x''(t) - F(x)x'(t)$
$= x'(t)(mx''(t) - F(x))$
$= x'(t)(0) = 0$
Επειδή $v = x'(t)$, αυτή η σχέση μπορεί να γραφεί
$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2 + \varphi(x)\right] = 0.$
β. Από το μέρος (α), η παράγωγος της $E(t)$ είναι εκ ταυτότητος 0, άρα η $E(t)$ είναι σταθερή.

Ενότητα Δ2.2, σελ. Δ2-23–Δ2-25

1. $y = e^{rt}$
3. Περίπτωση 1: πραγματικές διακεκριμένες ρίζες
Περίπτωση 2: πραγματική διπλή ρίζα
Περίπτωση 3: μιγαδικές ρίζες
5. $y = c_1 e^{rt} + c_2 te^{rt}$ **7.** $y = c_1 e^{-2t}\sin 3t + c_2 e^{-2t}\cos 3t$
9. $y = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{5t}$ **11.** $y = c_1 e^{3t} + c_2$
13. $y = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{2t}$ **15.** $y = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{6t}$. $y = \frac{3}{2}e^{-6t} + \frac{3}{2}e^{6t}$
17. $y = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{6t}$. $y = -\frac{4}{9}e^{-3t} + \frac{4}{9}e^{6t}$
19. $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{5t/2}$. $y = \frac{5}{2}e^{-t/2} + \frac{1}{2}e^{5t/2}$
21. $y = c_1 e^t + c_2 te^t$. $y = 4e^t - 4te^t$
23. $y = c_1 e^{t/2} + c_2 te^{t/2}$. $y = e^{t/2} + \frac{3}{2}te^{t/2}$
25. $y = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}$. $y = e^{-2t} + 2te^{-2t}$
27. $y = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t$. $y = -\frac{8}{3}\sin 3t + 8\cos 3t$
29. $y = c_1 e^t \sin 2t + c_2 e^t \cos 2t$. $y = -e^t \sin 2t + e^t \cos 2t$
31. $y = c_1 e^{-3t}\sin t + c_2 e^{-3t}\cos t$. $y = 6e^{-3t}\sin t$
33. $y = t^{-1} + t$ **35.** $y = \frac{31}{8}t^{-3} + \frac{17}{8}t^5$ **37.** $y = 4t^{-3} - 4t^{-2}$
39. α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

41. $A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\omega t\cos\varphi - A\sin\omega t\sin\varphi$
$= c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t$
$\Rightarrow c_1 = -A\sin\varphi, c_2 = A\cos\varphi$
$\Rightarrow \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{A^2\sin^2\varphi + A^2\cos^2\varphi} = \sqrt{A^2(1)} = A$
$\Rightarrow -\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \tan\varphi$

43. $y = 3\sqrt{2}\sin\left(4t + \dfrac{3\pi}{4}\right)$ **45.** $y = 2\sin\left(2t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

47. $y = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t} + c_3$ **49.** $y = c_1e^{2t} + c_2e^{4t} + c_3$

51. $y = c_1\sin t + c_2\cos t + c_3\sin 2t + c_4\cos 2t$

53. $y = c_1t^{-1} + c_2t^{-1}\ln t$ **55.** $y = c_1t^{-3} + c_2t^{-3}\ln t$

57. $y = c_1t^{-3}\sin(4\ln t) + c_2t^{-3}\cos(4\ln t)$

59. $y = \sqrt{t}\left(c_1\sin\dfrac{\ln t}{2} + c_2\cos\dfrac{\ln t}{2}\right)$

61. $y = c_1\sin kt + c_2\cos kt + c_3t + c_4$

63. α. Όπως φαίνεται στο κείμενο, η αντίστοιχη δευτεροβάθμια εξίσωση είναι $p^2 + (a-1)p + b = 0$. Αν υπάρχει διπλή ρίζα, η διακρίνουσα στον τύπο της δευτεροβάθμιας είναι 0 και η ρίζα είναι $p = \dfrac{-(a-1) \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{1-a}{2}$. **β.** Αν $y = t^pv(t)$ τότε
$t^2y'' + aty' + by$
$= t^2(t^pv)'' + at(t^pv)' + b(t^pv)$
$= t^2(t^pv'' + 2pt^{p-1}v' + p(p-1)t^{p-2}v) + at(t^pv' + pt^{p-1}v) + bt^pv$
$= t^p[t^2v'' + (2p+a)tv' + (p^2 + (a-1)p + b)v]$
$= t^p[t^2v'' + (1)tv' + (0)v]$ (χρησιμοποιώντας το μέρος (α) και ότι η p ικανοποιεί την $p^2 + (a-1)p + b = 0$)
$= t^p(t^2v'' + tv') = 0$
οπότε $t^2v'' + tv' = 0$.
γ. Αν $w = v'$ τότε $t^2v'' + tv' = 0 \Rightarrow t^2w' + tw = 0$
$\Rightarrow t^2\dfrac{dw}{dt} + tw = 0 \Rightarrow \dfrac{dw}{w} = -\dfrac{dt}{t}$.
Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη έχουμε
$\ln w = -\ln t + c \Rightarrow e^{\ln w} = w = e^{-\ln t + c} = e^ce^{-\ln t} = c_1\left(\dfrac{1}{t}\right)$
άρα $w = \dfrac{c_1}{t}$. **δ.** Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη έχουμε:
$w = v' = \dfrac{c_1}{t} \Rightarrow v = c_1\ln t + c_2$. Τότε $y = t^pv(t) = t^p(c_1\ln t + c_2) = c_1t^p\ln t + c_2t^p$ είναι η γενική λύση.

65. α. Η u έχει την μορφή της γενικής λύσης με $c_1 = \dfrac{1}{r_1 - r_2}$ και $c_2 = -\dfrac{1}{r_1 - r_2}$. **β.** Εφαρμόστε τον κανόνα L'Hôpital λαμβάνοντας την r_1 ως μεταβλητή: $\lim\limits_{r_1\to r_2}\dfrac{e^{r_1t} - e^{r_2t}}{r_1 - r_2} = \lim\limits_{r_1\to r_2}\dfrac{te^{r_1t}}{1} = te^{r_2t}$.
Αν $r_1 = r_2$, οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι e^{r_1t} και te^{r_1t}.

Ενότητα Δ2.3, σελ. Δ2-33–Δ2-34

1. Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, y_1 και y_2, της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Βρείτε μια μερική λύση, y_p, της εξίσωσης. Διαμορφώστε τη γενική λύση $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$.

3. $y_p = Ae^{-4t}$ **5.** $y_p = Ae^{-t}\sin 4t + Be^{-t}\cos 4t$

7. $y_p = (At^2 + Bt + C)e^{-t}$ **9.** $y_p = -\dfrac{2}{9}t - \dfrac{1}{9}$

11. $y_p = -\dfrac{1}{9}t^4 - \dfrac{2}{27}t^3 - \dfrac{1}{18}t^2 - \dfrac{7}{162}t - \dfrac{13}{972}$ **13.** $y_p = \dfrac{1}{3}e^{-2t}$

15. $y_p = -\dfrac{6}{11}e^{-3t}$ **17.** $y_p = -\dfrac{3}{5}\sin 2t$ **19.** $y_p = -\dfrac{1}{5}\sin t - \dfrac{2}{5}\cos t$

21. $y_p = -\dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{1}{4}$ **23.** $y_p = \left(-\dfrac{1}{6}t + \dfrac{1}{72}\right)e^{-t}$

25. $y_p = \dfrac{1}{36}\sin 2t + \dfrac{1}{12}t\cos 2t$

27. $y_p = \left(\dfrac{1}{5}t + \dfrac{13}{50}\right)\sin t - \left(\dfrac{2}{5}t - \dfrac{9}{50}\right)\cos t$ **29.** $y_p = \dfrac{3}{2}te^t$

31. $y_p = -\dfrac{4}{5}te^{-3t}$ **33.** $y_p = 2te^{-2t}$ **35. α.** Λάθος
β. Λάθος **γ.** Σωστό

37. $y = c_1\sin t + c_2\cos t - \dfrac{4}{3}\sin 2t$·
$y = \dfrac{8}{3}\sin t + \cos t - \dfrac{4}{3}\sin 2t$

39. $y = c_1e^{-2t}\sin t + c_2e^{-2t}\cos t + \dfrac{12}{5}$·
$y = -\dfrac{19}{5}e^{-2t}\sin t - \dfrac{7}{5}e^{-2t}\cos t + \dfrac{12}{5}$

41. $y = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t + t\sin 3t$· $y = t\sin 3t$

43. $y_p = -3t^4 - 9t^3 - 63t^2 - 181t - 307$

45. $y_p = \left(-\dfrac{25}{13}t - \dfrac{1550}{1521}\right)e^{-t}\sin 3t + \left(\dfrac{50}{39}t - \dfrac{150}{169}\right)e^{-t}\cos 3t$

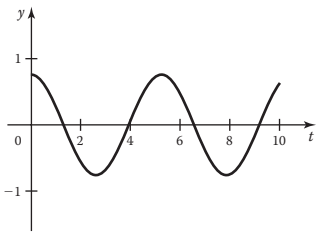
47. $y_p = -e^t$ **49.** $y_p = \left(t - \dfrac{10}{3}\right)e^{2t}$

51. Υποθέτουμε $y_{p1}'' + py_{p1}' + qy_{p1} = f(t)$ και $y_{p2}'' + py_{p2}' + qy_{p2} = g(t)$. Τότε
$(y_{p1} + y_{p2})'' + p(y_{p1} + y_{p2})' + q(y_{p1} + y_{p2})$
$= (y_{p1}'' + y_{p2}'') + p(y_{p1}' + y_{p2}') + q(y_{p1} + y_{p2})$
$= y_{p1}'' + y_{p2}'' + py_{p1}' + py_{p2}' + qy_{p1} + qy_{p2}$
$= (y_{p1}'' + py_{p1}' + qy_{p1}) + (y_{p2}'' + py_{p2}' + qy_{p2})$
$= f(t) + g(t)$

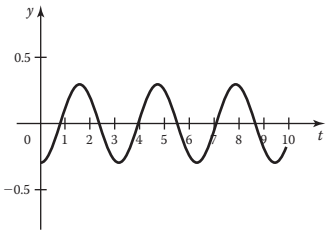
Ενότητα Δ2.4, σελ. Δ2-47–Δ2-52

1. Ένα σύστημα είναι με απόσβεση αν το αντικείμενο που κινείται συναντάει αντίσταση στην κίνηση, διαφορετικά είναι χωρίς απόσβεση. Η κίνηση είναι ελεύθερη αν δεν επενεργούν εξωτερικές δυνάμεις στο αντικείμενο, διαφορετικά η κίνηση είναι εξαναγκασμένη.
3. Διακροτήματα εμφανίζονται όταν η φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) του ταλαντωτή ω_0 είναι περίπου ίση με την τιμή της συχνότητας εξαναγκασμού ω.
5. Βρείτε μια λύση y_h της ομογενούς εξίσωσης. Βρείτε μια μερική λύση y_p, διαμορφώστε την γενική λύση $y_h + y_p$, και βρείτε σταθερές χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες.

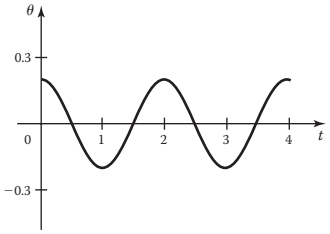
7. $y = 0.75\cos 1.2t$·
περίοδος $= 5\pi/3$



9. $y = -0.3\cos 2t$·
περίοδος $= \pi$

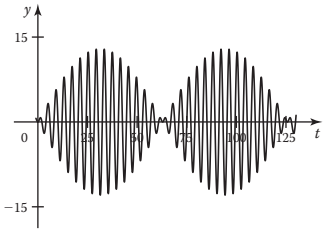


11. $\theta = 0.2\cos\sqrt{10}\,t$· περίοδος $= 2\pi/\sqrt{10}$

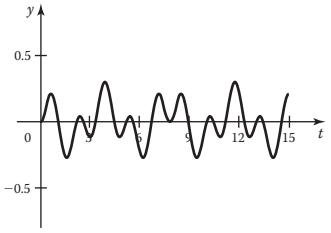


13. α. $\omega = 1.5$: $y = \frac{200}{31}\cos\frac{3}{2}t - \frac{200}{31}\cos\frac{8}{5}t$.

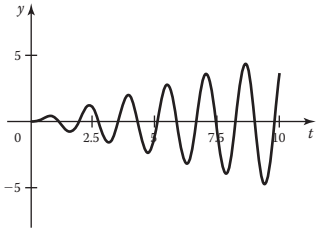
Αυτή η λύση έχει διακροτήματα.



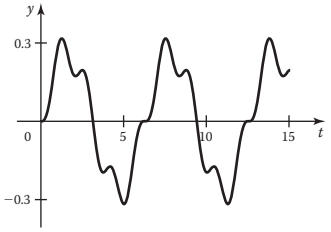
β. $\omega = 4$: $y = \frac{25}{168}\cos\frac{8}{5}t - \frac{25}{168}\cos 4t$



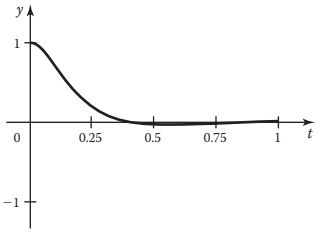
15. α. $\omega = 4$: $y = \frac{1}{8}\sin 4t - \frac{1}{2}t\cos 4t$. Περίπτωση συντονισμού



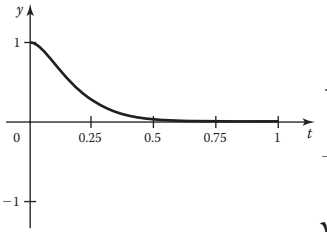
β. $\omega = 1$: $y = \frac{4}{15}\sin t - \frac{1}{15}\sin 4t$



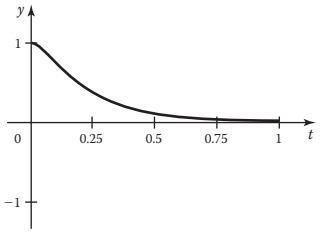
17. α. $y = \frac{4}{3}e^{-8t}\sin 6t + e^{-8t}\cos 6t$· υποκρίσιμη απόσβεση



β. $y = e^{-10t} + 10te^{-10t}$. κρίσιμη απόσβεση

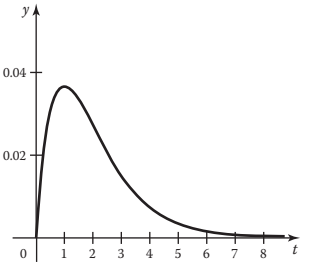


γ. $y = -\frac{1}{3}e^{-20t} + \frac{4}{3}e^{-5t}$· υπερκρίσιμη απόσβεση



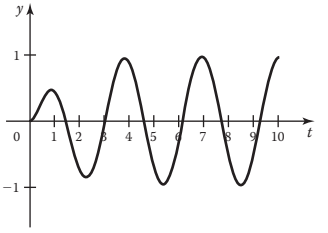
19. α. $k = 250\,\mathrm{N/m}$ **β.** $y = \frac{1}{10}te^{-t}$

γ.



Η μέγιστη απομάκρυνση είναι $\frac{1}{10}e^{-1} \approx 0.037$ m. **δ.** Με μια αύξηση του k κατά 50%, η κίνηση γίνεται με ασθενή απόσβεση, η μέγιστη απομάκρυνση μειώνεται σε 0.034 m. Με μια αύξηση του k κατά 100%, η κίνηση γίνεται με ασθενή απόσβεση, η μέγιστη απομάκρυνση μειώνεται σε 0.032 m. **ε.** Με μια μείωση του k κατά 50%, η κίνηση γίνεται με ταχεία απόσβεση, η μέγιστη απομάκρυνση αυξάνεται σε 0.041 m.

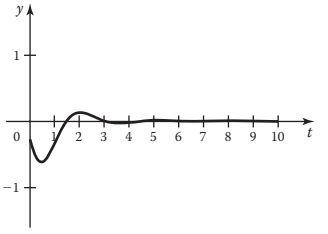
21. α. $y = -\frac{18}{17}e^{-t}\sin 2t - \frac{4}{17}e^{-t}\cos 2t + \frac{16}{17}\sin 2t + \frac{4}{17}\cos 2t$



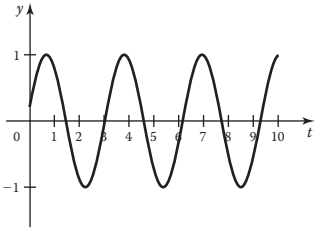
β. μεταβατική λύση: $y = -\frac{18}{17}e^{-t}\sin 2t - \frac{4}{17}e^{-t}\cos 2t$

σταθερή κατάσταση: $y = \frac{16}{17}\sin 2t + \frac{4}{17}\cos 2t$

Μεταβατική λύση



Λύση σταθερής κατάστασης



γ. Μετά από 3 δευτερόλεπτα περίπου.

23. α. $y = c_1e^{-t/2}\sin t + c_2e^{-t/2}\cos t + \frac{32\omega}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25}\sin\omega t$

$$- \frac{32\omega^2 - 40}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25}\cos\omega t$$

β. $y = -\frac{16\omega^2 + 20}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25}e^{-t/2}\sin t + \frac{32\omega^2 - 40}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25}e^{-t/2}\cos t$

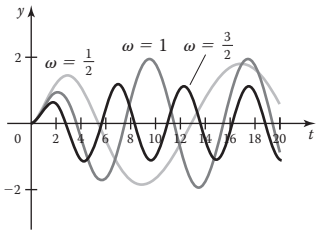
$$+ \frac{32\omega}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25}\sin\omega t - \frac{32\omega^2 - 40}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25}\cos\omega t$$

γ. μεταβατική λύση:

$$y = -\frac{16\omega^2 + 20}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25} e^{-t/2} \sin t$$
$$+ \frac{32\omega^2 - 40}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25} e^{-t/2} \cos t$$

λύση σταθερής κατάστασης:

$$\frac{32\omega}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25} \sin \omega t - \frac{32\omega^2 - 40}{16\omega^4 - 24\omega^2 + 25} \cos \omega t$$



25. Αν $L = 0$, η εξίσωση $LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$; γίνεται $RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$. Λύση είναι $Q = -\frac{1}{20}e^{-20t} + \frac{1}{20}$ και προσεγγίζει μια τιμή της σταθερής κατάστασης $\frac{1}{20}$.

27. α. $y = 50e^{-40t} - 50e^{-60t}$

β. μεταβατικό ρεύμα: $y = 50e^{-40t} - 50e^{-60t}$;

ρεύμα σταθερής κατάστασης: $y = 0$

29. α. $y = \frac{40\sqrt{15}}{3} e^{-80t} \sin 2\sqrt{15}t$ **β.** μεταβατικό ρεύμα:

$y = \frac{40\sqrt{15}}{3} e^{-80t} \sin 2\sqrt{15}t$; ρεύμα σταθερής κατάστασης: $y = 0$

31. $Q = \frac{12}{5} - \frac{4}{5} e^{-4t}(3 \cos 3t + 4 \sin 3t) \cdot I = 20e^{-4t} \sin 3t$

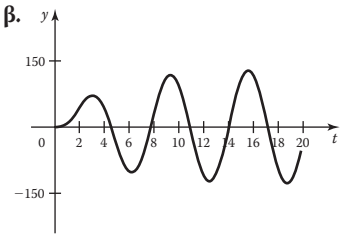
33. α. Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος **στ.** Σωστό

35. α. $y = 16e^{-t/4} \sin t + 128e^{-t/4} \cos t + 16 \sin t - 128 \cos t$

μεταβατική λύση: $y = 16e^{-t/4} \sin t + 128e^{-t/4} \cos t$

λύση σταθερής κατάστασης: $y = 16 \sin t - 128 \cos t$

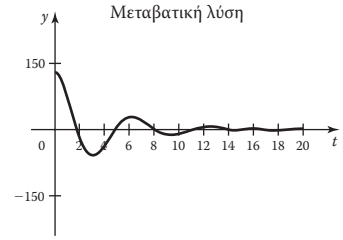
β.

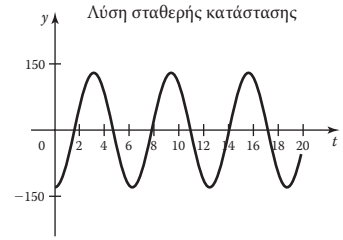


γ. $t = 20 \cdot$ περίπου

$\lim_{t \to \infty} (16e^{-t/4} \sin t + 128e^{-t/4} \cos t)$

$= 0$, άρα η λύση προσεγγίζει την λύση σταθερής κατάστασης.



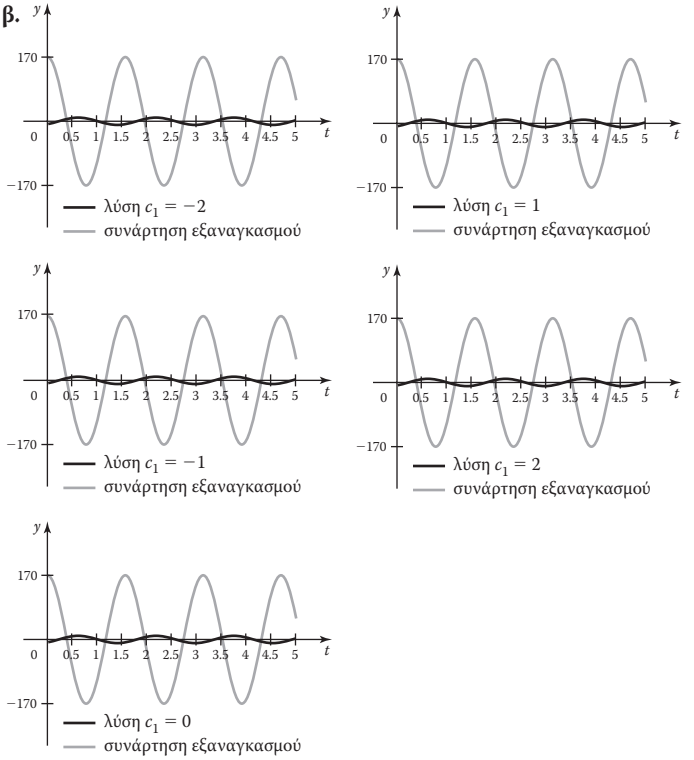


37. α. $y = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + 6 \sin 4t - 7 \cos 4t$

μεταβατική λύση: $y = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$

λύση σταθερής κατάστασης: $y = 6 \sin 4t - 7 \cos 4t$

β.

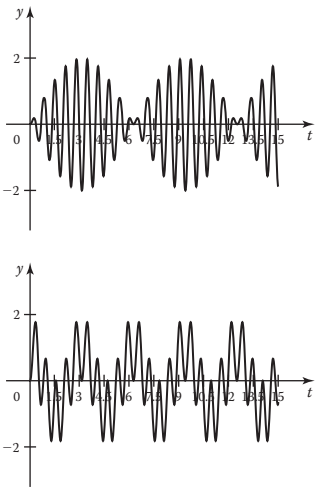


γ. Σε όλες τις περιπτώσεις, η λύση προσεγγίζει γρήγορα την λύση σταθερής κατάστασης. Η λύση σταθερής κατάστασης έχει μικρότερο μέτρο από εκείνο της συνάρτησης εξωτερικής δύναμης και είναι μετατοπισμένη.

39. α. $\cos \omega t - \cos \omega_0 t = 2 \sin\left(\frac{\omega_0 t - \omega t}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_0 t + \omega t}{2}\right)$

$$= 2 \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$$

β.



41. $C^* = \dfrac{F_0}{\sqrt{c^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} = \dfrac{\omega E_0}{\sqrt{R^2\omega^2 + L^2\left(\dfrac{1}{CL} - \omega^2\right)^2}}$

$$= \frac{\omega E_0}{\sqrt{R^2\omega^2 + \omega^2\dfrac{L^2}{\omega^2}\left(\dfrac{1}{CL} - \omega^2\right)^2}}$$

$$= \frac{\omega E_0}{\sqrt{R^2\omega^2 + \omega^2\left(\dfrac{L}{\omega}\left(\dfrac{1}{CL} - \omega^2\right)\right)^2}} = \frac{\omega E_0}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{L}{\omega}\left(\dfrac{1}{CL} - \omega^2\right)\right)^2}}$$

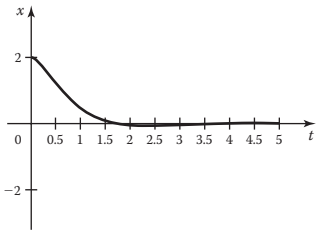
$$= \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}}$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2$ είναι ελάχιστο όταν $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ ή $\omega^2 = \dfrac{1}{CL}$.

43. α. $x = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}\, e^{-3t/2} \sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}t + 2e^{-3t/2}\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}t$

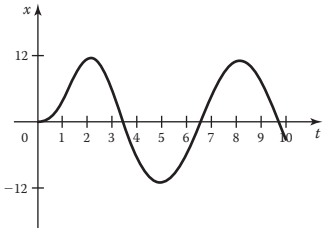
β.



γ. Η κίνηση είναι χωρίς απόσβεση.

45. α. $x = -\dfrac{22}{5}e^{-t/2}\sin 2t + \dfrac{16}{5}e^{-t/2}\cos 2t + \dfrac{52}{5}\sin t - \dfrac{16}{5}\cos t$

β.



γ. Η κίνηση προσεγγίζει τη λύση σταθερής κατάστασης για

$x = \dfrac{52}{5}\sin t - \dfrac{16}{5}\cos t.$

47. α. Επενεργούν δύο δυνάμεις: η αδράνεια που δίνεται από την $ma = ms''(t) = m\ell\theta''(t)$ και το βάρος του βαριδίου. Η συνιστώσα του βάρους στην κατεύθυνση της κίνησης είναι $mg\sin\theta(t)$.
Από τον νόμο του Νεύτωνα, το άθροισμα των δυνάμεων είναι 0 ή $m\ell\theta''(t) + mg\sin\theta(t) = 0 \Rightarrow m\ell\theta''(t) = -mg\sin\theta(t)$.

β. $m\ell\theta''(t) = -mg\sin\theta(t) \Rightarrow \theta''(t) = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta(t)$
$= -\omega_0^2\sin\theta(t)$ ή $\theta'' + \omega_0^2\sin\theta = 0$

γ. Χρησιμοποιώντας $\sin\theta \approx \theta$ στην εξίσωση του (γ) έχουμε

$\theta'' + \omega_0^2\theta = 0.$

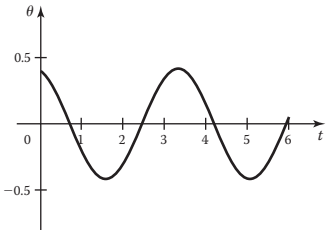
δ. Η συχνότητα δίνεται από την $\omega_0^2 = \dfrac{\ell}{g}$ ή $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

Η περίοδος είναι

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$. Διπλασιάζοντας

το μήκος η περίοδος αυξάνεται κατά έναν παράγοντα $\sqrt{2}$.

49. α. $\theta(t) = -\dfrac{\sqrt{15}}{35}\sin\dfrac{7\sqrt{15}}{15}t + \dfrac{2}{5}\cos\dfrac{7\sqrt{15}}{15}t$

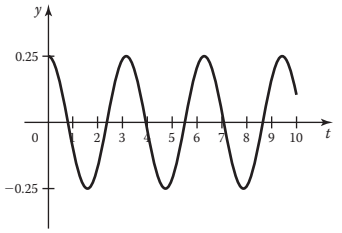


β. $\theta(t) = \dfrac{\sqrt{211}}{35}\sin\left(\dfrac{7\sqrt{15}}{15}t + \varphi\right)$ όπου $\tan\varphi = -\dfrac{14\sqrt{15}}{15}$

ή $\theta(t) \approx 0.415\sin(1.807t + 1.841)$.

γ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3}{9.8}} = 3.476$ sec.

51. α. $y = 0.25\cos 2t$



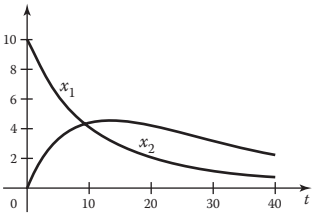
β. $y = 0.25\cos 2t$ **γ.** $T = \pi$

53. α. $x_1' = -k_1x_1 + k_2x_2 + f(t) \Rightarrow x_1'' = -k_1x_1' + k_2x_2' + f'(t)$
$\Rightarrow k_2x_2' = x_1'' + k_1x_1' - f'(t)$. Απαλείφουμε το x_2 από το δοσμένο σύστημα πρώτης τάξης πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση ως προς x_1' επί $(k_2 + k_3)$ και την εξίσωση ως προς x_2' επί k_2 και προσθέτουμε. Αυτό καταλήγει σε
$(k_2 + k_3)x_1' + k_2x_2' = -k_1k_3x_1 + (k_2 + k_3)f(t)$.
Αντικαθιστούμε $k_2x_2' = x_1'' + k_1x_1' - f'(t)$
και λύνουμε ως προς x_1'' παίρνοντας
$x_1'' = -(k_1 + k_2 + k_3)x_1' - k_1k_3x_1 + (k_2 + k_3)f(t) + f'(t)$.
Στη θέση του x_1 θέτουμε x. **β.** Επειδή το x είναι μια άλλη έκφραση του x_1, $x_1(0) = A$ σημαίνει $x(0) = A$.
Χρησιμοποιώντας την πρώτη παράγωγο έχουμε $x'(0) = x_1'(0)$
$= -k_1x_1(0) + k_2x_2(0) + f(0) = -k_1x_1(0) + f(0)$.

55. α. $x_1(t) = 6.59e^{-0.1322t} + 3.41e^{-0.0378t}$

β. $x_2(t) = -10.60e^{-0.1322t} + 10.60e^{-0.0378t}$

γ.

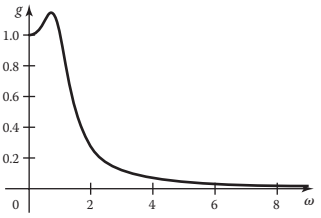


Ενότητα Δ2.5, σελ. Δ2-61–Δ2-63

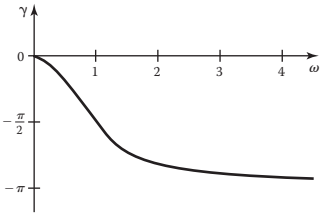
1. $H(\omega) = g(\omega)e^{i\gamma(\omega)}$ **3.** Η συνάρτηση υστέρησης φάσης δίνει την φάση της εξόδου σε σχέση με της εισόδου. Η έξοδος υστερεί της εισόδου.

5. α. $g(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$;

$\tan\gamma(\omega) = \dfrac{\omega}{\omega^2-1}$

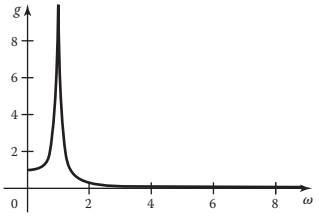


β. Τοπικό μέγιστο της συνάρτησης κέρδους στο $\omega = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ασθενής απόσβεση.

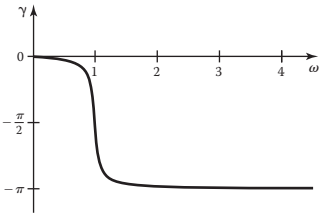


7. α. $g(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\dfrac{\omega^2}{100}}}$;

$\tan\gamma(\omega) = \dfrac{\omega}{10(\omega^2-1)}$



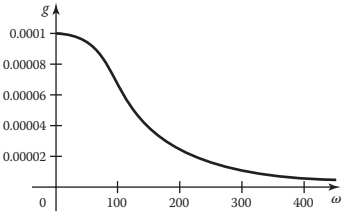
β. Τοπικό μέγιστο της συνάρτησης κέρδους στο $\omega = \dfrac{\sqrt{398}}{20}$.
Ασθενής απόσβεση.

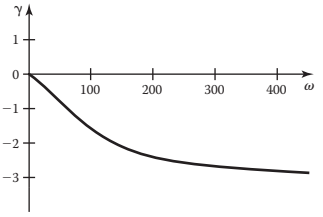


9. α. $g(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(10{,}000-\omega^2)^2+22{,}500\omega^2}}$;

$\tan\gamma(\omega) = \dfrac{150\omega}{\omega^2-10{,}000}$

β. Τοπικό μέγιστο της συνάρτησης κέρδους στο $\omega = 0$.
Ταχεία απόσβεση.



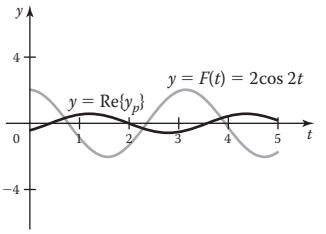


11. α. Βλ. Άσκηση 5α.

β. $\mathrm{Re}\{y_p\} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}\cos\left(2t + \tan^{-1}\dfrac{2}{3} - \pi\right)$

$\approx 0.555\cos(2t - 2.554)$

γ.

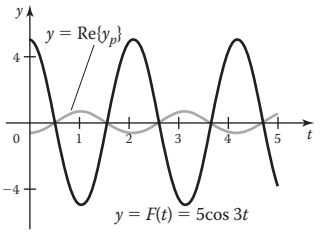


13. α. Βλ. Άσκηση 7α.

β. $\mathrm{Re}\{y_p\} = \dfrac{50}{\sqrt{6409}}\cos\left(3t + \tan^{-1}\dfrac{3}{80} - \pi\right)$

$\approx 0.625\cos(3t - 3.104)$

γ.

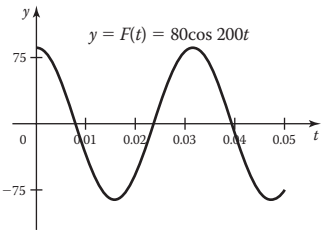


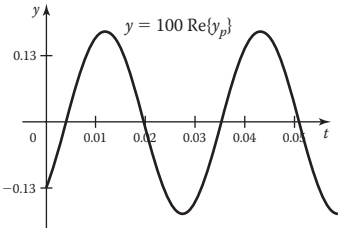
15. α. Βλ. Άσκηση 9α.

β. $\mathrm{Re}\{y_p\} = \dfrac{\sqrt{2}}{750}\cos(200t + \tan^{-1}1 - \pi)$

$\approx 0.00189\cos(200t - 2.356)$

γ.

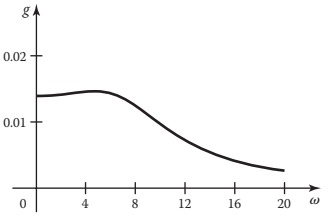




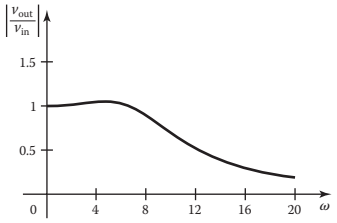
17. α. $g(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(72-\omega^2)^2+100\omega^2}}$

β. Τοπικό μέγιστο της συνάρτησης κέρδους στο $\omega \approx \sqrt{22}$.

γ. $(\sqrt{22}, \infty)$

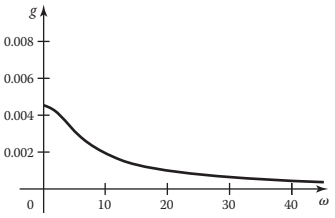


δ. $\left|\dfrac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}\right| = \dfrac{72}{\sqrt{(72 - \omega^2)^2 + 100\omega^2}}$

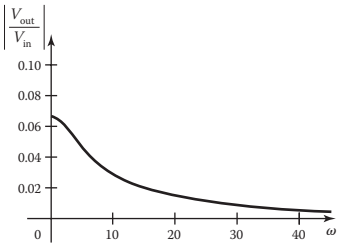


19. α. $g(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(15 - \omega^2)^2 + 2500\omega^2}}$

β. Τοπικό μέγιστο της συνάρτησης κέρδους στο $\omega = 0$. **γ.** $[0, \infty)$



δ. $\left|\dfrac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}\right| = \dfrac{15}{\sqrt{(15 - \omega^2)^2 + 2500\omega^2}}$



21. α. Σωστό **β.** Σωστό

23. α. Με 1 στον παρονομαστή, όσο μικρότερος είναι ο παρονομαστής, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του $g(\omega)$. **β.** Η τετραγωνική ρίζα θα είναι ελάχιστη όταν η υπόριζη ποσότητα γίνει ελάχιστη.

γ. $h'(\omega) = \dfrac{d}{d\omega}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2] = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2b\omega$

$= 2\omega(-2(\omega_0^2 - \omega^2) + b) = 2\omega(b - 2\omega_0^2 + 2\omega^2)$

δ. Από το μέρος (γ), $h'(\omega) = 2\omega(b^2 - 2\omega_0^2 + 2\omega^2)$. Αν $b < \sqrt{2}\omega_0$, τότε η $h'(\omega) = 0$ έχει πραγματική λύση: $b^2 - 2\omega_0^2 + 2\omega^2 = 0$

$\Rightarrow 2\omega^2 = 2\omega_0^2 - b^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{2\omega_0^2 - b^2}{2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{b^2}{2}}$.

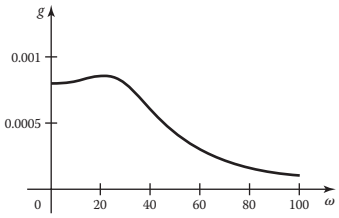
Αυτό δίνει ένα τοπικό ελάχιστο για την *h*, και συνεπώς ένα τοπικό μέγιστο για την *g*, μπορεί να βρεθεί από το Κριτήριο της πρώτης ή της δεύτερης παραγώγου. Το μέγιστο της *g* είναι $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{b^2 + b^2(2\omega_0^2 - b^2)}}$.

ε. Αν $b \geq \sqrt{2}\omega_0$, τότε $b^2 \geq 2\omega_0^2$ και $b^2 - 2\omega_0^2 + 2\omega^2 \geq 0$. Άρα $h'(\omega) = 2\omega(b^2 - 2\omega_0^2 + 2\omega^2) \geq 0$ για $\omega \geq 0$ και η *h* είναι αύξουσα συνάρτηση. Αυτό έπεται ότι η $g = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ είναι φθίνουσα για $\omega \geq 0$ και έτσι έχει ένα τοπικό μέγιστο στο $\omega = 0$.

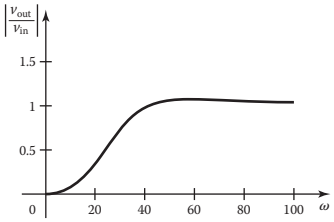
στ. Μέρος (ε). Η συνάρτηση κέρδους μεγιστοποιείται στο 0.

25. α. $g(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega^2 - 1250)^2 + 1600\omega^2}}$

β. Αυξάνει μέχρι $\omega = 15\sqrt{2}$, στη συνέχεια φθίνει.

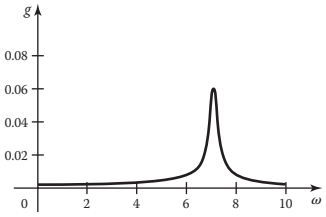


γ. $\left|\dfrac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}\right| = \dfrac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - 1250)^2 + 1600\omega^2}}$

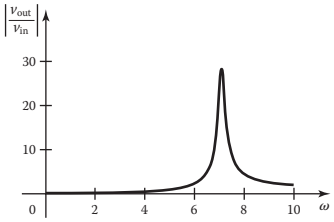


27. α. $g(\omega) = \dfrac{4}{\sqrt{16(\omega^2 - 50)^2 + \omega^2}}$

β. Αυξάνει μέχρι $\omega = \dfrac{\sqrt{3198}}{8} \approx 7.069$, στη συνέχεια φθίνει.



γ. $\left|\dfrac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}\right| = \dfrac{4\omega^2}{\sqrt{16(\omega^2 - 50)^2 + \omega^2}}$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ2 Ασκήσεις επανάληψης, σελ. Δ2-63–Δ2-64

1. α. Σωστό **β.** Λάθος **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

3. $y = c_1e^{-2t} + c_2e^{4t}$ **5.** $y = c_1 \sin 6t + c_2 \cos 6t$

7. $y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$ **9.** $y = c_1e^t \sin 2t + c_2e^t \cos 2t$

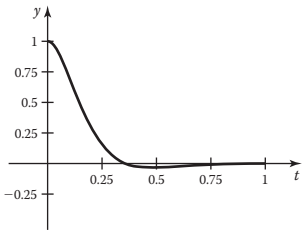
11. $y_p = \dfrac{1}{7}\cos 2t$ **13.** $y_p = -\dfrac{1}{6}t - \dfrac{5}{36} - \dfrac{1}{5}e^{-t}$

15. $y_p = \dfrac{1}{4}t \sin 4t$ **17.** $y = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t - \dfrac{3}{5}\sin 3t$

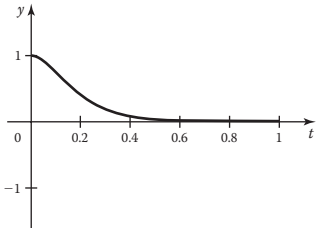
19. $y = c_1e^{-2t} \sin t + c_2e^{-2t} \cos t + \dfrac{1}{4}\sin t + \dfrac{1}{4}\cos t$

21. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{t} + te^{t}$

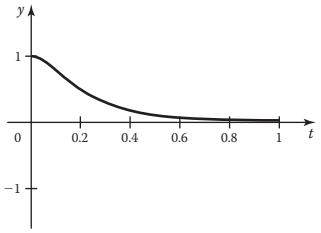
23. α. $y = \frac{3\sqrt{7}}{7}e^{-15t/2}\sin\frac{5\sqrt{7}}{2}t + e^{-15t/2}\cos\frac{5\sqrt{7}}{2}t$· υποκρίσιμη απόσβεση



β. $y = e^{-10t} + 10te^{-10t}$· κρίσιμη απόσβεση



γ. $y = -\frac{1}{3}e^{-20t} + \frac{4}{3}e^{-5t}$· υπερκρίσιμη απόσβεση



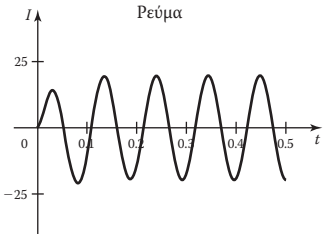
25. α. $I = 50e^{-60t} - \frac{600}{13}e^{-40t} + \frac{250}{13}\sin 60t - \frac{50}{13}\cos 60t$

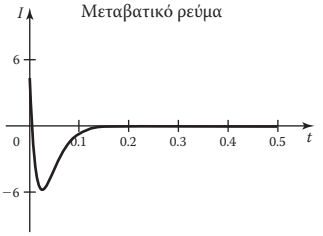
β. Μεταβατικό ρεύμα:

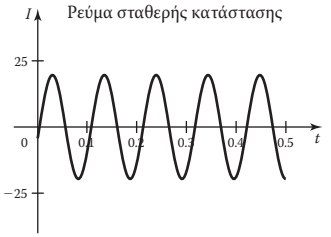
$$I = 50e^{-60t} - \frac{600}{13}e^{-40t}$$

γ. Ρεύμα σταθερής κατάστασης:

$$I = \frac{250}{13}\sin 60t - \frac{50}{13}\cos 60t$$







δ. Οι λύσεις είναι ίδιες.