Δ1

Διαφορικές Εξισώσεις

Προεπισκόπηση κεφαλαίου Αν θέλετε να δείξετε τη χρησιμότητα των μαθηματικών σε κάποιον δύσπιστο, ίσως ο πιο πειστικός τρόπος θα ήταν να αναφέρετε τις *διαφορικές εξισώσεις*. Το τεράστιο αυτό θέμα βρίσκεται στην καρδιά της μαθηματικής μοντελοποίησης και έχει εφαρμογές στη μηχανολογία, στη φυσική, στη χημεία, στη βιολογία, στην οικονομία, στα χρηματοοικονομικά και στις επιστήμες υγείας. Η πληθώρα εφαρμογών τους σε αυτά τα πεδία περιλαμβάνουν την εξέταση της ευστάθειας κτιρίων και γεφυρών, την προσομοίωση των τροχιών πλανητών και δορυφόρων, την περιγραφή χημικών αντιδράσεων, τη μοντελοποίηση πληθυσμών και επιδημιών, την πρόβλεψη του καιρού, τον εντοπισμό κοιτασμάτων πετρελαίου, την πρόβλεψη των χρηματοπιστωτικών αγορών, την παραγωγή ιατρικών απεικονίσεων και την προσομοίωση της επίδρασης των φαρμάκων. Οι διαφορικές εξισώσεις βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στον Απειροστικό Λογισμό και μελετώνται συνήθως σε μαθήματα προχωρημένου επιπέδου. Ωστόσο, έχετε κατανοήσει αρκετά την ύλη του Απειροστικού Λογισμού ώστε να περιηγηθείτε σε αυτό το πλούσιο και δυναμικό αντικείμενο.

Δ1.1 Βασικές έννοιες

Αφού μελετήσατε τις αντιπαραγώγους ή την ταχύτητα και τη μεταβολή κλεισίματος του χρηματιστηρίου, έχετε πάρει μια πρώτη ιδέα των διαφορικών εξισώσεων. Εάν δοθεί η παράγωγος μιας συνάρτησης (μια ταχύτητα, για παράδειγμα), η μελέτη αυτών των θεμάτων έδειχνε πώς να βρεθεί η ίδια η συνάρτηση μέσω της ολοκλήρωσης. Αυτή η διαδικασία ισοδυναμεί με την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης.

Μια διαφορική εξίσωση περιλαμβάνει μια άγνωστη συνάρτηση y και τις παραγώγους της. Ο άγνωστος σε μια διαφορική εξίσωση δεν είναι ένας αριθμός (όπως σε μια αλγεβρική εξίσωση), αλλά μια *συνάρτηση*. Παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων είναι

➤ Συχνές επιλογές για την ανεξάρτητη μεταβλητή σε μια διαφορική εξίσωση είναι τα x και t, με το t να χρησιμοποιείται σε χρονικώς εξαρτώμενα προβλήματα.

$$(\text{Α})\ \frac{dy}{dx} + 4y = \cos x, \quad (\text{Β})\ \frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0, \quad \text{και} \quad (\text{Γ})\ y'(t) = 0.1y(100 - y).$$

Σε κάθε περίπτωση, ο στόχος είναι η εύρεση συναρτήσεων y που ικανοποιούν την εξίσωση. Για να ξεκαθαρίσουμε τι εννοούμε ως λύση, θεωρήστε την εξίσωση (Β). Αν αντικαταστήσουμε σε αυτή την εξίσωση $y = \cos 4x$ και $y'' = -16\cos 4x$ βρίσκουμε

$$\underbrace{-16\cos 4x}_{y''} + \underbrace{16\cos 4x}_{16y} = 0,$$

που συνεπάγεται ότι η $y = \cos 4x$ είναι μια λύση της εξίσωσης. Θα πρέπει να επαληθεύσετε ότι και η $y = C\cos 4x$ είναι επίσης μια λύση για κάθε πραγματικό αριθμό C (όπως και η $y = C\sin 4x$).

Ας ξεκινήσουμε με μια σύντομη συζήτηση για την ορολογία που σχετίζεται με τις διαφορικές εξισώσεις. Η **τάξη** μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη της υψηλότερης τάξης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Από τις τρεις διαφορικές εξισώσεις που δόθηκαν πιο πάνω, οι (Α) και (Γ) είναι πρώτης τάξης και η (Β) δεύτερης τάξης. Μια διαφορική εξίσωση λέγεται **γραμμική** αν η άγνωστη συνάρτηση y και οι παράγωγοί της εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη και δεν είναι σύνθεση άλλων συναρτήσεων. Επιπλέον, μια γραμμική εξίσωση δεν μπορεί να περιέχει γινόμενα ή πηλίκα της y και των παραγώγων της. Από τις προηγούμενες εξισώσεις, οι (Α) και (Β) είναι γραμμικές, αλλά η (Γ) είναι **μη γραμμική** (αφού το δεξί μέλος περιέχει την y^2).

➤ Μια *γραμμική* διαφορική εξίσωση δεν μπορεί να περιέχει όρους όπως y^2, yy', ή $\sin y$, όπου y είναι η άγνωστη συνάρτηση.

Σε αυτό το κεφάλαιο εργαζόμαστε αρχικά με διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Η πιο γενική μορφή μιας **γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης** είναι η

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

όπου p και q είναι δοσμένες συναρτήσεις του x. Παρατηρήστε ότι οι y και y' εμφανίζονται στην πρώτη δύναμη και όχι σε γινόμενα ή συνθέσεις που εμπεριέχουν τις y και y', πράγμα που καθιστά την εξίσωση γραμμική.

Η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης απαιτεί ολοκλήρωση —πρέπει δηλαδή να «αντιπαραγωγίσετε» την y' για να βρείτε την y. Η ολοκλήρωση εισάγει μια αυθαίρετη σταθερά, οπότε η πιο γενική λύση μιας πρώτης τάξης διαφορικής εξίσωσης εμπεριέχει μια αυθαίρετη σταθερά. Παρόμοια, η πιο γενική λύση μιας δεύτερης τάξης διαφορικής εξίσωσης περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές και για την n-οστής τάξης διαφορική εξίσωση, η πιο γενική λύση εμπεριέχει n αυθαίρετες σταθερές. Η πιο γενική οικογένεια συναρτήσεων που επιλύει μια διαφορική εξίσωση, συμπεριλαμβανομένου του κατάλληλου αριθμού αυθαίρετων σταθερών, ονομάζεται (προφανώς) η **γενική λύση**.

➤ Για να κάνουμε τα πράγματα απλά, θα χρησιμοποιούμε την έκφραση *γενική λύση* όταν αναφερόμαστε στην πιο γενική οικογένεια λύσεων κάθε διαφορικής εξίσωσης. Ωστόσο, μερικές μη γραμμικές εξισώσεις μπορεί να έχουν μεμονωμένες λύσεις που δεν περιέχονται σε αυτή την οικογένεια λύσεων. Για παράδειγμα, θα πρέπει να παρατηρήσετε ότι για πραγματικούς αριθμούς C, οι εξισώσεις $y = 1/(C - t)$ ικανοποιούν την εξίσωση $y'(t) = y^2$. Συνεπώς, αποκαλούμε την $y = 1/(C - t)$ ως τη γενική λύση της εξίσωσης, έστω και αν δεν περιέχει την λύση $y = 0$.

Μια διαφορική εξίσωση συνοδεύεται συχνά από τις **αρχικές συνθήκες** που προσδιορίζουν τις τιμές της y, πιθανώς και των παραγώγων της σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Γενικά, μια εξίσωση n-οστής τάξης απαιτεί n αρχικές συνθήκες, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των n αυθαίρετων σταθερών στη γενική λύση. Μια διαφορική εξίσωση, μαζί με τον κατάλληλο αριθμό αρχικών συνθηκών, ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών**. Ένα τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$y'(t) = f(t, y) \quad \text{Διαφορική εξίσωση όπου δίνεται η } F$$
$$y(0) = A. \quad \text{Αρχική συνθήκη όπου δίνεται η } A$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Επαλήθευση λύσεων** Η διαδικασία της εκθετικής αύξησης (για παράδειγμα, κυτταρικοί πληθυσμοί και τραπεζικοί λογαριασμοί) περιέχουν συναρτήσεις της μορφής $y(t) = Ce^{kt}$, όπου C και $k > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Δείξτε με αντικατάσταση ότι η συνάρτηση $y(t) = Ce^{2.5t}$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = 2.5y(t)$, όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

β. Δείξτε με αντικατάσταση ότι η συνάρτηση $y(t) = 3.2e^{2.5t}$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = 2.5y(t) \quad \text{Διαφορική εξίσωση}$$
$$y(0) = 3.2. \quad \text{Αρχική συνθήκη}$$

ΛΥΣΗ

α. Παραγωγίζουμε την $y(t) = Ce^{2.5t}$ και παίρνουμε $y'(t) = 2.5Ce^{2.5t}$. Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση, βρίσκουμε ότι

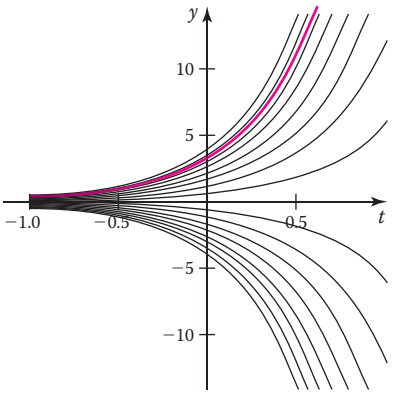
$$y'(t) = \underbrace{2.5Ce^{2.5t}}_{y'(t)} = 2.5\underbrace{Ce^{2.5t}}_{y(t)} = 2.5y(t).$$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $y(t) = Ce^{2.5t}$ ικανοποιεί την εξίσωση $y'(t) = 2.5y(t)$, για κάθε τιμή του C. Συνεπώς, η $y(t) = Ce^{2.5t}$ είναι μια οικογένεια λύσεων της διαφορικής εξίσωσης.

➤ Ο όρος *αρχική συνθήκη* προέρχεται από εξισώσεις στις οποίες η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο *χρόνος*. Σε τέτοια προβλήματα, η αρχική κατάσταση (για παράδειγμα, θέση και ταχύτητα) προσδιορίζονται σε κάποιον αρχικό χρόνο (συχνά $t = 0$).

β. Από το μέρος (α) με $C = 3.2$, η συνάρτηση $y(t) = 3.2e^{2.5t}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $y'(t) = 2.5y(t)$. Μπορούμε επίσης να επαληθεύσουμε ότι αυτή συνάρτηση ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 3.2$:

$$y(0) = 3.2e^{2.5\cdot 0} = 3.2 \cdot e^0 = 3.2.$$



Σχήμα Δ1.1

Συνεπώς η $y(t) = 3.2e^{2.5t}$ είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. Το Σχήμα Δ1.1 δείχνει την γενική λύση ως μια οικογένεια καμπυλών με μερικές διαφορετικές τιμές της σταθεράς C. Δείχνει επίσης με κόκκινη επισήμανση τη συνάρτηση $y(t) = 3.2e^{2.5t}$, η οποία αποτελεί τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

Σχετικές ασκήσεις 7–14 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Γενικές λύσεις** Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων.

α. $y'(t) = 5\cos t + 6\sin 3t$

β. $y''(t) = 10t^3 - 144t^7 + 12t$

ΛΥΣΗ

α. Η λύση της εξίσωσης αποτελείται από τις αντιπαραγώγους της $5\cos t + 6\sin 3t$. Παίρνοντας τα αόριστα ολοκληρώματα των δύο μελών της εξίσωσης, έχουμε

$$\int y'(t)\,dt = \int (5\cos t + 6\sin 3t)\,dt \qquad \text{Ολοκλήρωση των δύο μελών ως προς } t$$

$$y(t) = 5\sin t - 2\cos 3t + C, \qquad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Η συνάρτηση $y(t) = 5\sin t - 2\cos 3t + C$ είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

β. Σε αυτή την εξίσωση δεύτερης τάξης, μας δίνεται η $y''(t)$ με ανεξάρτητη μεταβλητή t. Παίρνοντας τα αόριστα ολοκληρώματα των δύο μελών της εξίσωσης, προκύπτει

$$\int y''(t)\,dt = \int (10t^3 - 144t^7 + 12t)\,dt \qquad \text{Ολοκλήρωση των δύο μελών ως προς } t$$

$$y'(t) = \frac{5}{2}t^4 - 18t^8 + 6t^2 + C_1. \qquad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

Ολοκληρώνοντας μία φορά λαμβάνουμε την $y'(t)$ και εισάγουμε μια αυθαίρετη σταθερά που την ονομάζουμε C_1. Ολοκληρώνοντας πάλι:

$$\int y'(t)\,dt = \int \left(\frac{5}{2}t^4 - 18t^8 + 6t^2 + C_1\right) dt \qquad \text{Ολοκλήρωση των δύο μελών ως προς } t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^5 - 2t^9 + 2t^3 + C_1 t + C_2. \qquad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

Αυτή η συνάρτηση που περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές, είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Σχετικές ασκήσεις 15–22 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Ποιες είναι οι τάξεις των εξισώσεων του Παραδείγματος 2; Είναι γραμμικές ή μη γραμμικές; ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 **Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών** Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = 10e^{-t/2}, \quad y(0) = 4, \text{ για } t \geq 0.$$

ΛΥΣΗ Η γενική λύση βρίσκεται παίρνοντας τα αόριστα ολοκληρώματα των δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης ως προς t:

$$\int y'(t)\,dt = \int 10e^{-t/2}\,dt \qquad \text{Ολοκλήρωση των δύο μελών ως προς } t$$

$$y(t) = -20e^{-t/2} + C. \qquad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

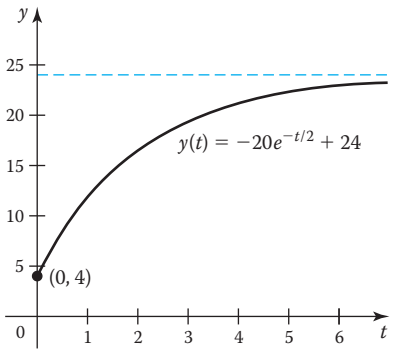
Έχουμε βρει τη γενική λύση η οποία περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά. Για να υπολογίσουμε την τιμή της, χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη θέτοντας στη γενική λύση $t = 0$ και $y = 4$:

$$\underbrace{y(0)}_{4} = -20e^{-0/2} + C = -20 + C,$$

➤ Αν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών εκφράζει ένα σύστημα που εξελίσσεται σε μια χρονική περίοδο (για παράδειγμα, ένας πληθυσμός ή μια τροχιά), τότε η αρχική συνθήκη $y(0) = A$ μας δίνει την αρχική κατάσταση του συστήματος. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η λύση δίνεται μόνο για $t \geq 0$. Γενικότερα, αν δεν ορίζεται ένα συγκεκριμένο διάστημα ενδιαφέροντος, η λύση εκφράζεται συνήθως στο πεδίο ορισμού της λύσης, δηλαδή η αρχική συνθήκη μπορεί να μην εμφανίζεται σε ένα άκρο της καμπύλης της λύσης.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Ποια είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών του Παραδείγματος 3 με αρχική συνθήκη $y(0) = 16$; ➤

η οποία δίνει $4 = -20 + C$ ή $C = 24$. Συνεπώς η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y(t) = -20e^{-t/2} + 24$ (Σχήμα Δ1.2). Θα πρέπει να επαληθεύσετε ότι αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί τόσο την διαφορική εξίσωση όσο και την αρχική συνθήκη.



Σχήμα Δ1.2

Σχετικές ασκήσεις 23–28 ➤

Διαφορικές εξισώσεις στην πράξη

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με τρία παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται στην μοντελοποίηση συγκεκριμένων φυσικών συστημάτων. Είναι χρήσιμο να ξαναδούμε το παράδειγμα της μονοδιάστατης κίνησης σε ένα βαρυτικό πεδίο εφαρμόζοντας την γλώσσα των διαφορικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις στα Παραδείγματα 5 και 6 επανεμφανίζονται αργότερα στο κεφάλαιο όπου δείχνουμε πώς θα λυθούν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 **Κίνηση σε βαρυτικό πεδίο** Μια πέτρα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα v_0 μέτρων/δευτερόλεπτο σε ένα σημείο s_0 μέτρων πάνω από το έδαφος, όπου $v_0 > 0$ και $s_0 \geq 0$. Υποθέτουμε ότι η πέτρα εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ και $s(t)$ είναι η θέση της πέτρας τη χρονική στιγμή $t \geq 0$ (ο θετικός άξονας του s έχει κατεύθυνση προς τα πάνω). Από τον δεύτερο νόμο της κίνησης του Νεύτωνα, υποθέτοντας πως δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα, η θέση της πέτρας εκφράζεται από τη διαφορική εξίσωση $s''(t) = -g$, όπου $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας (με φορά προς τα κάτω).

α. Βρείτε σε κάθε χρονική στιγμή τη θέση $s(t)$ της πέτρας όταν βρίσκεται πάνω από το έδαφος.

β. Σε ποια χρονική στιγμή η πέτρα βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο και ποιο είναι το ύψος της από το έδαφος;

γ. Φτάνει σε υψηλότερο σημείο η πέτρα αν πεταχτεί με $v(0) = v_0 = 39.2\ \mathrm{m/s}$ από το έδαφος ($s_0 = 0$) ή με $v_0 = 19.6\ \mathrm{m/s}$ από ύψος $s_0 = 50\ \mathrm{m}$;

ΛΥΣΗ

α. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης $s''(t) = -9.8$ παίρνουμε την ταχύτητα $v(t)$:

$$\int s''(t)\,dt = -\int 9.8\,dt \qquad \text{Ολοκλήρωση των δύο μελών}$$

$$s'(t) = v(t) = -9.8t + C_1. \qquad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά C_1, χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $v(0) = v_0$, και βρίσκουμε $v(0) = -9.8 \cdot 0 + C_1 = C_1 = v_0$. Άρα $C_1 = v_0$ και η ταχύτητα είναι $v(t) = s'(t) = -9.8t + v_0$.

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης της ταχύτητας παίρνουμε την εξίσωση θέσης:

$$\int s'(t)\,dt = \int (-9.8t + v_0)\,dt \qquad \text{Ολοκλήρωση των δύο μελών}$$

$$s(t) = -4.9t^2 + v_0 t + C_2. \qquad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την αρχική συνθήκη $s(0) = s_0$ για να υπολογίσουμε την C_2, και βρίσκουμε ότι

$$s(0) = -4.9 \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C_2 = C_2 = s_0.$$

Άρα, $C_2 = s_0$ και η συνάρτηση θέσης είναι $s(t) = -4.9t^2 + v_0 t + s_0$, όπου δίνονται τα v_0 και s_0. Αυτή η συνάρτηση ισχύει όταν η πέτρα βρίσκεται στον αέρα. Παρατηρήστε ότι έχουμε λύσει ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για τη θέση της πέτρας.

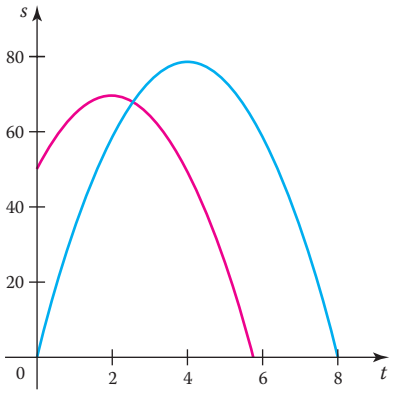
➤ Για να βρούμε τη χρονική στιγμή που η πέτρα φτάνει στο υψηλότερο σημείο, θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε το τοπικό μέγιστο της συνάρτησης θέσης, πράγμα που απαιτεί τη λύση της $s'(t) = v(t) = 0$.

β. Η πέτρα φθάνει στο μέγιστο σημείο της όταν $v(t) = 0$. Λύνοντας την $v(t) = -9.8t + v_0 = 0$, βρίσκουμε ότι φτάνει στο μέγιστο σημείο όταν $t = v_0/9.8$, δευτερόλεπτα. Άρα η θέση του μέγιστου σημείου είναι

$$s_{\max} = s\left(\frac{v_0}{9.8}\right) = -4.9\left(\frac{v_0}{9.8}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{9.8}\right) + s_0 = \frac{v_0^2}{19.6} + s_0.$$

γ. Τώρα είναι θέμα αντικατάστασης των δοσμένων τιμών των s_0 και v_0. Στην πρώτη περίπτωση, με $v_0 = 39.2$ και $s_0 = 0$, έχουμε $s_{\max} = 78.4$ m. Στη δεύτερη περίπτωση, με $v_0 = 19.6$ και $s_0 = 50$, έχουμε $s_{\max} = 69.6$ m. Οι συναρτήσεις θέσης στις δύο περιπτώσεις δίνονται στο Σχήμα Δ1.3. Παρατηρούμε ότι η πέτρα φτάνει σε υψηλότερο σημείο αν $v_0 = 39.2$ και $s_0 = 0$.

Σχετικές ασκήσεις 29–30 ◀



Σχήμα Δ1.3

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Στο Παράδειγμα 4, βρείτε το μέγιστο σημείο που φτάνει η πέτρα αν εκτοξευτεί προς τα πάνω με 9.8 m/s από αρχικό ύψος 100 m. ◀

➤ Οι καμπύλες στο Σχήμα Δ1.3 δεν είναι οι τροχιές των πετρών. Η κίνηση είναι μονοδιάστατη επειδή οι πέτρες κινούνται σε κατακόρυφη ευθεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 **Ένα μοντέλο συγκομιδής**

Ένα απλό μοντέλο συγκομιδής πόρων (για παράδειγμα, ξυλείας ή ψαριών) προϋποθέτει μια σύγκριση μεταξύ της συγκομιδής και της φυσικής ανάπτυξης των πόρων. Αυτή η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί με τη διαφορική εξίσωση

$$\underbrace{p'(t)}_{\text{ρυθμός μεταβολής}} = \underbrace{rp(t)}_{\text{ρυθμός ανάπτυξης πόρων}} - \underbrace{H}_{\text{συγκομιδή}}, \quad \text{για} \quad t \geq 0,$$

όπου $p(t)$ είναι η ποσότητα (ή ο πληθυσμός) των πόρων σε χρόνο $t \geq 0$, $r > 0$ είναι ο ρυθμός ανάπτυξης των πόρων και $H > 0$ ο ρυθμός συγκομιδής. Ορίζεται επίσης μια αρχική συνθήκη $p(0) = p_0$ για να δημιουργηθεί μια αρχική συνθήκη του προβλήματος. Σημειώστε ότι ο ρυθμός μεταβολής $p'(t)$ έχει θετική συμβολή λόγω του ρυθμού ανάπτυξης και αρνητική συμβολή λόγω του όρου συγκομιδή.

α. Για δοσμένες σταθερές p_0, r, και H, επαληθεύστε ότι η συνάρτηση

$$p(t) = \left(p_0 - \frac{H}{r}\right)e^{rt} + \frac{H}{r}$$

είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

β. Έστω ότι $p_0 = 1000$ και $r = 0.1$. Να κάνετε το γράφημα για $H = 50, 90, 130,$ και 170. Περιγράψτε και σχεδιάστε τις τέσσερις καμπύλες.

γ. Ποια τιμή του H δίνει σταθερή τιμή του p, για όλα τα $t \geq 0$;

ΛΥΣΗ

α. Παραγωγίζοντας τη δοσμένη λύση βρίσκουμε

$$p'(t) = \left(p_0 - \frac{H}{r}\right)re^{rt} = (rp_0 - H)e^{rt}.$$

Με απλοποίηση στο δεξί μέλος της διαφορικής εξίσωσης, βρίσκουμε ότι

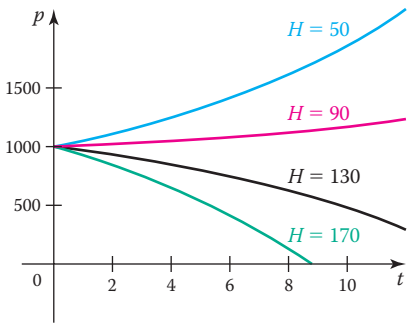
$$rp(t) - H = r\left[\left(p_0 - \frac{H}{r}\right)e^{rt} + \frac{H}{r}\right] - H = (rp_0 - H)e^{rt}.$$

Συνεπώς, το αριστερό και το δεξί μέλος της εξίσωσης $p'(t) = rp(t) - H$ είναι ίσα, άρα η εξίσωση ικανοποιείται από τη δοσμένη συνάρτηση. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι $p(0) = p_0$, πράγμα που σημαίνει ότι το p ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών.

β. Αν θέσουμε $p_0 = 1000$ και $r = 0.1$, η συνάρτηση

$$p(t) = (1000 - 10H)e^{0.1t} + 10H$$

περιγράφεται στο Σχήμα Δ1.4, για $H = 50, 90, 130,$ και 170. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του H ($H = 50$ και $H = 90$), η ποσότητα των πόρων αυξάνει με τον χρόνο. Από την άλλη μεριά, για μεγάλες τιμές του H ($H = 130$ και $H = 170$), η ποσότητα



Σχήμα Δ1.4

των πόρων μειώνεται με τον χρόνο, φθάνοντας τελικά στο μηδέν. Το μοντέλο δείχνει ότι αν ο ρυθμός συγκομιδής είναι πολύ μεγάλος, οι πόροι τελικώς θα μηδενιστούν.

γ. Η λύση

$$p(t) = (1000 - 10H)e^{0.1t} + 10H$$

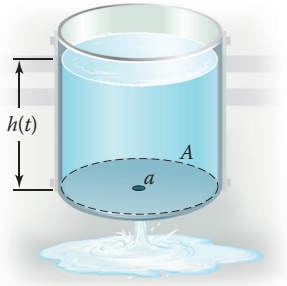
είναι σταθερή (ανεξάρτητη του t) αν $1000 - 10H = 0$ ή $H = 100$. Σε αυτή την περίπτωση, η λύση είναι

$$p(t) = \underbrace{(1000 - 10H)}_{0} e^{0.1t} + 10H = 1000.$$

Συνεπώς, αν ο ρυθμός συγκομιδής είναι $H = 100$, η συγκομιδή εξισώνεται με την φυσική ανάπτυξη των πόρων και η p είναι σταθερή. Η λύση ονομάζεται *λύση ισορροπίας*. Για $H > 100$, η ποσότητα των πόρων μειώνεται με τον χρόνο και για $H < 100$, αυξάνεται με τον χρόνο.

Σχετικές ασκήσεις 31–32 ◀

➤ Ο Evangelista Torricelli ήταν Ιταλός μαθηματικός και φυσικός που έζησε από το 1608 έως το 1647. Σε αυτόν αποδίδεται η εφεύρεση του βαρόμετρου.



Σχήμα Δ1.5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 **Εκροή από δοχείο** Φανταστείτε ένα μεγάλο κυλινδρικό δοχείο με εγκάρσια διατομή επιφάνειας εμβαδού A. Ο πυθμένας του δοχείου έχει μια κυκλική οπή αποστράγγισης εμβαδού A. Υποθέτουμε ότι το δοχείο είναι αρχικά γεμάτο με νερό σε ύψος $h(0) = H$ (Σχήμα Δ1.5). Σύμφωνα με τον νόμο του Torricelli, το ύψος του νερού καθώς χύνεται από το δοχείο, περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$h'(t) = -k\sqrt{h}, \quad \text{όπου } t \geq 0, k = \frac{a}{A}\sqrt{2g},$$

και $g = 9.8\ \text{m/s}^2$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

α. Σύμφωνα με την διαφορική εξίσωση, η h είναι μια αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση του t, για $t \geq 0$;

β. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{kt}{2}\right)^2.$$

γ. Να κάνετε το γράφημα της $H = 1.44\ \text{m}$, $A = 1\ \text{m}^2$, και $a = 0.05\ \text{m}^2$.

δ. Μετά από πόσα δευτερόλεπτα το δοχείο του μέρους (γ) αδειάζει;

ΛΥΣΗ

α. Επειδή $k > 0$, η διαφορική εξίσωση συνεπάγεται ότι $h'(t) < 0$, για $t \geq 0$. Συνεπώς το ύψος του νερού μειώνεται με τον χρόνο, σύμφωνα με το γεγονός ότι το δοχείο αποστραγγίζεται.

β. Εξετάζουμε πρώτα την αρχική συνθήκη. Αντικαθιστώντας $t = 0$ στην προτεινόμενη λύση, παρατηρούμε ότι

$$h(0) = \left(\sqrt{H} - \frac{k \cdot 0}{2}\right)^2 = (\sqrt{H})^2 = H.$$

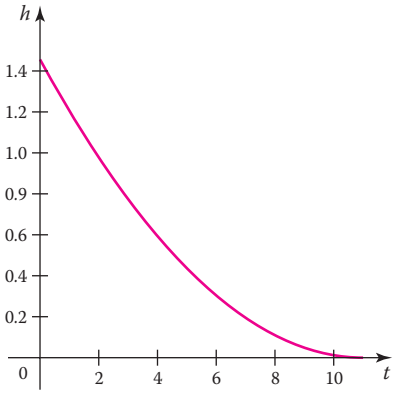
Παραγωγίζοντας την προτεινόμενη λύση έχουμε

$$h'(t) = 2\underbrace{\left(\sqrt{H} - \frac{kt}{2}\right)}_{\sqrt{h(t)}}\left(-\frac{k}{2}\right) = -k\sqrt{h}.$$

Συνεπώς η h ικανοποιεί την αρχική συνθήκη και τη διαφορική εξίσωση.

γ. Με τις δοσμένες τιμές των παραμέτρων,

$$k = \frac{a}{A}\sqrt{2g} = \frac{0.05\ \text{m}^2}{1\ \text{m}^2}\sqrt{2 \cdot 9.8\ \text{m/s}^2} \approx 0.22\ \text{m}^{1/2}/\text{s},$$



Σχήμα Δ1.6

και η λύση γίνεται

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{kt}{2}\right)^2 \approx (\sqrt{1.44} - 0.11t)^2 = (1.2 - 0.11t)^2.$$

Το γράφημα της λύσης (Σχήμα Δ1.6) δείχνει το ύψος του νερού που μειώνεται από $h(0) = 1.44$ στο μηδέν σε περίπου $t \approx 11$ s.

δ. Λύνοντας την εξίσωση

$$h(t) = (1.2 - 0.11t)^2 = 0,$$

βρίσκουμε ότι το δοχείο αδειάζει στη χρονική στιγμή $t \approx 10.9$ s.

Σχετικές ασκήσεις 33–34 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4 Στο Παράδειγμα 6, αν η συνάρτηση του ύψους δίνεται από την $h(t) = (4.2 - 0.14t)^2$, σε ποιο χρόνο αδειάζει το δοχείο; ◄

Τελική σημείωση Σε αυτή την ενότητα βρήκαμε λύσεις σε προβλήματα αρχικών τιμών χωρίς να ενδιαφερθούμε αν υπάρχουν και άλλες λύσεις. Όταν έχουμε βρει μια λύση σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, πώς μπορούμε να σιγουρευτούμε πως δεν υπάρχουν άλλες λύσεις; Γενικότερα, αν δοθεί μας ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, πώς μπορούμε να γνωρίζουμε αν υπάρχει μια λύση και αν είναι μοναδική;

Αυτά τα θεωρητικά ερωτήματα έχουν απάντηση και παρουσιάζονται μέσω ισχυρών *θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας*. Τα θεωρήματα αυτά και οι λύσεις τους είναι εξειδικευμένα και αντιμετωπίζονται σε μαθήματα προχωρημένου επιπέδου. Εδώ παρατίθεται μια άτυπη δήλωση ενός θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας για μια συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων αρχικών τιμών που συναντώνται σε αυτό το κεφάλαιο:

Η λύση του γενικού προβλήματος αρχικών τιμών πρώτης τάξης

$$y'(t) = f(t, y), y(a) = A$$

υπάρχει και είναι μοναδική σε μια περιοχή που περιέχει το σημείο (a, A) με δεδομένο ότι η f είναι μια «καλώς ορισμένη» συνάρτηση σε αυτήν την περιοχή.

Οι τεχνικές δυσκολίες προκύπτουν στον ορισμό της *καλώς ορισμένης* συνάρτησης με όσο το δυνατόν πιο γενικό τρόπο. Τα προβλήματα αρχικών τιμών που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, ικανοποιούν τις συνθήκες αυτού του θεωρήματος και μπορούμε να θεωρήσουμε πως έχουν μοναδικές λύσεις.

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ1.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Ποια είναι η τάξη της $y''(t) + 9y(t) = 10$;

2. Η $y''(t) + 9y(t) = 10$ είναι γραμμική ή μη γραμμική;

3. Πόσες αυθαίρετες σταθερές εμφανίζονται στη γενική λύση της $y''(t) + 9y(t) = 10$;

4. Αν η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι $y(t) = Ce^{-3t} + 10$, ποια είναι η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 5$;

5. Η συνάρτηση $y(t) = 2t$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $y'''(t) + y'(t) = 2$;

6. Η συνάρτηση $y(t) = 6e^{-3t}$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) - 3y(t) = 0, y(0) = 6$;

Βασικές δεξιότητες

7–10. Επαλήθευση γενικών λύσεων *Επαληθεύστε ότι η δοσμένη συνάρτηση y είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης που την ακολουθεί. Θεωρήστε ότι το C είναι μια αυθαίρετη σταθερά.*

7. $y(t) = Ce^{-5t} \cdot\ y'(t) + 5y(t) = 0$

8. $y(t) = Ct^{-3} \cdot\ ty'(t) + 3y(t) = 0$

9. $y(t) = C_1 \sin 4t + C_2 \cos 4t \cdot\ y''(t) + 16y(t) = 0$

10. $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{x} \cdot\ y''(x) - y(x) = 0$

11–14. Επαλήθευση λύσεων σε προβλήματα αρχικών τιμών *Επαληθεύστε ότι η δοσμένη συνάρτηση y είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που την ακολουθεί.*

11. $y(t) = 16e^{2t} - 10 \cdot\ y'(t) - 2y(t) = 20, y(0) = 6$

12. $y(t) = 8t^6 - 3 \cdot\ ty'(t) - 6y(t) = 18, y(1) = 5$

13. $y(t) = -3\cos 3t \cdot\ y''(t) + 9y(t) = 0, y(0) = -3, y'(0) = 0$

14. $y(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) \cdot\ y''(x) - 4y(x) = 0, y(0) = 0,$
$y'(0) = 1$

15–22. Εύρεση γενικών λύσεων *Βρείτε τη γενική λύση κάθε διαφορικής εξίσωσης. Χρησιμοποιήστε τα C, C_1, C_2, . . . για να δηλώσετε αυθαίρετες σταθερές.*

15. $y'(t) = 3 + e^{-2t}$

16. $y'(t) = 12t^5 - 20t^4 + 2 - 6t^{-2}$

17. $y'(x) = 4\tan 2x - 3\cos x$

18. $p'(x) = \dfrac{16}{x^9} - 5 + 14x^6$

19. $y''(t) = 60t^4 - 4 + 12t^{-3}$

20. $y''(t) = 15e^{3t} + \sin 4t$

21. $u''(x) = 55x^9 + 36x^7 - 21x^5 + 10x^{-3}$

22. $v''(x) = xe^x$

23–28. Λύση προβλημάτων αρχικών τιμών *Λύστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών.*

23. $y'(t) = 1 + e^t, y(0) = 4$

24. $y'(t) = \sin t + \cos 2t, y(0) = 4$

25. $y'(x) = 3x^2 - 3x^{-4}, y(1) = 0$

26. $y'(x) = 4\sec^2 2x, y(0) = 8$

27. $y''(t) = 12t - 20t^3, y(0) = 1, y'(0) = 0$

28. $u''(x) = 4e^{2x} - 8e^{-2x}, u(0) = 1, u'(0) = 3$

29–30. Κίνηση σε βαρυτικό πεδίο *Ένα αντικείμενο εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v(0) = v_0$ από μια αρχική θέση $s(0) = s_0$.*

α. *Για τις ακόλουθες τιμές των v_0 και s_0, βρείτε τις συναρτήσεις θέσης και ταχύτητας για όλες τις χρονικές στιγμές που το αντικείμενο βρίσκεται πάνω από το έδαφος.*

β. *Βρείτε τη χρονική στιγμή που βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του και την απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος τότε.*

29. $v_0 = 29.4\ \text{m/s}, s_0 = 30\ \text{m}$

30. $v_0 = 49\ \text{m/s}, s_0 = 60\ \text{m}$

31–32. πότε μηδενίζονται οι πόροι; *Θεωρήστε το πρόβλημα συγκομιδής του Παραδείγματος 5.*

31. Αν $r = 0.05$ και $p_0 = 1500$, για ποιες τιμές του H αυξάνεται η ποσότητα των πόρων; Για ποια τιμή του H η ποσότητα των πόρων είναι σταθερή; Αν $H = 100$, πότε μηδενίζονται οι πόροι;

32. Αν $r = 0.05$ και $H = 500$, για ποιες τιμές του p_0 αυξάνεται η ποσότητα των πόρων; Για ποια τιμή του p_0 η ποσότητα των πόρων είναι σταθερή; Αν $p_0 = 9000$, πότε μηδενίζονται οι πόροι;

T **33–34. Δοχεία αποστράγγισης** *Θεωρήστε το πρόβλημα του δοχείου του Παραδείγματος 6. Για τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων, βρείτε τη συνάρτηση του ύψους του νερού. Στη συνέχεια να δώσετε μια προσεγγιστική τιμή στην οποία το δοχείο αδειάζει για πρώτη φορά και να κάνετε το γράφημα της λύσης.*

33. $H = 1.96\ \text{m}, A = 1.5\ \text{m}^2, a = 0.3\ \text{m}^2$

34. $H = 2.25\ \text{m}, A = 2\ \text{m}^2, a = 0.5\ \text{m}^2$

Περαιτέρω διερευνήσεις

35. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Διερευνήστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια ερμηνεία ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = 1$ είναι $y(t) = t$.

β. Η διαφορική εξίσωση $y''(t) - y(t)y'(t) = 0$ είναι δεύτερης τάξης και γραμμική.

γ. Για να βρείτε τη λύση σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, συνήθως αρχίζετε βρίσκοντας τη γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης.

36–39. Γενικές λύσεις *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων.*

36. $y'(t) = t\ln t + 1$

37. $u'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^2+4}$

38. $v'(t) = \dfrac{4}{t^2-4}$

39. $y''(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$

40–43. Λύση προβλημάτων αρχικών τιμών *Βρείτε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων αρχικών τιμών.*

40. $y'(t) = te^t, y(0) = -1$

41. $u'(x) = \dfrac{1}{x^2+16} - 4, u(0) = 2$

42. $p'(x) = \dfrac{2}{x^2+x}, p(1) = 0$

43. $y''(t) = te^t, y(0) = 0, y'(0) = 1$

44–49. Επαλήθευση γενικών λύσεων *Επαληθεύστε ότι η δοσμένη συναρτήση είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης που την ακολουθεί.*

44. $u(t) = Ce^{1/(4t^4)} \cdot\ u'(t) + \dfrac{1}{t^5}u(t) = 0$

45. $u(t) = C_1e^t + C_2te^t \cdot\ u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 0$

46. $g(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + 2 \cdot\ g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = 8$

47. $u(t) = C_1t^2 + C_2t^3 \cdot\ t^2u''(t) - 4tu'(t) + 6u(t) = 0$

48. $u(t) = C_1t^5 + C_2t^{-4} - t^3 \cdot\ t^2u''(t) - 20u(t) = 14t^3$

49. $z(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-3t} - e^t \cdot$
$z'''(t) + 2z''(t) - 5z'(t) - 6z(t) = 8e^t$

50. Μια εξίσωση δεύτερης τάξης Θεωρήστε τη διαφορική εξίσωση $y''(t) - k^2y(t) = 0$, όπου $k > 0$ είναι πραγματικός αριθμός.

α. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι αν $k = 1$, μια λύση της εξίσωσης είναι η $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Μπορείτε να υποθέσετε ότι αυτή η συνάρτηση είναι η γενική λύση.

β. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι αν $k = 2$, η γενική λύση της εξίσωσης είναι η $y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$.

γ. Δώστε τη γενική λύση της εξίσωσης για τυχαίο $k > 0$ και επαληθεύστε τον ισχυρισμό σας.

δ. Για έναν θετικό πραγματικό αριθμό k, επαληθεύστε ότι η γενική λύση της εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί επίσης με τη μορφή $y(t) = C_1\cosh kt + C_2\sinh kt$, όπου τα cosh και sinh είναι αντιστοίχως το υπερβολικό συνημίτονο και το υπερβολικό ημίτονο.

51. Μια ακόμη εξίσωση δεύτερης τάξης Θεωρήστε τη διαφορική εξίσωση $y''(t) + k^2y(t) = 0$, όπου k είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

α. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι αν $k = 1$, μια λύση της εξίσωσης είναι η $y(t) = C_1\sin t + C_2\cos t$. Μπορείτε να υποθέσετε ότι αυτή η συνάρτηση είναι η γενική λύση.

β. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι αν $k = 2$, η γενική λύση της εξίσωσης είναι η $y(t) = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t$.

γ. Δώστε τη γενική λύση της εξίσωσης για τυχαίο $k > 0$ και επαληθεύστε τον ισχυρισμό σας.

Εφαρμογές

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζονται διάφορα μοντέλα και δίνονται οι λύσεις των σχετικών με αυτές διαφορικών εξισώσεων. Αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο, παραθέτουμε μεθόδους λύσης αυτών των διαφορικών εξισώσεων.

T **52. Έγχυση φαρμάκων** Η ενδοφλέβια λήψη ενός φαρμάκου (ένα αντιβιοτικό) μπορεί να εκφραστεί με τη διαφορική εξίσωση $m'(t) + km(t) = I$, όπου $m(t)$ είναι η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα σε χρόνο $t \geq 0$, k είναι μια σταθερά που περιγράφει τον ρυθμό με τον οποίο απορροφάται το φάρμακο και I είναι ο ρυθμός έγχυσης.

α. Δείξτε με αντικατάσταση ότι αν η αρχική ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα είναι μηδέν ($m(0) = 0$), τότε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $m(t) = \frac{I}{k}(1 - e^{-kt})$.

β. Να κάνετε το γράφημα για $I = 10$ mg/hr και $k = 0.05$ hr^{-1}.

γ. Βρείτε το $\lim_{t\to\infty} m(t)$, το επίπεδο σταθερής τιμής του φαρμάκου και επαληθεύστε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το γράφημα του μέρους (β).

T **53. Λογιστική αύξηση πληθυσμού** Μοντέλα που χρησιμοποιούνται ευρέως για την αύξηση του πληθυσμού, περιλαμβάνουν τη *λογιστική εξίσωση* $P'(t) = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$, όπου $P(t)$ είναι ο πληθυσμός για $t \geq 0$, ενώ $r > 0$ και $K > 0$ είναι δοσμένες σταθερές.

α. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι η γενική λύση της εξίσωσης είναι $P(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}$, όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

β. Βρείτε την τιμή του C που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $P(0) = 50$.

γ. Να κάνετε το γράφημα της λύσης για $P(0) = 50$, $r = 0.1$, και $K = 300$.

δ. Βρείτε το $\lim_{t\to\infty} P(t)$ και επαληθεύστε ότι το αποτέλεσμα συμφωνεί με το γράφημα του μέρους (γ).

T **54. Ελεύθερη πτώση** Ένα μοντέλο που περιγράφει την ελεύθερη πτώση ενός αντικειμένου σε ένα βαρυτικό πεδίο και υπόκειται στην αντίσταση του αέρα, χρησιμοποιεί την εξίσωση $v'(t) = g - bv$, όπου $v(t)$ είναι η ταχύτητα του αντικειμένου για $t \geq 0$, $g = 9.8$ m/s^2 είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και $b > 0$ είναι μια σταθερά που περιέχει τη μάζα του αντικειμένου και την αντίσταση του αέρα.

α. Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι μια λύση της εξίσωσης με αρχική συνθήκη $v(0) = 0$, είναι $v(t) = \frac{g}{b}(1 - e^{-bt})$.

β. Να κάνετε το γράφημα της λύσης με $b = 0.1$ s^{-1}.

γ. Χρησιμοποιώντας το γράφημα του μέρους (γ), υπολογίστε την τελική ταχύτητα $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

T **55. Εξισώσεις ρυθμών εξέλιξης χημικών αντιδράσεων** Η αντίδραση ορισμένων χημικών ενώσεων μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη χρήση μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής $y'(t) = -ky^n(t)$, όπου $y(t)$ είναι η συγκέντρωση της χημικής ένωσης για $t \geq 0$, $k > 0$ είναι μια σταθερά που ορίζει την ταχύτητα της αντίδρασης και n είναι ένας θετικός ακέραιος που ονομάζεται *τάξη* της αντίδρασης. Υποθέτουμε ότι η αρχική συγκέντρωση της χημικής ένωσης είναι $y(0) = y_0 > 0$.

α. Θεωρήστε μια πρώτης τάξης αντίδραση ($n = 1$) και δείξτε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y(t) = y_0 e^{-kt}$.

β. Θεωρήστε μια δεύτερης τάξης αντίδραση ($n = 2$) και δείξτε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y(t) = \frac{y_0}{y_0 kt + 1}$.

γ. Έστω $y_0 = 1$ και $k = 0.1$. Να κάνετε το γράφημα των λύσεων πρώτης και δεύτερης τάξης των (α) και (β) ερωτημάτων. Να συγκρίνετε τις δύο αντιδράσεις.

T **56. Αύξηση όγκου** Η αύξηση των καρκινικών όγκων μπορεί να μοντελοποιηθεί από την εξίσωση όγκων του Gompertz. Έστω $M(t)$ η μάζα του όγκου για $t \geq 0$. Το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών είναι

$$\frac{dM}{dt} = -rM(t) \ln\left(\frac{M(t)}{K}\right), \quad M(0) = M_0,$$

όπου R και K είναι θετικές σταθερές και $0 < M_0 < K$.

α. Δείξτε με αντικατάσταση ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$M(t) = K\left(\frac{M_0}{K}\right)^{\exp(-rt)}.$$

β. Να κάνετε το γράφημα της λύσης για $M_0 = 100$ και $r = 0.05$.

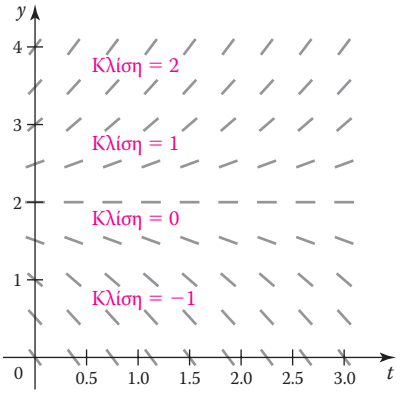
γ. Χρησιμοποιώντας το γράφημα του (β), υπολογίστε το οριακό μέγεθος του όγκου $\lim_{t\to\infty} M(t)$.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Η πρώτη εξίσωση είναι πρώτης τάξης και γραμμική. Η δεύτερη είναι δεύτερης τάξης και γραμμική.
2. $y(t) = -20e^{-t/2} + 36$ **3.** $s_{\max} = 104.9$ m
4. Το δοχείο αδειάζει σε $t = 30$ s. ◄

Δ1.2 Διανυσματικά πεδία και η μέθοδος Euler

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει μεθόδους εύρεσης λύσεων για διάφορα είδη διαφορικών εξισώσεων. Όμως, πριν ασχοληθούμε με αυτό, αφιερώνουμε μερικές σελίδες στη διερεύνηση ενός σημαντικού γεγονότος: Είναι δυνατόν να απεικονίσουμε και να σχεδιάσουμε προσεγγιστικά γραφήματα των λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης χωρίς να την έχουμε λύσει ποτέ; Θα αναρωτηθείτε πώς μπορεί να σχεδιάσει κάποιος το γράφημα μιας συνάρτησης χωρίς να γνωρίζει έναν τύπο γι' αυτήν. Αποδεικνύεται ότι η ίδια η διαφορική εξίσωση περιέχει αρκετές πληροφορίες για να σχεδιάσουμε ακριβή γραφήματα των λύσεων της. Το εργαλείο που κάνει εφικτή αυτή την απεικόνιση και μας επιτρέπει να εξερευνήσουμε τη γεωμετρία μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο* (ή *πεδίο κλίσεων*).



Σχήμα Δ1.7

Διανυσματικά πεδία

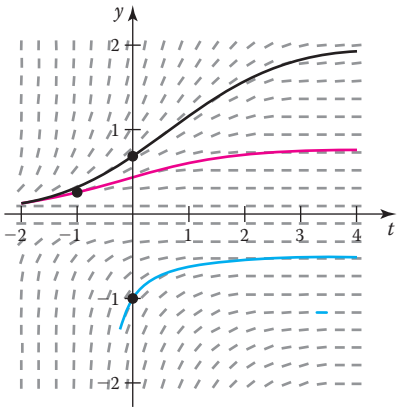
Εργαζόμαστε με διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

όπου ο συμβολισμός $f(t, y)$ δηλώνει μια έκφραση που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή t και/ή την άγνωστη λύση y. Αν μια λύση αυτής της εξίσωσης τοποθετηθεί στο επίπεδο ty, τότε η διαφορική εξίσωση δηλώνει απλώς ότι σε κάθε σημείο (t, y) της καμπύλης της λύσης, η κλίση της καμπύλης είναι $y'(t) = f(t, y)$ (Σχήμα Δ1.7). Ένα **διανυσματικό πεδίο** είναι μια εικόνα που δείχνει την κλίση της λύσης σε επιλεγμένα σημεία του επιπέδου ty.

Για παράδειγμα, θεωρούμε την εξίσωση $y'(t) = f(t, y) = y^2e^{-t}$. Επιλέγουμε ένα κανονικό πλέγμα σημείων στο επίπεδο ty, και σε κάθε σημείο $P(t, y)$ σχεδιάζουμε ένα μικρό ευθύγραμμο τμήμα με κλίση y^2e^{-t}. Το ευθύγραμμο τμήμα σε ένα σημείο P δίνει την κλίση της καμπύλης της λύσης που διέρχεται από το P (Σχήμα Δ1.8). Παρατηρούμε ότι κατά μήκος του άξονα t $(y = 0)$, οι κλίσεις των ευθυγράμμων τμημάτων είναι $f(t, 0) = 0$, που σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα είναι οριζόντια. Κατά μήκος του άξονα y $(t = 0)$, οι κλίσεις των ευθυγράμμων τμημάτων είναι $f(0, y) = y^2$, που σημαίνει ότι οι κλίσεις των ευθυγράμμων τμημάτων αυξάνονται όταν κινούμαστε πάνω ή κάτω στον άξονα y.

Υποθέτουμε τώρα μας δίνεται μια αρχική συνθήκη $y(0) = \frac{2}{3}$. Αρχίζουμε στο σημείο $(0, \frac{2}{3})$ στο επίπεδο ty και σχεδιάζουμε μια καμπύλη που ακολουθεί τη ροή του διανυσματικού πεδίου (μαύρη γραμμή στο Σχήμα Δ1.8). Σε κάθε σημείο της καμπύλης της λύσης, η κλίση ταιριάζει με το διανυσματικό πεδίο. Διαφορετικές αρχικές συνθήκες ($y(-1) = \frac{1}{3}$ και $y(0) = -1$ στο Σχήμα Δ1.8) δίνουν διαφορετικές καμπύλες λύσεις. Το σύνολο των καμπυλών λύσεων για διαφορετικές αρχικές συνθήκες είναι μια παράσταση της γενικής λύσης της εξίσωσης.

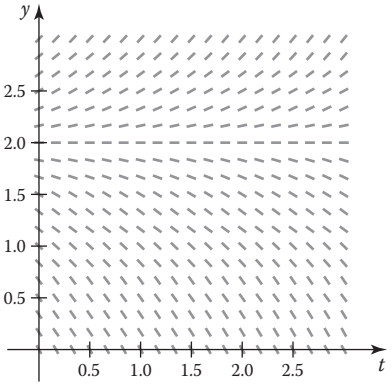


Σχήμα Δ1.8

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Διανυσματικό πεδίο για μια γραμμική διαφορική εξίσωση**

Το Σχήμα Δ1.9 απεικονίζει το διανυσματικό πεδίο για την εξίσωση $y'(t) = y - 2$, για $t \geq 0$ και $y \geq 0$. Για ποιες αρχικές συνθήκες στο σημείο $t = 0$ οι λύσεις είναι σταθερές; Αύξουσες; Φθίνουσες;

➤ Αν η συνάρτηση F στη διαφορική εξίσωση είναι κάπως περίπλοκη, ο σχεδιασμός του διανυσματικού πεδίου με το χέρι (χαρτί και μολύβι)είναι κουραστικός. Είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή ή κάποιο εφαρμογή γραφικών. Στα Παραδείγματα 1 και 2 φαίνονται κάποια βασικά βήματα για τον αξιόπιστο σχεδιασμό με το χέρι (χαρτί και μολύβι) απλών διανυσματικών πεδίων.



Σχήμα Δ1.9

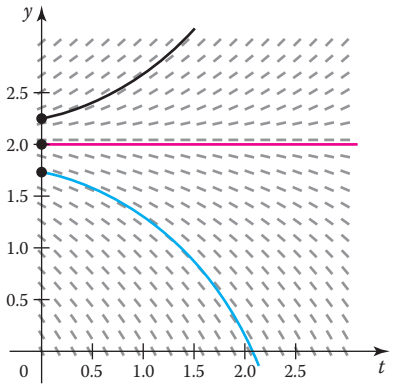
ΛΥΣΗ Το διανυσματικό πεδίο έχει οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα (μηδενική κλίση) για $y = 2$. Συνεπώς $y'(t) = 0$ όταν $y = 2$, για όλα τα $t \geq 0$. Αυτά τα οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα αντιστοιχούν σε μια λύση που είναι σταθερή στον χρόνο, δηλαδή αν η αρχική συνθήκη είναι $y(0) = 2$, τότε η λύση είναι $y(t) = 2$, για όλα τα $t \geq 0$.

Παρατηρούμε επίσης ότι το διανυσματικό πεδίο έχει οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα με θετικές κλίσεις πάνω από την ευθεία για $y = 2$ (με κλίσεις που αυξάνουν όσο απομακρυνόμαστε από την $y = 2$). Άρα $y'(t) > 0$ όταν $y > 2$, οι λύσεις είναι αύξουσες σε αυτή την περιοχή.

Παρομοίως, το διανυσματικό πεδίο έχει οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα με αρνητικές κλίσεις κάτω από την ευθεία για $y = 2$ (με αυξανόμενες αρνητικές κλίσεις όσο απομακρυνόμαστε από την $y = 2$). Άρα, $y'(t) < 0$ όταν $y < 2$, οι λύσεις είναι φθίνουσες σε αυτή την περιοχή.

Συνδυάζοντας αυτές τις παρατηρήσεις, βλέπουμε ότι αν η αρχική συνθήκη ικανοποιεί την $y(0) > 2$, η λύση που προκύπτει είναι αύξουσα για $t \geq 0$. Αν η αρχική συνθήκη ικα-

νοποιεί την $y(0) < 2$, η λύση που προκύπτει είναι φθίνουσα για $t \geq 0$. Στο Σχήμα Δ1.10 φαίνονται οι καμπύλες λύσεων με αρχικές συνθήκες $y(0) = 2.25$, $y(0) = 2$, και $y(0) = 1.75$.



Σχήμα Δ1.10

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Υποθέτοντας ότι οι λύσεις είναι μοναδικές (μια το πολύ καμπύλη λύσης διέρχεται από κάθε σημείο), εξηγήστε γιατί μια καμπύλη λύσης δεν μπορεί να τέμνει την ευθεία $y = 2$ στο Παράδειγμα 1. ◄

Σχετικές ασκήσεις 5–16 ◄

► Μια διαφορική εξίσωση στην οποία η συνάρτηση F είναι ανεξάρτητη του t θα ονομάζεται **αυτόνομη**.

Για μια διαφορική εξίσωση της μορφής $y'(t) = f(y)$ (δηλαδή η συνάρτηση F εξαρτάται μόνο από το y), τα βήματα που έπονται είναι χρήσιμα για τον σχεδιασμό του διανυσματικού πεδίου. Σημειώστε ότι επειδή το διανυσματικό πεδίο εξαρτάται μόνο από το y, έχει την ίδια κλίση ως προς κάθε δοθείσα οριζόντια ευθεία. Σπανίως απαιτείται ένα λεπτομερές διανυσματικό πεδίο. Χρειάζεται να σχεδιάσετε μόνο μερικά ευθύγραμμα τμήματα για να δείξετε σε ποια κατεύθυνση αλλάζει η λύση.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ **Σχεδιασμός διανυσματικού πεδίου με το χέρι για $y'(t) = f(y)$**

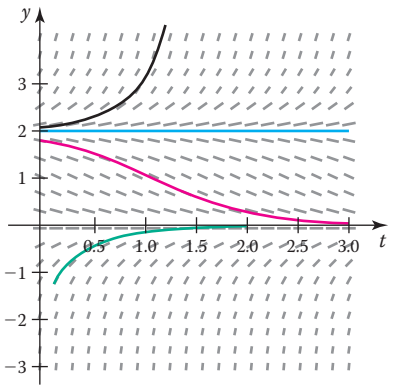
1. Βρίσκουμε τις τιμές του y για τις οποίες $f(y) = 0$. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι $f(a) = 0$. Τότε έχουμε $y'(t) = 0$ όποτε $y = a$, και το διανυσματικό πεδίο σε όλα τα σημεία (t, a) αποτελείται από οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα. Αν η αρχική συνθήκη είναι $y(0) = a$, τότε η λύση είναι $y(t) = a$, για όλα τα $t \geq 0$. Μια τέτοια σταθερή λύση ονομάζεται **λύση ισορροπίας**.
2. Βρίσκουμε τις τιμές του y για τις οποίες $f(y) > 0$. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι $f(b) > 0$. Τότε έχουμε $y'(t) > 0$ όποτε $y = b$. Αυτό σημαίνει ότι το διανυσματικό πεδίο σε όλα τα σημεία (t, b) έχει ευθύγραμμα τμήματα με θετικές κλίσεις και η λύση είναι αύξουσα σε αυτά τα σημεία.
3. Βρίσκουμε τις τιμές του y για τις οποίες $f(y) < 0$. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι $f(c) < 0$. Τότε έχουμε $y'(t) < 0$ όποτε $y = c$. Αυτό σημαίνει ότι το διανυσματικό πεδίο σε όλα τα σημεία (t, c) έχει ευθύγραμμα τμήματα με αρνητικές κλίσεις και η λύση είναι φθίνουσα σε αυτά τα σημεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Διανυσματικό πεδίο για μια απλή μη γραμμική εξίσωση

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $y'(t) = y(y - 2)$, για $t \geq 0$.

α. Για ποιες αρχικές συνθήκες $y(0) = a$ είναι σταθερή λύση που προκύπτει; Αύξουσα; Φθίνουσα;

β. Σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο για την εξίσωση.



Σχήμα Δ1.11

ΛΥΣΗ

α. Ακολουθούμε τα προηγούμενα βήματα.

1. Αν θέσουμε $f(y) = y(y - 2)$, βλέπουμε ότι $f(y) = 0$ όταν $y = 0$ ή $y = 2$. Συνεπώς το διανυσματικό πεδίο έχει οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα $y = 0$ ή $y = 2$. Ως αποτέλεσμα, οι σταθερές συναρτήσεις $y(t) = 0$ και $y(t) = 2$, για $t \geq 0$, είναι λύσεις ισορροπίας (Σχήμα Δ1.11).

2. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(y) = y(y - 2) > 0$ are $y < 0$ ή $y > 2$. Συνεπώς, κάτω από την ευθεία $y = 0$ ή πάνω από την ευθεία $y = 2$, το διανυσματικό πεδίο έχει θετικές κλίσεις και οι λύσεις είναι αύξουσες σε αυτές τις περιοχές.
3. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(y) = y(y - 2) < 0$ είναι $0 < y < 2$. Συνεπώς, μεταξύ των ευθειών $y = 0$ και $y = 2$, το διανυσματικό πεδίο έχει αρνητικές κλίσεις και οι λύσεις είναι φθίνουσες σε αυτή την περιοχή.

β. Το διανυσματικό πεδίο απεικονίζεται στο Σχήμα Δ1.11 με μερικές αντιπροσωπευτικές λύσεις.

Σχετικές ασκήσεις 17–20 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Στο Παράδειγμα 2, αν η αρχική συνθήκη είναι $y(0) = 2.01$, η λύση της εξίσωσης είναι αύξουσα ή φθίνουσα; Είναι αύξουσα ή φθίνουσα αν η αρχική συνθήκη είναι $y(1) = -1$; ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 **Διανυσματικό πεδίο για τη λογιστική εξίσωση** Η λογιστική εξίσωση χρησιμοποιείται συχνά για τη μοντελοποίηση πληθυσμών με σταθερή λύση ισορροπίας (που καλείται *φέρουσα ικανότητα*). Θεωρήστε τη λογιστική εξίσωση

$$\frac{dP}{dt} = 0.1P\left(1 - \frac{P}{300}\right), \text{ για } t \geq 0.$$

α. Σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο της εξίσωσης.

β. Σχεδιάστε τις καμπύλες λύσεων που αντιστοιχούν στην αρχική συνθήκη $P(0) = 50$, $P(0) = 150$, και $P(0) = 350$.

γ. Βρείτε και ερμηνεύστε το $\lim_{t \to \infty} P(t)$.

ΛΥΣΗ

α. Ακολουθούμε τα βήματα του πλαισίου σύνοψης για τον σχεδιασμό με το χέρι του διανυσματικού πεδίου. Επειδή το P εκφράζει πληθυσμό, υποθέτουμε ότι $P \geq 0$.

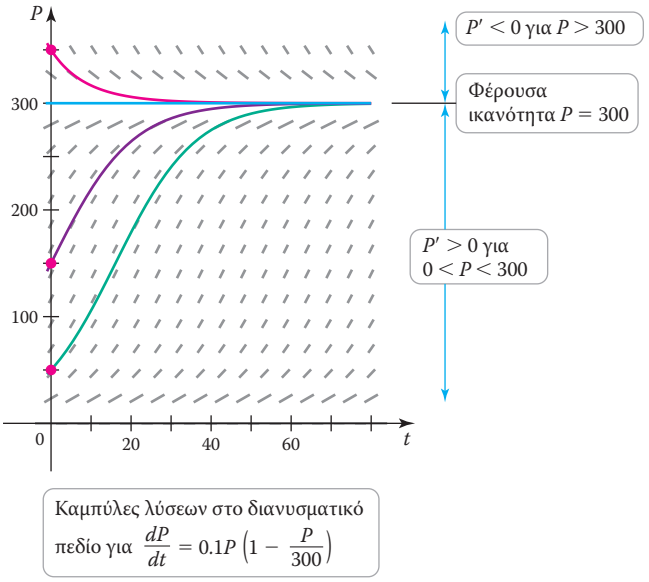
1. Παρατηρήστε ότι $P'(t) = 0$ όταν $P = 0$ ή $P = 300$. Συνεπώς, αν η αρχική συνθήκη είναι $P = 0$ ή $P = 300$, τότε $P'(t) = 0$, για όλα τα $t \geq 0$, και η λύση είναι σταθερή. Γι' αυτόν τον λόγο αναμένεται το διανυσματικό πεδίο να εμφανίσει οριζόντιες ευθείες (με μηδενική κλίση) στα $P = 0$ και $P = 300$.
2. Η εξίσωση συνεπάγεται ότι $P'(t) > 0$ υπό την προϋπόθεση $0 < P < 300$. Άρα το διανυσματικό πεδίο έχει θετικές κλίσεις και οι λύσεις είναι αύξουσες, για $t \geq 0$ και $0 < P < 300$.
3. Η εξίσωση επίσης συνεπάγεται ότι $P'(t) < 0$ υπό την προϋπόθεση $P > 300$ (έχει υποτεθεί $P \geq 0$). Άρα, το διανυσματικό πεδίο έχει αρνητικές κλίσεις και οι λύσεις είναι φθίνουσες, για $t \geq 0$ και $P > 300$.

➤ Οι σταθερές λύσεις $P = 0$ και $P = 300$ είναι λύσεις ισορροπίας. Η λύση $P = 0$ είναι μια λύση *ασταθούς ισορροπίας* επειδή οι γειτονικές καμπύλες λύσεων απομακρύνονται από την $P = 0$. Αντιθέτως, η λύση $P = 300$ είναι μια λύση *ευσταθούς ισορροπίας* επειδή οι γειτονικές καμπύλες λύσεων έλκονται από την $P = 300$.

β. Το Σχήμα Δ1.12 δείχνει το διανυσματικό πεδίο με τρεις καμπύλες λύσεων που αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές αρχικές συνθήκες.

γ. Η οριζόντια ευθεία $P = 300$ αντιστοιχεί στην τιμή της φέρουσας ικανότητας του πληθυσμού. Παρατηρούμε ότι αν ο αρχικός πληθυσμός είμαι μικρότερος του 300, η λύση που προκύπτει αυξάνεται μέχρι την τιμή της φέρουσας ικανότητας από κάτω. Αν ο αρχικός πληθυσμός είμαι μεγαλύτερος του 300, η λύση που προκύπτει είναι μειώνεται μέχρι την τιμή της φέρουσας ικανότητας.

Σχετικές ασκήσεις 21–24 ◄



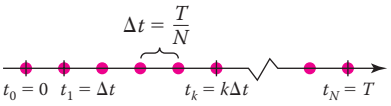
Σχήμα Δ1.12

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Σύμφωνα με το Σχήμα Δ1.12, για ποια προσεγγιστική τιμή του P ο ρυθμός αύξησης της λύσης γίνεται μέγιστος; ◄

Η μέθοδος Euler

Τα διανυσματικά πεδία είναι χρήσιμα για δύο τουλάχιστον λόγους. Όπως αποδείχτηκε σε προηγούμενα παραδείγματα, ένα διανυσματικό πεδίο παρέχει σημαντικές ποιοτικές πληροφορίες για τις λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης *χωρίς να λυθεί η εξίσωση*. Επιπροσθέτως, αποδεικνύεται ότι τα διανυσματικά πεδία αποτελούν τη βάση για πολλές εφαρμογές μέσω υπολογιστών για προσεγγιστικές λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης. Ο υπολογιστής ξεκινά με την αρχική συνθήκη και προωθεί την λύση με μικρά βήματα, ακολουθώντας πάντοτε το διανυσματικό πεδίο σε κάθε βήμα χρόνου. Η απλούστερη μέθοδος που χρησιμοποιεί αυτή την ιδέα ονομάζεται *μέθοδος Euler*.

➤ Ο Euler πρότεινε την μέθοδό του για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων για τις διαφορικές εξισώσεις, 200 χρόνια πριν την ανακάλυψη των ηλεκτρονικών υπολογιστών.



Σχήμα Δ1.13

Υποθέστε πως θέλετε να προσεγγίσετε την λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) = f(t, y)$, $y(0) = A$ σε ένα διάστημα $[0, T]$. Αρχίζουμε διαιρώντας το διάστημα $[0, T]$ σε N **βήματα χρόνου** ίσου μήκους $\Delta t = \frac{T}{N}$. Κάνοντας αυτό, δημιουργούμε ένα σύνολο σημείων πλέγματος (Σχήμα Δ1.13)

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \ldots, t_k = k\Delta t, \ldots, t_N = N\Delta t = T.$$

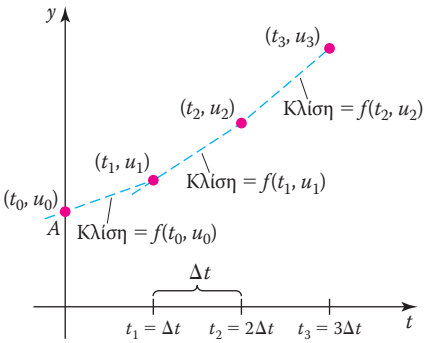
➤ Δείτε την Άσκηση 45 για την εφαρμογή της μεθόδου Euler σε ένα πιο γενικό διάστημα $[a, b]$.

Η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στα σημεία πλέγματος είναι $y(t_k)$, για $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, που είναι γενικώς άγνωστη εκτός αν καταφέρουμε να λύσουμε την αρχική διαφορική εξίσωση. Ο στόχος είναι να υπολογίσουμε ένα σύνολο *προσεγγίσεων* της ακριβούς λύσης στα σημεία πλέγματος, την οποία συμβολίζουμε u_k, για $k = 0, 1, 2, \ldots, N$· δηλαδή $u_k \approx y(t_k)$.

➤ Η συλλογιστική που χρησιμοποιήθηκε για την παραγώγιση του πρώτου βήματος της μεθόδου Euler είναι ουσιαστικά μια εφαρμογή γραμμικής προσέγγισης. Σχεδιάζουμε μια εφαπτομένη στην καμπύλη στο σημείο (t_0, u_0). Το σημείο που αντιστοιχεί σε $t = t_1$ σε αυτή την ευθεία, είναι το (t_1, u_1), όπου u_1 είναι η προσέγγιση Euler της $y(t_1)$.

Η αρχική συνθήκη λέει ότι $u_0 = y(0) = A$ (ακριβώς). Κάνουμε τώρα ένα βήμα χρόνου εμπρός μήκους Δt και υπολογίζουμε μια προσέγγιση u_1 της $y(t_1)$. Η βασική παρατήρηση είναι ότι, σύμφωνα με το διανυσματικό πεδίο, η λύση στο σημείο (t_0, u_0) έχει κλίση $f(t_0, u_0)$. Βρίσκουμε την u_1 από την u_0 σχεδιάζοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα αρχίζοντας από το (t_0, u_0) με οριζόντια επέκταση Δt και κλίση $f(t_0, u_0)$. Το άλλο άκρο του ευθυγράμμου τμήματος είναι (t_1, u_1) (Σχήμα Δ1.14). Εφαρμόζοντας τον τύπο της κλίσης στα δύο σημεία (t_0, u_0) και (t_1, u_1), έχουμε

$$f(t_0, u_0) = \frac{u_1 - u_0}{t_1 - t_0}.$$



Σχήμα Δ1.14

Λύνοντας ως προς u_1 και παρατηρώντας πως $t_1 - t_0 = \Delta t$, έχουμε

$$u_1 = u_0 + f(t_0, u_0)\Delta t.$$

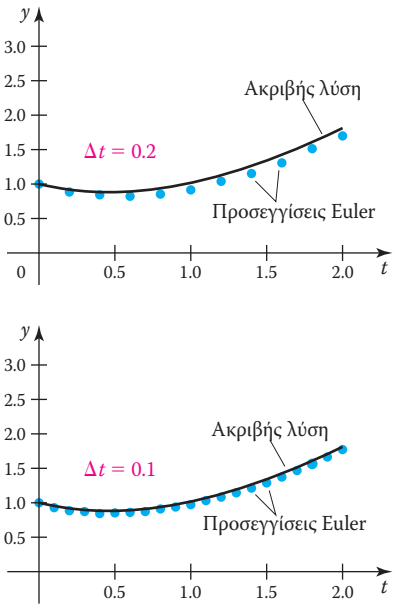
Αυτό το βασικό *βήμα Euler* επαναλαμβάνεται τώρα σε κάθε βήμα χρόνου έως ότου φτάσουμε σε $t = T$. Δηλαδή, έχοντας υπολογίσει την u_1, εφαρμόζουμε την ίδια συλλογιστική για να βρούμε την u_2. Από την u_2, βρίσκουμε την u_3. Γενικά η u_{k+1} υπολογίζεται από την u_k, για $k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$. Οι υπολογισμοί με το χέρι μέσω της μεθόδου Euler γρήγορα γίνονται κουραστικοί. Η μέθοδος εκτελείται συνήθως σε έναν υπολογιστή ή μέσω ενός λογισμικού. Περιλαμβάνεται επίσης σε πολλά λογισμικά πακέτα.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ **Μέθοδος Euler για $y'(t) = f(t, y), y(0) = A$ στο $[0, T]$**

1. Επιλέγουμε είτε ένα βήμα χρόνου Δt ή έναν θετικό ακέραιο N τέτοιον ώστε $\Delta t = \frac{T}{N}$ και $t_k = k\Delta t$, για $k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$.
2. Θέτουμε $u_0 = y(0) = A$.
3. Για $k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$, υπολογίζουμε τις
$$u_{k+1} = u_k + f(t_k, u_k)\Delta t.$$

Κάθε u_k είναι μια προσέγγιση της ακριβούς λύσης $y(t_k)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 **Χρήση της μεθόδου Euler** Βρείτε μια προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) = t - \frac{y}{2}$, $y(0) = 1$, στο διάστημα $[0, 2]$. Χρησιμοποιήστε τα βήματα χρόνου $\Delta t = 0.2$ $(N = 10)$ και $\Delta t = 0.1$ $(N = 20)$. Ποιο βήμα χρόνου δίνει καλύτερη προσέγγιση της ακριβούς λύσης, η οποία είναι $y(t) = 5e^{-t/2} + 2t - 4$;



Σχήμα Δ1.15

ΛΥΣΗ Με βήμα χρόνου $\Delta t = 0.2$, τα σημεία πλέγματος στο διάστημα $[0, 2]$ είναι

$$t_0 = 0.0, t_1 = 0.2, t_2 = 0.4, \ldots, t_{10} = 2.0.$$

Διαπιστώνουμε ότι $f(t, y) = t - \dfrac{y}{2}$, και έστω ότι u_k είναι η προσέγγιση Euler στην $y(t_k)$. Η μέθοδος Euler θα έχει τη μορφή

$$u_0 = y(0) = 1, \quad u_{k+1} = u_k + f(t_k, u_k)\Delta t = u_k + \left(t_k - \frac{u_k}{2}\right)\Delta t,$$

όπου $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Για παράδειγμα η τιμή της προσέγγισης u_1 δίνεται από την

$$u_1 = u_0 + f(t_0, u_0)\Delta t = u_0 + \left(t_0 - \frac{u_0}{2}\right)\Delta t = 1 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)\cdot 0.2 = 0.900,$$

και η τιμή της u_2 δίνεται από την

$$u_2 = u_1 + f(t_1, u_1)\Delta t = u_1 + \left(t_1 - \frac{u_1}{2}\right)\Delta t = 0.9 + \left(0.2 - \frac{0.9}{2}\right)\cdot 0.2 = 0.850.$$

Μια παρόμοια προσέγγιση χρησιμοποιείται με $\Delta t = 0.1$. Στην περίπτωση αυτή χρειάζονται $N = 20$ βήματα χρόνου για να καλύψουν το διάστημα $[0, 2]$. Τα συμπεράσματα των δύο υπολογισμών φαίνονται στο Σχήμα Δ1.15, όπου η ακριβής λύση εμφανίζεται ως συμπαγής καμπύλη και οι προσεγγίσεις Euler εμφανίζονται ως σημεία. Από αυτά τα γραφήματα, γίνεται φανερό πως το βήμα χρόνου $\Delta t = 0.1$ μας δίνει καλύτερες προσεγγίσεις για τη λύση.

Μια πιο λεπτομερής περιγραφή αυτών των υπολογισμών δίνεται στον Πίνακας Δ1.1, όπου εμφανίζονται οι αριθμητικές τιμές των προσεγγίσεων Euler για $\Delta t = 0.2$ και $\Delta t = 0.1$. παρατηρήστε ότι οι προσεγγίσεις με $\Delta t = 0.1$ είναι πινακοποιημένες σε *εναλλασσόμενα* βήματα χρόνου, έτσι ώστε να μπορούν να συγκρίνονται με τις προσεγγίσεις $\Delta t = 0.2$.

Πόσο ακριβείς είναι αυτές οι προσεγγίσεις; Αν και στην πράξη δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο γενικώς, μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τη λύση αυτού του συγκεκριμένου προβλήματος αρχικών τιμών. (Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι η λύση είναι $y(t) = 5e^{-t/2} + 2t - 4$.) Ερευνούμε την ακρίβεια των προσεγγίσεων Euler υπολογίζοντας το *σφάλμα*, $e_k = |u_k - y(t_k)|$, σε κάθε σημείο πλέγματος. Το σφάλμα μετράει απλώς τη διαφορά μεταξύ της ακριβούς λύσης και των αντίστοιχων προσεγγίσεων. Οι δύο τελευταίες στήλες του Πίνακα Δ1.1 δείχνουν τα σφάλματα που σχετίζονται με τις αντίστοιχες προσεγγίσεις. Βλέπουμε πως σε κάθε σημείο του πλέγματος, τα σφάλματα των προσεγγίσεων με $\Delta t = 0.1$ έχουν σχεδόν το μισό μέγεθος των σφαλμάτων με $\Delta t = 0.2$.

Αυτό είναι χαρακτηριστικό της μεθόδου Euler. Αν εστιάσουμε σε ένα σημείο κάθε φορά, υποδιπλασιάζοντας το βήμα χρόνου, υποδιπλασιάζουμε περίπου τα σφάλματα. Όμως όλα έχουν το κόστος τους: Υποδιπλασιάζοντας το βήμα χρόνου, απαιτούνται διπλάσια βήματα χρόνου και διπλάσια υπολογιστική εργασία για να καλυφθεί το ίδιο χρονικό διάστημα.

➤ Επειδή οι υπολογιστές παράγουν μικρά σφάλματα σε κάθε βήμα χρόνου, λαμβάνοντας έναν μεγάλο αριθμό βημάτων χρόνου, οδηγούμαστε σε μια μη αποδεκτή συσσώρευση σφαλμάτων. Όταν απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσετε άλλες μεθόδους που απαιτούν περισσότερη δουλειά ανά βήμα χρόνου, αλλά δίνουν πιο ακριβή αποτελέσματα.

Πίνακας Δ1.1

t_k	$u_k(\Delta t = 0.2)$	$u_k(\Delta t = 0.1)$	$e_k(\Delta t = 0.2)$	$e_k(\Delta t = 0.1)$
0.0	1.000	1.000	0.000	0.000
0.2	0.900	0.913	0.0242	0.0117
0.4	0.850	0.873	0.0437	0.0211
0.6	0.845	0.875	0.0591	0.0286
0.8	0.881	0.917	0.0711	0.0345
1.0	0.952	0.994	0.0802	0.0390
1.2	1.057	1.102	0.0869	0.0423
1.4	1.191	1.238	0.0914	0.0446
1.6	1.352	1.401	0.0943	0.0460
1.8	1.537	1.586	0.0957	0.0468
2.0	1.743	1.792	0.0960	0.0470

Σχετικές ασκήσεις 25–36 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4 Παρατηρήστε πως τα σφάλματα στον Πίνακα Δ1.1 αυξάνουν σε συνάρτηση με το χρόνο και στα δύο βήματα χρόνου. Δώστε μια πιθανή ερμηνεία για αυτή την αύξηση των σφαλμάτων. ◄

Τελική Σημείωση Η μέθοδος Euler είναι η απλούστερη από μια τεράστια συλλογή *αριθμητικών μεθόδων* για προσεγγιστικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων (διδάσκεται συνήθως σε μαθήματα *αριθμητικής ανάλυσης*). Όπως είδαμε η μέθοδος Euler χρησιμοποιεί γραμμική προσέγγιση, δηλαδή η μέθοδος ακολουθεί το διανυσματικό πεδίο με τη χρήση ευθυγράμμων τμημάτων. Αυτή είναι μια καλή ιδέα με την προϋπόθεση ότι το διανυσματικό πεδίο μεταβάλλεται ομαλά και αργά. Σε λιγότερο καλά ορισμένες περιπτώσεις, η μέθοδος Euler μπορεί να συναντήσει δυσκολίες. Πιο ευσταθείς και ακριβείς μέθοδοι κάνουν καλύτερη δουλειά από εκείνη του διανυσματικού πεδίου (για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας παραβολές ή ανωτέρου βαθμού πολυώνυμα αντί της γραμμικής προσέγγισης). Ενώ όμως αυτές οι εκλεπτυσμένες μέθοδοι είναι γενικώς πιο ακριβείς από την μέθοδο Euler, συχνά απαιτούν περισσότερους υπολογισμούς ανά βήμα χρόνου. Όλες οι μέθοδοι, συμπεριλαμβανομένης και της μεθόδου Euler, έχουν την ιδιότητα ότι η ακρίβειά τους βελτιώνεται όσο μικραίνει το βήμα χρόνου. Καταλήγουμε λοιπόν, ότι μπορούμε να επιλέγουμε κατά το δοκούν τη μέθοδο προσέγγισης της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης. Σε κάθε περίπτωση πάντως η μέθοδος Euler αποτελεί μια καλή αφετηρία και μπορεί να αποβεί επαρκής.

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ1.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Εξηγήστε πώς θα σχεδιάσετε το διανυσματικό επίπεδο της εξίσωσης $y'(t) = f(t, y)$, όταν δίνεται η f.

2. Θεωρήστε τη διαφορική εξίσωση $y'(t) = t^2 - 3y^2$ και ότι η καμπύλη της λύσης διέρχεται από το σημείο $(3, 1)$. Ποια είναι η κλίση της καμπύλης στο $(3, 1)$;

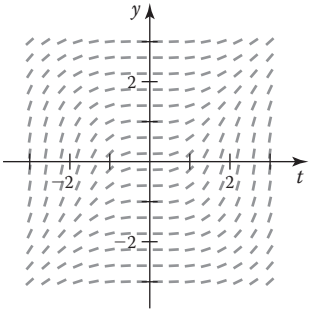
3. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) = t^2 - 3y^2$, $y(3) = 1$. Ποια είναι η προσέγγιση στο $y(3.1)$ που δίνεται από τη μέθοδο Euler με βήμα χρόνου $\Delta t = 0.1$;

4. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου Euler.

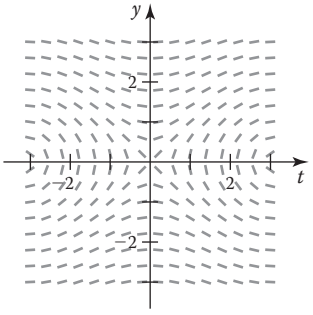
Βασικές δεξιότητες

5–6. Διανυσματικά πεδία *Μια διαφορική εξίσωση και το διανυσματικό πεδίο της φαίνονται στα ακόλουθα σχήματα. Σχεδιάστε ένα γράφημα της καμπύλης λύσης που διέρχεται από τις δοσμένες αρχικές συνθήκες.*

5. $y'(t) = \dfrac{t^2}{y^2 + 1}$, $y(0) = -2$ και $y(-2) = 0$.



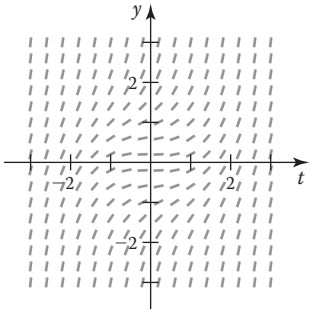
6. $y'(t) = \dfrac{\sin t}{y}$, $y(-2) = -2$ και $y(-2) = 2$



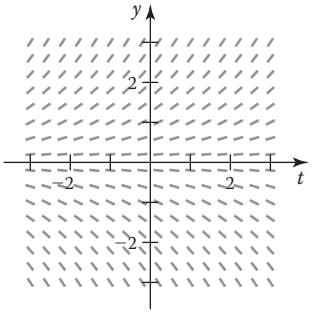
7. Αντιστοίχιση διανυσματικών πεδίων Αντιστοιχίστε τις εξισώσεις α–δ στα διανυσματικά πεδία Α–Δ.

α. $y'(t) = \dfrac{t}{2}$ **β.** $y'(t) = \dfrac{y}{2}$

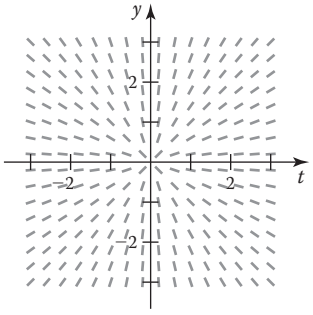
γ. $y'(t) = \dfrac{t^2 + y^2}{2}$ **δ.** $y'(t) = \dfrac{y}{t}$



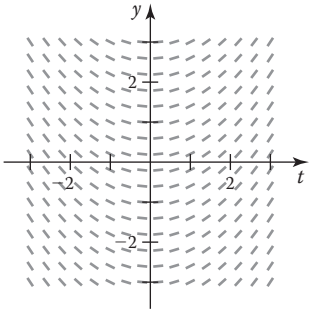
(A)



(B)



(Γ)



(Δ)

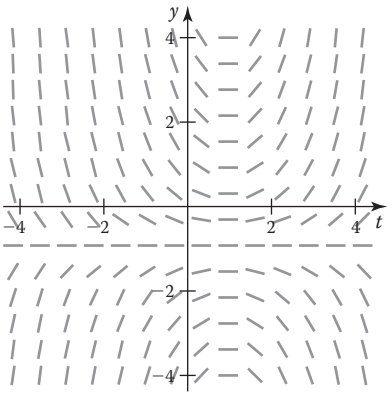
8. Αντιστοίχιση διανυσματικών πεδίων Ποια από τις διαφορικές εξισώσεις α–δ αντιστοιχίζεται στο παρακάτω διανυσματικό πεδίο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

α. $y'(t) = 0.5(y + 1)(t - 1)$

β. $y'(t) = -0.5(y + 1)(t - 1)$

γ. $y'(t) = 0.5(y - 1)(t + 1)$

δ. $y'(t) = -0.5(y - 1)(t + 1)$



T **9–11. Διανυσματικά πεδία με χρήση τεχνολογίας** *Σχεδιάστε ένα διανυσματικό πεδίο για την ακόλουθη διαφορική εξίσωση με χρήσης μιας εφαρμογής γραφικών. Στη συνέχεια βρείτε τις λύσεις που είναι σταθερές και εξετάστε ποιες αρχικές συνθήκες $y(0) = A$ οδηγούν σε λύσεις που είναι χρονικά αύξουσες.*

9. $y'(t) = 0.05(y + 1)^2(t - 1)^2, |t| \le 3$ και $|y| \le 3$

10. $y'(t) = (y - 1)\sin \pi t, \quad 0 \le t \le \pi, 0 \le y \le 2$

11. $y'(t) = t(y - 1), \quad 0 \le t \le 2, 0 \le y \le 2$

12–16. Σχεδιασμός διανυσματικών πεδίων *Στο παράθυρο $[-2, 2] \times [-2, 2]$ σχεδιάστε ένα διανυσματικό πεδίο για τις ακόλουθες εξισώσεις. Μετά σχεδιάστε την καμπύλη της λύσης που αντιστοιχεί στη δοσμένη αρχική συνθήκη. Δεν είναι απαραίτητο το διανυσματικό πεδίο να είναι λεπτομερές.*

12. $y'(t) = y - 3, y(0) = 1$

13. $y'(t) = 4 - y, y(0) = -1$

14. $y'(t) = y(2 - y), y(0) = 1$

15. $y'(x) = \sin x, y(-2) = 2$

16. $y'(x) = \sin y, y(-2) = \frac{1}{2}$

17–20. Αύξουσες και φθίνουσες λύσεις *Θεωρήστε τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις. Δεν είναι απαραίτητο ένα λεπτομερές διανυσματικό πεδίο.*

α. *Βρείτε τις λύσεις που είναι σταθερές για όλα τα $t \ge 0$ (λύσεις ισορροπίας).*
β. *Σε ποιες περιοχές οι λύσεις είναι αύξουσες; Φθίνουσες;*
γ. *Ποιες αρχικές συνθήκες $y(0) = A$ οδηγούν σε λύσεις που είναι χρονικά αύξουσες; Φθίνουσες;*
δ. *Σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο και επαληθεύστε ότι είναι σύμφωνο με τα μέρη (α)–(γ).*

17. $y'(t) = (y - 1)(1 + y)$

18. $y'(t) = (y - 2)(y + 1)$

19. $y'(t) = \cos y$, για $|y| \le \pi$

20. $y'(t) = y(y + 3)(4 - y)$

21–24. Λογιστικές εξισώσεις *Θεωρήστε τις ακόλουθες εξισώσεις για $t \ge 0$. Σε κάθε περίπτωση σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο, την καμπύλη της λύσης για κάθε αρχική συνθήκη και βρείτε τις εξισώσεις ισορροπίας. Δεν είναι απαραίτητο ένα λεπτομερές διανυσματικό πεδίο. Υποθέστε ότι $t \ge 0$ και $P \ge 0$.*

21. $P'(t) = 0.05P\left(1 - \dfrac{P}{500}\right)$. $P(0) = 100, P(0) = 400,$ $P(0) = 700$

22. $P'(t) = 0.1P\left(1 - \dfrac{P}{1200}\right)$. $P(0) = 600, P(0) = 800,$ $P(0) = 1600$

23. $P'(t) = 0.02P\left(4 - \dfrac{P}{800}\right)$. $P(0) = 1600, P(0) = 2400,$ $P(0) = 4000$

24. $P'(t) = 0.05P - 0.001P^2$. $P(0) = 10, P(0) = 40,$ $P(0) = 80$

25–28. Δύο βήματα της μεθόδου Euler *Για τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών, υπολογίστε τις δύο πρώτες προσεγγίσεις u_1 και u_2 που προκύπτουν με τη μέθοδο Euler χρησιμοποιώντας το δοσμένο βήμα χρόνου.*

25. $y'(t) = 2y, y(0) = 2$. $\Delta t = 0.5$

26. $y'(t) = -y, y(0) = -1$. $\Delta t = 0.2$

27. $y'(t) = 2 - y, y(0) = 1$. $\Delta t = 0.1$

28. $y'(t) = t + y, y(0) = 4$. $\Delta t = 0.5$

T **29–32. Σφάλματα στη μέθοδο Euler** *Θεωρήστε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.*

α. *Βρείτε προσεγγίσεις των $y(0.2)$ και $y(0.4)$ με τη μέθοδο Euler με βήματα χρόνου $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05,$ και 0.025.*
β. *Χρησιμοποιώντας την ακριβή λύση που σας δίνεται, υπολογίστε τα σφάλματα στις προσεγγίσεις Euler στα $t = 0.2$ και $t = 0.4$.*
γ. *Ποιο βήμα χρόνου εξασφαλίζει την πιο ακριβή προσέγγιση; Αιτιολογήστε τις παρατηρήσεις σας.*
δ. *Γενικά, ο υποδιπλασιασμός του βήματος χρόνου πώς επηρεάζει το σφάλμα στα $t = 0.2$ και $t = 0.4$;*

29. $y'(t) = -y, y(0) = 1$. $y(t) = e^{-t}$

30. $y'(t) = \dfrac{y}{2}, y(0) = 2$. $y(t) = 2e^{t/2}$

31. $y'(t) = 4 - y, y(0) = 3$. $y(t) = 4 - e^{-t}$

32. $y'(t) = 2t + 1, y(0) = 0$. $y(t) = t^2 + t$

T **33–36. Υπολογισμός προσεγγίσεων Euler** *Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή ή εφαρμογή υπολογιστή για τα επόμενα βήματα.*

α. *Προσεγγίστε την τιμή της $y(T)$ με τη μέθοδο Euler με το δοσμένο βήμα χρόνου στο διάστημα $[0, T]$.*
β. *Χρησιμοποιώντας την ακριβή λύση (που επίσης δίνεται) βρείτε το σφάλμα στην προσέγγιση της $y(T)$ (μόνο στο δεξί άκρο του χρονικού διαστήματος).*
γ. *Επαναλαμβάνοντας τα μέρη (α) και (β) χρησιμοποιώντας το μισό βήμα χρόνου που χρησιμοποιήθηκε σε εκείνους τους υπολογισμούς, βρείτε πάλι μια προσέγγιση της $y(T)$.*
δ. *Να συγκρίνετε τα σφάλματα των προσεγγίσεων της $y(T)$.*

33. $y'(t) = -2y, y(0) = 1$. $\Delta t = 0.2, T = 2$. $y(t) = e^{-2t}$

34. $y'(t) = 6 - 2y, y(0) = -1$. $\Delta t = 0.2, T = 3$. $y(t) = 3 - 4e^{-2t}$

35. $y'(t) = t - y, y(0) = 4 \cdot \Delta t = 0.2, T = 4 \cdot$
$y(t) = 5e^{-t} + t - 1$

36. $y'(t) = \dfrac{t}{y}, y(0) = 4 \cdot \Delta t = 0.1, T = 2 \cdot y(t) = \sqrt{t^2 + 16}$

Περαιτέρω διερευνήσεις

37. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Εξετάστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια ερμηνεία ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Ένα διανυσματικό πεδίο δίνει την δυνατότητα απεικόνισης της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης, αλλά δεν δίνει ακριβείς τιμές της λύσης σε συγκεκριμένα σημεία.

β. Η μέθοδος Euler χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ακριβών τιμών της λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών.

38–43. Λύσεις ισορροπίας *Μια διαφορική εξίσωση της μορφής $y'(t) = f(y)$ ονομάζεται* ***αυτόνομη*** *(η συνάρτηση F εξαρτάται μόνο από το y). Η σταθερή συνάρτηση $y = y_0$ είναι μια λύση ισορροπίας της εξίσωσης με την προϋπόθεση $f(y_0) = 0$ (διότι $y'(t) = 0$ και η λύση παραμένει σταθερή για όλα τα t). Παρατηρήστε ότι οι λύσεις ισορροπίας αντιστοιχούν σε οριζόντιες ευθείες στο διανυσματικό πεδίο. Παρατηρήστε επίσης ότι για αυτόνομες εξισώσεις, το διανυσματικό πεδίο είναι ανεξάρτητο του t. Αναλύστε τις δοσμένες εξισώσεις.*

α. *Βρείτε τις λύσεις ισορροπίας.*

β. *Σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο για $t \geq 0$.*

γ. *Σχεδιάστε την καμπύλη της λύσης που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $y(0) = 1$.*

38. $y'(t) = 2y + 4$

39. $y'(t) = 6 - 2y$

40. $y'(t) = y(2 - y)$

41. $y'(t) = y(y - 3)$

42. $y'(t) = \sin y$

43. $y'(t) = y(y - 3)(y + 2)$

44. Ανάλυση διανυσματικού πεδίου Θεωρήστε το πρώτης τάξης πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) = ay + b, y(0) = A$, για $t \geq 0$, όπου a, b, και A είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Εξηγήστε γιατί η $y = -b/a$ είναι μια λύση ισορροπίας και αντιστοιχίστε τη σε μια οριζόντια ευθεία στο διανυσματικό πεδίο.

β. Σχεδιάστε ένα αντιπροσωπευτικό διανυσματικό πεδίο για την περίπτωση όπου $a > 0$. Δείξτε ότι αν $A > -b/a$, τότε η λύση είναι αύξουσα για $t \geq 0$ και αν $A < -b/a$, τότε η λύση είναι φθίνουσα για $t \geq 0$.

γ. Σχεδιάστε ένα αντιπροσωπευτικό διανυσματικό πεδίο για την περίπτωση όπου $a < 0$. Δείξτε ότι αν $A > -b/a$, τότε η λύση είναι φθίνουσα για $t \geq 0$ και αν $A < -b/a$, τότε η λύση είναι αύξουσα για $t \geq 0$.

45. Η μέθοδος Euler σε πιο γενικά πλέγματα Θεωρήστε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y'(t) = f(t, y), y(a) = A$ προσεγγίζεται στο διάστημα $[a, b]$.

α. Αν χρησιμοποιούνται (μαζί με τα άκρα του διαστήματος) $N + 1$ σημεία πλέγματος, ποιο είναι το βήμα χρόνου Δt;

β. Γράψτε το πρώτο βήμα της μεθόδου Euler για τον υπολογισμό της u_1.

γ. Γράψτε το γενικό βήμα της μεθόδου Euler που προκύπτει για $k = 0, 1, \ldots, N - 1$.

Εφαρμογές

46–48. Ανάλυση μοντέλων *Τα ακόλουθα μοντέλα συζητήθηκαν στην Ενότητα Δ1.1 και επανεμφανίζονται σε επόμενες ενότητες του παρόντος κεφαλαίου. Σε κάθε περίπτωση, ολοκληρώστε την ανάλυση που αναφέρεται χρησιμοποιώντας διανυσματικά πεδία.*

46. Έγχυση φαρμάκου Η ενδοφλέβια απορρόφηση ενός φαρμάκου (όπως ένα αντιβιοτικό) μπορεί να εκφραστεί με τη διαφορική εξίσωση $m'(t) + km(t) = I$, όπου $m(t)$ είναι η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα σε $t \geq 0$, k είναι μια σταθερά που περιγράφει τον ρυθμό με τον οποίο απορροφάται το φάρμακο και I είναι ο ρυθμός της έγχυσης. Έστω ότι $I = 10$ mg/hr και $k = 0.05$ hr^{-1}.

α. Σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο για $0 \leq t \leq 100$, $0 \leq y \leq 600$.

β. Ποια είναι η λύση ισορροπίας;

γ. Για ποιες αρχικές τιμές $m(0) = A$ οι λύσεις είναι αύξουσες; Φθίνουσες;

47. Ελεύθερη πτώση Ένα μοντέλο που περιγράφει την ελεύθερη πτώση ενός αντικειμένου σε ένα βαρυτικό πεδίο και υπόκειται στην αντίσταση του αέρα, χρησιμοποιεί την εξίσωση $v'(t) = g - bv$, όπου $v(t)$ είναι η ταχύτητα του αντικειμένου για $t \geq 0$, $g = 9.8$ m/s^2 είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και $b > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται από την μάζα του αντικειμένου και την αντίσταση του αέρα. Έστω $b = 0.1$ s^{-1}.

α. Σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο για $0 \leq t \leq 60$, $0 \leq y \leq 150$.

β. Για ποιες αρχικές τιμές $v(0) = A$ οι λύσεις είναι αύξουσες; Φθίνουσες;

γ. Ποια είναι η λύση ισορροπίας;

48. Εξισώσεις ρυθμών εξέλιξης χημικών αντιδράσεων Θεωρήστε τις εξισώσεις ρυθμών εξέλιξης χημικών αντιδράσεων $y'(t) = -ky(t)$ και $y'(t) = -ky^2(t)$, όπου $y(t)$ είναι η συγκέντρωση της ουσίας για $t \geq 0$ και $k > 0$ είναι μια σταθερά που ορίζει την ταχύτητα της αντίδρασης. Υποθέστε ότι η αρχική συγκέντρωση της χημικής ένωσης είναι $y(0) = y_0 > 0$.

α. Αν $k = 0.3$ να σχεδιάσετε τα διανυσματικά πεδία των δύο εξισώσεων. Ποια είναι η λύση ισορροπίας στις δύο περιπτώσεις;

β. Σύμφωνα με τα διανυσματικά πεδία, ποια αντίδραση προσεγγίζει ταχύτερα την λύση ισορροπίας της;

Πρόσθετες ασκήσεις

49. Σύγκλιση της μεθόδου Euler Υποθέτουμε ότι η μέθοδος Euler εφαρμόζεται στο πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) = ay$, $y(0) = 1$, το οποίο έχει την ακριβή λύση $y(t) = e^{at}$. Στην άσκηση αυτή ονομάζουμε h το βήμα χρόνου (αντί του Δt). Τα σημεία πλέγματος δίνονται από την $t_k = kh$. Έστω u_k η προσέγγιση Euler στην ακριβή λύση $y(t_k)$, για $k = 0, 1, 2, \ldots$.

α. Δείξτε ότι η μέθοδος Euler που εφαρμόζεται σε αυτό το πρόβλημα μπορεί να γραφεί $u_0 = 1$, $u_{k+1} = (1 + ah)u_k$, για $k = 0, 1, 2, \ldots$.

β. Δείξτε με αντικατάσταση ότι η $u_k = (1 + ah)^k$ είναι μια λύση των εξισώσεων του μέρους (α) για $k = 0, 1, 2, \ldots$.

γ. Θυμηθείτε ότι $\lim_{h \to 0} (1 + ah)^{1/h} = e^a$. Με αυτό δεδομένο, δείξτε ότι όσο το χρονικό βήμα τείνει στο μηδέν ($h \to 0$, με $t_k = kh$), οι προσεγγίσεις που δίνονται από τη μέθοδο Euler προσεγγίζουν την ακριβή λύση του προβλήματος αρχικών τιμών, δηλαδή $\lim_{h \to 0} u_k = \lim_{h \to 0} (1 + ah)^k = y(t_k) = e^{at_k}$.

50. Ευστάθεια της μεθόδου Euler Θεωρούμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) = -ay$, $y(0) = 1$, όπου $a > 0$ έχει την ακριβή λύση $y(t) = e^{-at}$, η οποία είναι μια αύξουσα συνάρτηση.

α. Δείξτε ότι η μέθοδος Euler που εφαρμόζεται σε αυτό το πρόβλημα με βήμα χρόνου h μπορεί να γραφεί $u_0 = 1$, $u_{k+1} = (1 - ah)u_k$, για $k = 0, 1, 2, \ldots$.

β. Δείξτε με αντικατάσταση ότι η $u_k = (1 - ah)^k$ είναι μια λύση των εξισώσεων του μέρους (α) για $k = 0, 1, 2, \ldots$.

γ. Εξηγήστε γιατί όσο το k αυξάνει, οι προσεγγίσεις Euler $u_k = (1 - ah)^k$ μειώνονται σε μέγεθος μόνο αν $|1 - ah| < 1$.

δ. Δείξτε ότι η ανισότητα του μέρους (γ) συνεπάγεται ότι το βήμα χρόνου πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $0 < h < \frac{2}{a}$. Αν το βήμα χρόνου δεν ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, τότε η μέθοδος Euler είναι *ασταθής* και παράγει προσεγγίσεις που τελικά αυξάνουν με τον χρόνο.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Για να τμήσει την ευθεία $y = 2$, η λύση πρέπει να έχει κλίση διαφορετική του μηδενός όταν $y = 2$. Όμως σύμφωνα με το διανυσματικό πεδίο μια λύση στην ευθεία $y = 2$ πρέπει να έχει μηδενική κλίση. **2.** Οι λύσεις που προέρχονται από τις δύο αρχικές συνθήκες είναι αύξουσες. **3.** Το διανυσματικό πεδίο φτάνει σε μέγιστο αν $P = 150$. **4.** Κάθε βήμα της μεθόδου Euler δημιουργεί ένα σφάλμα. Με κάθε διαδοχικό βήμα, του υπολογισμού, τα σφάλματα μπορούν να συγκεντρωθούν (ή να πολλαπλασιαστούν). ◄

Δ1.3 Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Ο σχεδιασμός λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης μέσω του διανυσματικού της πεδίου, είναι μια σημαντική τεχνική και δίνει πολλές πληροφορίες για τις λύσεις. Όμως παρά τη σπουδαιότητα που έχουν τα διανυσματικά πεδία δεν παράγουν πραγματικές λύσεις μια διαφορικής εξίσωσης. Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε μεθόδους που οδηγούν σε λύσεις ορισμένων διαφορικών εξισώσεων σε ό,τι αφορά μια αλγεβρική τους έκφραση (ονομάζεται συχνά *αναλυτική λύση*). Οι εξισώσεις που θεωρούμε είναι πρώτης τάξης και ανήκουν στην κατηγορία των *χωριζόμενων μεταβλητών*.

Μέθοδος λύσης

► Αν η εξίσωση έχει τη μορφή $y'(t) = f(t)$ (δηλαδή, το δεξί μέλος εξαρτάται μόνο από το t), τότε η λύση της εξίσωσης απαιτεί την εύρεση της αντιπαραγώγου της F.

Η πιο γενική μορφή διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι $y'(t) = f(t, y)$, όπου $f(t, y)$ είναι μια έκφραση που μπορεί να περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή t και την άγνωστη συνάρτηση y. Έχουμε τη *δυνατότητα* να λύσουμε μια τέτοια εξίσωση αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$g(y)y'(t) = h(t).$$

Στην εξίσωση $g(y)y'(t) = h(t)$, ο παράγοντας $g(y)$ περιέχει μόνο y, και ο $h(t)$ μόνο t; δηλαδή οι μεταβλητές έχουν διαχωριστεί. Μια εξίσωση που μπορεί να γραφεί σε αυτή τη μορφή λέγεται **χωριζόμενων μεταβλητών.**

Γενικώς, λύνουμε μια εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς t:

$$\int g(y)\underbrace{y'(t)\,dt}_{dy} = \int h(t)\,dt \qquad \text{Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη ως προς } t$$

$$\int g(y)\,dy = \int h(t)\,dt. \qquad \text{Αλλαγή μεταβλητών στο αριστερό μέλος: } dy = y'(t)\,dt.$$

Το $dy = y'(t)\,dt$ του δευτέρου μέλους μας αφήνει για υπολογισμό δύο ολοκληρώματα, ένα ως προς y και ένα ως προς t. Η εύρεση της λύσης εξαρτάται από τον υπολογισμό αυτών των ολοκληρωμάτων.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις είναι χωριζόμενων μεταβλητών;

(Α) $y'(t) = y + t$,

(Β) $y'(t) = \dfrac{ty}{t+1}$, και (Γ) $y'(x) = e^{x+y}$ ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Μια εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών** Βρείτε μια συνάρτηση που ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$y'(t) = y^2e^{-t}, \quad y(0) = \tfrac{1}{2}, \quad \text{για } t \geq 0.$$

ΛΥΣΗ Η εξίσωση γράφεται στη μορφή χωριζόμενων μεταβλητών έχοντας διαιρέσει και τα δύο μέλη με y^2 για να πάρουμε $\dfrac{y'(t)}{y^2} = e^{-t}$. Τώρα ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη ως προς t και υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν:

$$\int \frac{1}{y^2} y'(t)\, dt = \int e^{-t}\, dt$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int e^{-t}\, dt \qquad \text{Αλλαγή μεταβλητών στο αριστερό μέλος}$$

$$-\frac{1}{y} = -e^{-t} + C. \qquad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

➤ Στην πράξη, η αλλαγή μεταβλητής στο αριστερό μέλος συχνά παραλείπεται και μεταβαίνουμε κατευθείαν στο δεύτερο βήμα, που είναι η ολοκλήρωση του αριστερού μέλους ως προς y και του δεξιού μέλους ως προς t.

➤ Σημειώστε ότι κάθε ολοκλήρωση παράγει μια σταθερά ολοκλήρωσης. Οι δύο σταθερές ολοκλήρωσης μπορούν να συνδυαστούν σε μία.

Λύνοντας ως προς y παίρνουμε τη γενική λύση

$$y(t) = \frac{1}{e^{-t} - C}.$$

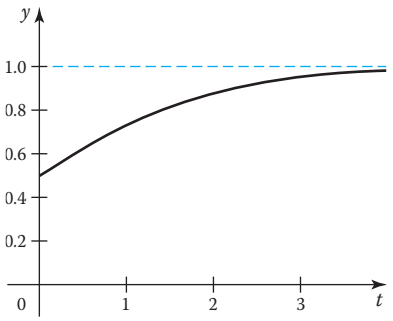
Η αρχική συνθήκη $y(0) = \frac{1}{2}$ συνεπάγεται ότι

$$y(0) = \frac{1}{e^0 - C} = \frac{1}{1 - C} = \frac{1}{2}.$$

έπεται ότι $C = -1$, οπότε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = \frac{1}{e^{-t} + 1}.$$

Η λύση (Σχήμα Δ1.16) διέρχεται από το $(0, \frac{1}{2})$ και αυξάνει τείνοντας προς την ασύμπτωτη $y = 1$ διότι $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1}{e^{-t} + 1} = 1$.



Σχήμα Δ1.16

Σχετικές ασκήσεις 5–26 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Γράψτε την $y'(t) = (t^2 + 1)/y^3$ στη μορφή χωριζόμενων μεταβλητών. ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Άλλη μια εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών** Βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $y'(x) = e^{-y} \sin x$ που υπόκειται σε τρεις διαφορετικές αρχικές συνθήκες

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{και} \quad y(0) = -3.$$

ΛΥΣΗ Γράφουμε την εξίσωση στην μορφή $e^y y'(x) = \sin x$, και παρατηρούμε ότι είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη ως προς x, και έχουμε

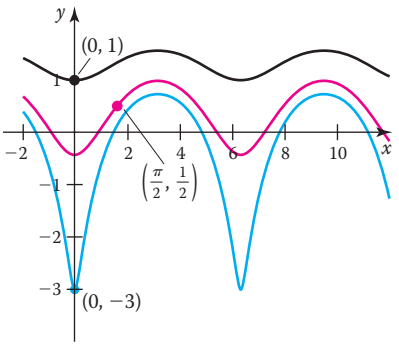
$$\int e^y y'(x)\, dx = \int \sin x\, dx$$

$$\int e^y\, dy = \int \sin x\, dx \qquad \text{Αλλαγή μεταβλητών στο αριστερό μέλος}$$

$$e^y = -\cos x + C. \qquad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

Η γενική λύση y βρίσκεται παίρνοντας τους λογαρίθμους των δύο μελών της εξίσωσης:

$$y = \ln(C - \cos x).$$



Σχήμα Δ1.17

Οι τρεις αρχικές συνθήκες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της σταθεράς C για τις τρεις λύσεις:

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \ln(C - \cos 0) = \ln(C - 1) \Rightarrow e = C - 1 \Rightarrow C = e + 1,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \ln\left(C - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \ln C \Rightarrow C = e^{1/2}, \text{ και}$$

$$y(0) = -3 \Rightarrow -3 = \ln(C - \cos 0) = \ln(C - 1) \Rightarrow e^{-3} = C - 1 \Rightarrow C = e^{-3} + 1.$$

Αντικαθιστούμε αυτές τις τιμές του C στην γενική λύση και παίρνουμε τις λύσεις των τριών προβλημάτων αρχικών τιμών. (Σχήμα Δ1.17). Οι μικρές τελείες σε κάθε καμπύλη δείχνουν την αρχική συνθήκη σε κάθε λύση.

Σχετικές ασκήσεις 5–26 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Βρείτε την τιμή της σταθεράς C στο Παράδειγμα 2 με αρχική συνθήκη $y(\pi) = 0$. ◄

Ακόμη και αν είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα αναγκαία ολοκληρώματα για να λύσουμε μια εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, η λύση μπορεί να μην είναι εύκολο να εκφραστεί σε αναλυτική μορφή. Πιο κάτω υπάρχει ένα παράδειγμα μιας λύσης που είναι προτιμότερο να παραμείνει στην πεπλεγμένη μορφή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 **Μια πεπλεγμένη λύση** Βρείτε το γράφημα και τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\cos y\, y'(t) = \sin^2 t \cos t, \quad y(0) = \frac{\pi}{6}.$$

ΛΥΣΗ Η εξίσωση βρίσκεται ήδη στη μορφή χωριζόμενων μεταβλητών. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη ως προς t, έχουμε

$$\int \cos y\, dy = \int \sin^2 t \cos t\, dt \quad \text{Ολοκλήρωση δύο μελών}$$

$$\sin y = \frac{1}{3}\sin^3 t + C. \quad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

► Για το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους, χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = \sin t$. Το ολοκλήρωμα γίνεται $\int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C$.

Όταν θέσουμε την αρχική συνθήκη σε αυτή την περίπτωση, είναι προτιμότερο να αφήσουμε τη γενική λύση στην πεπλεγμένη μορφή. Αντικαθιστώντας $t = 0$ και $y = \frac{\pi}{6}$ στη γενική λύση, βρίσκουμε ότι

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sin^3 0 + C \quad \text{ή} \quad C = \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

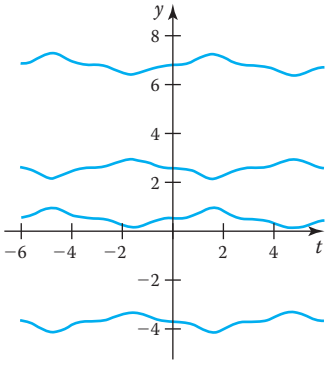
$$\sin y = \frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{1}{2}.$$

Για να κάνουμε το γράφημα σε αυτή την πεπλεγμένη μορφή, είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε μια εφαρμογή γραφικών. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα Δ1.18.

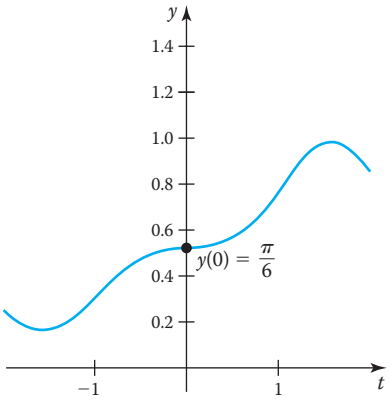
► Πρέπει να δοθεί προσοχή στο γράφημα και την παρουσίαση πεπλεγμένων λύσεων. Το γράφημα της

$$\sin y = \frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{1}{2}$$

είναι μια οικογένεια άπειρου αριθμού καμπυλών.



Πρέπει να επιλέξετε την καμπύλη που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη, όπως φαίνεται στο Σχήμα Δ1.18.



Σχήμα Δ1.18

Σχετικές ασκήσεις 27–32 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4 Βρείτε την τιμή της σταθεράς C στο Παράδειγμα 3 με αρχική συνθήκη $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$ ◄

Άλλη μια εξέταση της λογιστικής εξίσωσης

► Η παραγώγιση της λογιστικής εξίσωσης συζητείται στην Ενότητα Δ1.5.

Στην Ενότητα Δ1.1, εισαγάγαμε τη λογιστική εξίσωση, η οποία χρησιμοποιείται συχνά για τη μοντελοποίηση πληθυσμών, επιδημιών και διάδοση φημών. Στην Ενότητα Δ1.2, εξετάζουμε το διανυσματικό πεδίο που σχετίζεται με τη λογιστική εξίσωση. Αυτό σημαίνει ότι η λογιστική εξίσωση είναι μια εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, οπότε τώρα έχουμε τα εργαλεία για να τη λύσουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 **Λογιστική αύξηση πληθυσμού** Υποθέτουμε ότι στην αρχή του πειράματος έχουμε 50 έντομα σε μια μεγάλη γυάλα. Έστω $P(t)$ ο αριθμός των εντόμων στη γυάλα t μέρες αργότερα. Αρχικά ο πληθυσμός αυξάνει εκθετικά, αλλά λόγω του περιορισμένου χώρου και τροφής, ο ρυθμός αύξησης φθίνει και ο πληθυσμός εμποδίζεται να αναπτυχθεί ανεξέλεγκτα. Το πείραμα αυτό μοντελοποιείται από τη *λογιστική εξίσωση*

$$\frac{dP}{dt} = 0.1P\left(1 - \frac{P}{300}\right), \text{ για } t \geq 0,$$

μαζί με την αρχική συνθήκη $P(0) = 50$. Λύστε αυτό το πρόβλημα αρχικών τιμών.

ΛΥΣΗ Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι χωριζόμενων μεταβλητών εαν γραφεί στη μορφή

$$\frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{300}\right)} \cdot \frac{dP}{dt} = 0.1.$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη ως προς t οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{300}\right)} = \int 0.1\, dt. \tag{1}$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της εξίσωσης (1) είναι $\int 0.1\, dt = 0.1t + C$.

Επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι ρητή συνάρτηση ως προς P, χρησιμοποιούμε μερικά κλάσματα. Πρέπει να επαληθεύσετε ότι

$$\frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{300}\right)} = \frac{300}{P(300 - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{300 - P}$$

και συνεπώς,

$$\int \frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{300}\right)}\, dP = \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{300 - P}\right) dP = \ln\left|\frac{P}{300 - P}\right| + C.$$

Μετά την ολοκλήρωση η εξίσωση (1) γίνεται

$$\ln\left|\frac{P}{300 - P}\right| = 0.1t + C. \tag{2}$$

Το επόμενο βήμα είναι να λύσουμε ως προς P, το οποίο εμπλέκεται στον λογάριθμο. Γράφουμε τα δύο μέλη σε εκθετική μορφή και παίρνουμε

$$\left|\frac{P}{300 - P}\right| = e^C \cdot e^{0.1t}.$$

Μπορούμε να απαλλαγούμε από την απόλυτη τιμή του αριστερού μέλους της εξίσωσης (2) γράφοντας

$$\frac{P}{300 - P} = \pm e^{C} \cdot e^{0.1t}.$$

➤ Δεν είναι πολλές οι φορές στα μαθηματικά που επαναπροσδιορίζουμε μια σταθερά στη μέση ενός υπολογισμού. Όταν εργαζόμαστε με αυθαίρετες σταθερές, είναι δυνατόν κάτι τέτοιο αν γίνεται με προσοχή.

Εδώ ένα χρήσιμο τέχνασμα απλοποιεί τα πράγματα. Επειδή το C είναι μια αυθαίρετη σταθερά, η $\pm e^{C}$ είναι επίσης μια αυθαίρετη σταθερά, οπότε μετονομάζουμε την ποσότητα $\pm e^{C}$ σε C. Τώρα έχουμε

$$\frac{P}{300 - P} = Ce^{0.1t}. \tag{3}$$

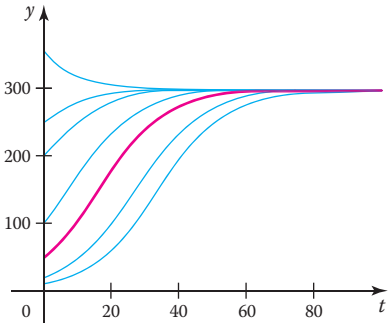
Λύνοντας την εξίσωση (3) ως προς P και αντικαθιστώντας το $1/C$ με C έχουμε τη γενική λύση

$$P(t) = \frac{300}{1 + Ce^{-0.1t}}.$$

➤ Μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης την αρχική συνθήκη στην εξίσωση (3) για να λύσουμε ως προς C.

Το Σχήμα Δ1.19 δείχνει τη γενική λύση με καμπύλες που αντιστοιχούν σε ορισμένες διαφορετικές τιμές του C. Από την αρχική συνθήκη $P(0) = 50$, βρίσκουμε ότι η τιμή του C για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι $C = 5$. Αυτό συνεπάγεται ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$P(t) = \frac{300}{1 + 5e^{-0.1t}}.$$



Σχήμα Δ1.19

Το Σχήμα Δ1.19 δείχνει αυτή την ειδική λύση (με κόκκινο) μεταξύ των καμπυλών της γενικής λύσης. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτού του μοντέλου είναι ότι για $0 < P(0) < 300$, ο πληθυσμός αυξάνεται, αλλά όχι χωρίς φράγμα, προσεγγίζοντας μια λύση **ισορροπίας**, ή **σταθερής κατάστασης**, με τιμή

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{300}{1 + 5e^{-0.1t}} = 300,$$

που είναι ο μέγιστος πληθυσμός μπορεί να αντέξει που το περιβάλλον (χώρος και τροφή). Αυτός ο πληθυσμός ισορροπίας ονομάζεται **φέρουσα ικανότητα**. Παρατηρήστε ότι όλες οι καμπύλες της γενικής λύσης προσεγγίζουν την τιμή της φέρουσας ικανότητας του πληθυσμού όσο αυξάνεται το t.

Σχετικές ασκήσεις 33–34 ◄

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ1.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Τι είναι μια πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών;
2. Είναι η $t^2y'(t) = \dfrac{t+4}{y^2}$ εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών;
3. Είναι η $y'(t) = 2y - t$ εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών;
4. Εξηγήστε πώς θα λύσετε μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών της μορφής $g(y)y'(t) = h(t)$.

Βασικές δεξιότητες

5–16. Λύση εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων εξισώσεων. Εκφράστε τη λύση αναλυτικά σαν μια συνάρτηση ανεξάρτητης μεταβλητής.*

5. $t^{-3}y'(t) = 1$
6. $e^{4t}y'(t) = 5$
7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2}{y}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = y(x^2 + 1)$
9. $y'(t) = e^{y/2}\sin t$
10. $x^2\dfrac{dw}{dx} = \sqrt{w}(3x + 1), x > 0$
11. $x^2y'(x) = y^2, x > 0$
12. $(t^2 + 1)^3yy'(t) = t(y^2 + 4)$
13. $y'(t)\csc t = \dfrac{-y^3}{2}$
14. $y'(t)e^{t/2} = y^2 + 4$
15. $u'(x) = e^{2x-u}$
16. $xu'(x) = u^2 - 4, x > 0$

17–26. Λύση προβλημάτων αρχικών τιμών *Εξετάστε αν οι ακόλουθες εξισώσεις είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Αν ναι, λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών.*

17. $ty'(t) = 1,\ y(1) = 2, t > 0$
18. $\sec t\, y'(t) = 1,\ y(0) = 1$
19. $2yy'(t) = 3t^2,\ y(0) = 9$
20. $y'(t) = e^{ty},\ y(0) = 1$
21. $\dfrac{dy}{dt} = ty + 2,\ y(1) = 2$
22. $y'(t) = y(4t^3 + 1),\ y(0) = 4$
23. $y'(t) = \dfrac{e^t}{2y},\ y(\ln 2) = 1$
24. $\sec x\, y'(x) = y^3,\ y(0) = 3$
25. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y},\ y(0) = \ln 3$
26. $y'(t) = \cos^2 y,\ y(1) = \dfrac{\pi}{4}$

T **27–32. Λύσεις πεπλεγμένης μορφής** *Λύστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών και αφήστε τη λύση στην πεπλεγμένη μορφή. Χρησιμοποιήστε εφαρμογή γραφικών για να σχεδιάσετε τη λύση. Αν η πεπλεγμένη λύση περιγράφει περισσότερες από μια καμπύλες, δείξτε ποια καμπύλη αντιστοιχεί στη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.*

27. $y'(t) = \dfrac{t}{y},\ y(1) = 2$

28. $y'(x) = \dfrac{1 + x}{2 - y},\ y(1) = 1$

29. $u'(x) = \csc u \cos \dfrac{x}{2},\ u(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$

30. $yy'(x) = \dfrac{2x}{(2 + y^2)^2},\ y(1) = -1$

31. $y'(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{y + 4}},\ y(3) = 5$

32. $z'(x) = \dfrac{z^2 + 4}{x^2 + 16},\ z(4) = 2$

T **33. Λογιστική εξίσωση πληθυσμού** Ένας πληθυσμός λαγών σε ένα νησί αριθμεί 50 άτομα όταν αρχίζει η παρατήρηση ($t = 0$). Ο πληθυσμός μοντελοποιείται από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{200}\right),\ P(0) = 50.$$

α. Βρείτε και σχεδιάστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για $t \geq 0$.
β. Ποιος είναι ο πληθυσμός σταθερής κατάστασης;

T **34. Λογιστική εξίσωση επιδημίας** Όταν ένα μολυσμένο άτομο εισέλθει σε μια κλειστή και υγιή κοινότητα, ο αριθμός των ατόμων που προσβάλλονται από την ασθένεια (χωρίς άλλη παρέμβαση) μπορεί να μοντελοποιηθεί από την λογιστική εξίσωση

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{A}\right),\ P(0) = P_0,$$

όπου k είναι ένας θετικός ρυθμός μόλυνσης, A είναι ο αριθμός των ατόμων στην κοινότητα και P_0 ο αριθμός των μολυσμένων σε $t = 0$. Το μοντέλο επίσης υποθέτει πως δεν υπάρχει ανάρρωση.

α. Βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για $t \geq 0$, μέσω των k, A, και P_0.
β. Κάντε το γράφημα της λύσης στην περίπτωση που $k = 0.025$, $A = 300$, και $P_0 = 1$.
γ. Για σταθερές τιμές των k και A, περιγράψτε τη συμπεριφορά των λύσεων σε βάθος χρόνου για κάθε P_0 με $0 < P_0 < A$.

Περαιτέρω διερευνήσεις

35. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Εξετάστε αν οι ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και δώστε μια ερμηνεία ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Η εξίσωση $u'(x) = (x^2u^7)^{-1}$ είναι χωριζόμενων μεταβλητών.
β. Η γενική λύση μιας εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών $y'(t) = \dfrac{t}{y^7 + 10y^4}$ μπορεί να γραφεί αναλυτικά με το y συναρτήσει του t.
γ. Η γενική λύση της εξίσωσης $yy'(x) = xe^{-y}$ μπορεί να βρεθεί με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

36–39. Λύσεις εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών *Λύστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών. Όπου είναι δυνατόν, δώστε τη λύση ως συνάρτηση του t.*

36. $e^y y'(t) = \dfrac{\ln^2 t}{t},\ y(1) = \ln 2$

37. $y'(t) = \dfrac{3y(y + 1)}{t},\ y(1) = 1$

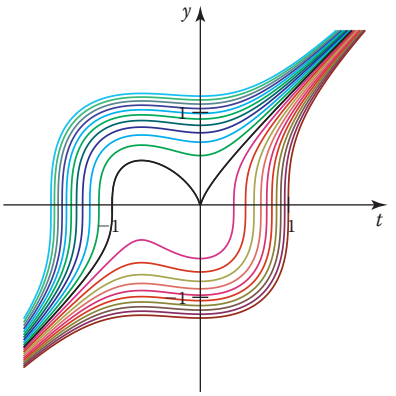
38. $y'(t) = \dfrac{\cos^2 t}{2y},\ y(0) = -2$

39. $y'(t) = \dfrac{y + 3}{5t + 6},\ y(2) = 0$

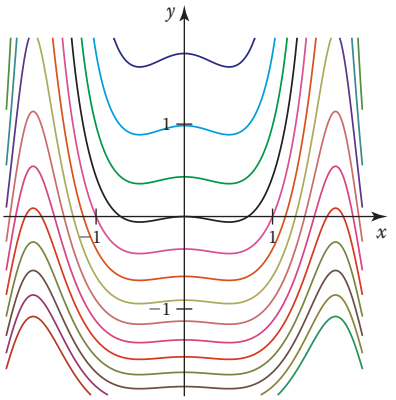
40–41. Πεπλεγμένες λύσεις για εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών *Για τις παρακάτω εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών.*

α. *Βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης.*
β. *Βρείτε την τιμή της αυθαίρετης σταθεράς που σχετίζεται με κάθε αρχική συνθήκη. (Κάθε αρχική συνθήκη απαιτεί διαφορετική σταθερά.)*
γ. *Χρησιμοποιήστε το γράφημα της γενικής λύσης που δίνεται για να σχεδιάσετε την καμπύλη της λύσης για κάθε αρχική συνθήκη.*

40. $y^2y'(t) = t^2 + \dfrac{2}{3}t \cdot\ y(-1) = 1, y(1) = 0, y(-1) = -1$



41. $e^{-y/2}y'(x) = 4x \sin x^2 - x \cdot\ y(0) = 0,$
$y(0) = \ln\left(\dfrac{1}{4}\right), y\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right) = 0$



42. Ορθογώνιες τροχιές Δύο καμπύλες είναι ορθογώνιες η μία στην άλλη εάν οι εφαπτόμενές τους είναι κάθετες σε κάθε σημείο τομής τους. Μια οικογένεια καμπυλών σχηματίζει **ορθογώνιες τροχιές** με άλλη οικογένεια καμπυλών εάν κάθε καμπύλη της μιας οικογένειας είναι ορθογώνια σε κάθε καμπύλη της άλλης οικογένειας. Ακολουθείστε τα επόμενα βήματα για να βρείτε ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των ελλείψεων $2x^2 + y^2 = a^2$.

α. Εφαρμόστε πεπλεγμένη παραγώγιση στην $2x^2 + y^2 = a^2$ για να δείξετε ότι $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{y}$.

β. Η οικογένεια των ορθογώνιων τροχιών στην $2x^2 + y^2 = a^2$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$. Γιατί;

γ. Λύστε την διαφορική εξίσωση του μέρους (β) για να επαληθεύσετε ότι $y^2 = e^C|x|$ και μετά εξηγήστε γιατί έπεται ότι $y^2 = kx$. Συνεπώς η οικογένεια των παραβολών $y^2 = kx$ σχηματίζει ορθογώνιες τροχιές με την οικογένεια των ελλείψεων $2x^2 + y^2 = a^2$.

43. Ορθογώνιες τροχιές Εφαρμόστε τη μέθοδο της Άσκησης 42 για να βρείτε ορθογώνιες τροχιές στην οικογένεια των κύκλων $x^2 + y^2 = a^2$.

Εφαρμογές

T **44. Λογιστική εξίσωση για διάδοση φημών** Οι κοινωνιολόγοι μοντελοποιούν τη διάδοση φημών με χρήση λογιστικών εξισώσεων. Η βασική παραδοχή είναι ότι σε κάθε δοθείσα χρονική στιγμή, ένα μέρος y του πληθυσμού με $0 \le y \le 1$, γνωρίζει μια συγκεκριμένη φήμη, ενώ το υπόλοιπο μέρος $1 - y$ δεν τη γνωρίζει. Συνεπώς η φήμη διαχέεται με αλληλεπιδράσεις μεταξύ εκείνων που τη γνωρίζουν και εκείνων που δεν τη γνωρίζουν. Ο αριθμός τέτοιων αλληλεπιδράσεων είναι ανάλογος του $y(1 - y)$. Άρα η εξίσωση που περιγράφει την διάδοση της φήμης είναι $y'(t) = ky(1 - y)$, όπου k είναι θετικός αριθμός. Ο αριθμός των ανθρώπων που αρχικά γνωρίζουν την φήμη είναι $y(0) = y_0$, όπου $0 \le y_0 \le 1$.

α. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών και δώστε τη λύση συναρτήσει των k και y_0.

β. Υποθέστε ότι $k = 0.3$ εβδομάδα^{-1} και σχεδιάστε τη λύση για $y_0 = 0.1$ και $y_0 = 0.7$.

γ. Περιγράψτε και ερμηνεύστε τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της συνάρτησης φήμης, για κάθε $0 \le y_0 \le 1$.

T **45. Ελεύθερη πτώση** Ένα αντικείμενο σε ελεύθερη πτώση μπορεί να μοντελοποιηθεί υποθέτοντας ότι οι μόνες δυνάμεις που επενεργούν είναι η βαρυτική δύναμη και η αντίσταση του αέρα. Από τον δεύτερο νόμο της κίνησης του Newton (μάζα × επιτάχυνση = το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων), η ταχύτητα του αντικειμένου ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\underbrace{m}_{\text{μάζα}} \cdot \underbrace{v'(t)}_{\text{επιτάχυνση}} = \underbrace{mg + f(v)}_{\text{εξωτερικές δυνάμεις}},$$

όπου F είναι μια συνάρτηση που εκφράζει την αντίσταση του αέρα (υποθέτοντας προς τα κάτω τη θετική κατεύθυνση). Δεχόμαστε ότι (κάτι που συναντάμε συχνά σε κίνηση στον αέρα) ότι $f(v) = -kv^2$, όπου $k > 0$ είναι ένας συντελεστής (οπισθέλκουσας δύναμης).

α. Δείξτε ότι η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή $v'(t) = g - av^2$, όπου $a = k/m$.

β. Για ποια (θετική) τιμή του v ισχύει $v'(t) = 0$; (Αυτή η λύση ισορροπίας ονομάζεται *τελική* ή *οριακή ταχύτητα*.)

γ. Βρείτε τη λύση αυτής της εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών υποθέτοντας $v(0) = 0$ και $0 < v^2 < g/a$.

δ. Να κάνετε το γράφημα της λύσης που βρήκατε στο μέρος (γ) με $g = 9.8\ \text{m/s}^2$, $m = 1$, και $k = 0.1$, και επαληθεύστε ότι η τελική ταχύτητα συμφωνεί με την τιμή που βρήκατε στο μέρος (β).

T **46. Ελεύθερη πτώση** Στο πλαίσιο της Άσκησης 45, υποθέστε ότι η αντίσταση δίνεται από την $f(v) = -Rv$, όπου $R > 0$ είναι ένας συντελεστής οπισθέλκουσας αντίστασης (μια παραδοχή που γίνεται συχνά για ένα πυκνό μέσο όπως νερό ή λάδι).

α. Δείξτε ότι η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή $v'(t) = g - bv$, όπου $b = R/m$.

β. Για ποια τιμή του v ισχύει $v'(t) = 0$; (Αυτή η λύση ισορροπίας ονομάζεται τελική ταχύτητα.)

γ. Βρείτε τη λύση αυτής της εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών υποθέτοντας $v(0) = 0$ και $0 < v < g/b$.

δ. Να κάνετε το γράφημα της λύσης που βρήκατε στο μέρος (γ) με $g = 9.8\ \text{m/s}^2$, $m = 1$, και $R = 0.1$, και επαληθεύστε ότι η τελική ταχύτητα συμφωνεί με την τιμή που βρήκατε στο μέρος (β).

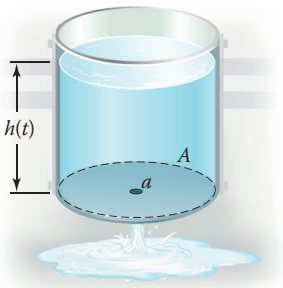
T **47. Νόμος του Torricelli** Μια ανοικτή κυλινδρική δεξαμενή γεμάτη αρχικά με νερό, αποστραγγίζεται από μια τρύπα στον πυθμένα σύμφωνα με τον νόμο του Torricelli (βλέπε σχήμα). Αν $h(t)$ είναι το ύψος του νερού στη δεξαμενή για $t \ge 0$, τότε από τον νόμο του Torricelli συνεπάγεται $h'(t) = -2k\sqrt{h}$, όπου k είναι μια σταθερά που περιλαμβάνει $g = 9.8\ \text{m/s}^2$, την ακτίνα της δεξαμενής και την ακτίνα της τρύπας. Υποθέτουμε ότι το αρχικό ύψος του νερού είναι $h(0) = H$.

α. Βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

β. Βρείτε τη λύση στην περίπτωση που $k = 0.1$ και $H = 0.5$ m.

γ. Στο μέρος (β) σε πόσο χρόνο αδειάζει η δεξαμενή;

δ. Να κάνετε το γράφημα της λύσης που βρήκατε στο μέρος (β) και επαληθεύστε ότι συμφωνεί με το μέρος (γ).



T **48. Εξισώσεις ρυθμών εξέλιξης χημικών αντιδράσεων** Έστω $y(t)$ η συγκέντρωση μιας ουσίας σε μια χημική αντίδραση (οι συνήθεις μονάδες είναι moles/liter). Η μεταβολή της συγκέντρωσης, σε κανονικές συνθήκες εκφράζεται από την εξίσωση $\frac{dy}{dt} = -ky^n$, όπου $k > 0$ είναι σταθερά της ταχύτητας και ο ακέραιος n είναι η τάξη της αντίδρασης.

α. Δείξτε ότι για μια πρώτου βαθμού αντίδραση ($n = 1$), η συγκέντρωση υπακούει στον νόμο της εκθετικής μείωσης.

β. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών. Για μια αντίδραση δεύτερης τάξης ($n = 2$) υποθέτοντας ότι $y(0) = y_0$.

γ. Να κάνετε το γράφημα της συγκέντρωσης για την αντίδραση πρώτης και δεύτερης τάξης με $k = 0.1$ και $y_0 = 1$.

T **49. Αύξηση όγκου** Η εξίσωση όγκων Gompertz χρησιμοποιείται συχνά για να μοντελοποιηθεί η αύξηση των καρκινικών όγκων. Έστω $M(t)$ η μάζα ενός όγκου σε χρόνο $t \ge 0$. Το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών είναι

$$\frac{dM}{dt} = -rM \ln\left(\frac{M}{K}\right), M(0) = M_0,$$

όπου r και K είναι θετικές σταθερές και $0 < M_0 < K$.

α. Να κάνετε το γράφημα της συνάρτησης αύξησης ρυθμού $R(M) = -rM \ln\left(\frac{M}{K}\right)$ (που ισούται με $M'(t)$) υποθέτοντας $r = 1$ και $K = 4$. Για ποιες τιμές του M ο ρυθμός της αύξησης είναι θετικός; Για ποια τιμή του M ο ρυθμός της αύξησης είναι μέγιστος;

β. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών και να κάνετε το γράφημα για $r = 1$, $K = 4$, και $M_0 = 1$. Περιγράψτε το μοτίβο αύξησης του όγκου. Η αύξηση είναι απεριόριστη; Αν όχι ποιο είναι το οριακό μέγεθος του όγκου;

γ. Στη γενική λύση, τι συμβολίζει το K;

Πρόσθετες ασκήσεις

T **50. Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με χρήση τεχνολογίας** Λύστε την $y'(t) = ye^t \cos^3 4t$, $y(0) = 1$, και σχεδιάστε τη λύση για $0 \le t \le \pi$.

51. Έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) = y^{n+1}$, $y(0) = y_0$, όπου n θετικός ακέραιος.

α. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών για $n = 1$ και $y_0 = 1$.

β. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών για $n = 2$ και $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

γ. Λύστε το πρόβλημα για θετικούς ακεραίους n και $y_0 = n^{-1/n}$. Πώς συμπεριφέρονται οι λύσεις αν $t \to 1^-$;

T **52. Ανάλυση μιας εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών** Θεωρήστε τη διαφορική εξίσωση $y'(t) = \dfrac{y(y+1)}{t(t+2)}$ και να εκτελέσετε την παρακάτω ανάλυση.

α. Δείξτε ότι η γενική λύση της εξίσωσης μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y(t) = \frac{\sqrt{t}}{C\sqrt{t+2} - \sqrt{t}}.$$

β. Τώρα θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y(1) = A$, όπου A είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = \frac{\sqrt{t}}{\left(\dfrac{1+A}{\sqrt{3}A}\right)\sqrt{t+2} - \sqrt{t}}.$$

γ. Να βρείτε και να κάνετε το γράφημα της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 1$.

δ. Περιγράψτε τη συμπεριφορά της λύσης στο μέρος (γ) όταν το t αυξάνει.

ε. Να βρείτε και να κάνετε το γράφημα της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$.

στ. Περιγράψτε τη συμπεριφορά της λύσης στο μέρος (ε) όταν το t αυξάνει.

ζ. Στις περιπτώσεις που η λύση οριοθετείται για $t > 0$, ποια είναι η τιμή του $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$;

T **53. Ανάλυση μιας εξίσωσης χωριζόμενων μεταβλητών** Θεωρήστε την διαφορική εξίσωση $yy'(t) = \frac{1}{2}e^t + t$ και να εκτελέσετε την παρακάτω ανάλυση.

α. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης και εκφράστε τη αναλυτικά ως συνάρτηση του t σε δύο περιπτώσεις: αν $y > 0$ και αν $y < 0$.

β. Βρείτε τις λύσεις που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $y(-1) = 1$ και $y(-1) = 2$.

γ. Να κάνετε το γράφημα και να περιγράψτε τη συμπεριφορά των λύσεων στο μέρος (β) όταν το t αυξάνει.

δ. Βρείτε τις λύσεις που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $y(-1) = -1$ και $y(-1) = -2$.

ε. Να κάνετε το γράφημα και να περιγράψτε τη συμπεριφορά των λύσεων στο μέρος (δ) όταν το t αυξάνει.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Οι B και C είναι χωριζόμενων μεταβλητών.
2. $y^3y'(t) = t^2 + 1$ **3.** $C = 0$ **4.** $C = -\frac{1}{24}$

Δ1.4 Ειδικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

➤ Τα προβλήματα εκθετικής αύξησης και μείωσης που μελετήθηκαν προηγουμένως εμφανίζονται πάλι σε αυτή την ενότητα υπό το πρίσμα των διαφορικών εξισώσεων.

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας σε μια ειδική κατηγορία διαφορικών εξισώσεων με πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές που απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή.

Μέθοδος λύσης

Θεωρήστε την γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $y'(t) = ky + b$, όπου $k \neq 0$ και b πραγματικοί αριθμοί. Μεταβάλλοντας τις τιμές των k και b, αυτή η εξίσωση έχει πολλές εφαρμογές και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση μεγάλου αριθμού φαινομένων. Ειδικότερα, οι όροι της εξίσωσης έχουν την ακόλουθη σημασία:

$$\underbrace{y'(t)}_{\substack{\text{ρυθμός}\\ \text{μεταβολής}\\ \text{του } y}} = \underbrace{ky(t)}_{\substack{\text{ρυθμός}\\ \text{φυσικής αύξησης}\\ \text{ή μείωσης του } y}} + \underbrace{b}_{\substack{\text{ρυθμός αύξησης}\\ \text{ή μείωσης λόγω}\\ \text{εξωτερικών}\\ \text{παραγόντων}}}.$$

➤ Στην πιο γενική γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης, τα k και/ή b είναι συναρτήσεις του t. Αυτή η γενική γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης δεν είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Για αυτή την πιο απαιτητική περίπτωση δες τις Ασκήσεις 45–48.

Για παράδειγμα, αν το y παριστάνει τον αριθμών των ψαριών σε ένα ιχθυοτροφείο, τότε το $ky(t)$ (με $k > 0$) εκφράζει την εκθετική αύξηση του πληθυσμού των ψαριών, απουσία άλλων παραγόντων και το $b < 0$ είναι ο ρυθμός αλίευσης με τον οποίο μειώνεται ο πληθυσμός. Σε ένα άλλο παράδειγμα, αν το y εκφράζει την ποσότητα ενός φαρμάκου στο αίμα, τότε το $ky(t)$ (με $k < 0$) εκφράζει την εκθετική μείωση του φαρμάκου που διέρχεται από τα νεφρά και το $b > 0$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο το φάρμακο προστίθεται στο αίμα ενδοφλεβίως. Επειδή τα k και b είναι σταθερά, η εξίσωση είναι χωριζόμενων μεταβλητών και μπορούμε να δώσουμε μια ακριβή λύση.

Για να λύσουμε αυτή την εξίσωση, αρχικά διαιρούμε και τα δύο μέλη της $y'(t) = ky + b$ με $ky + b$ για να την εκφράσουμε στη μορφή χωριζόμενων μεταβλητών:

$$\frac{y'(t)}{ky + b} = 1.$$

Μετά ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς t και παρατηρούμε ότι $dy = y'(t)\,dt$, οπότε παίρνουμε

$$\int \frac{dy}{ky + b} = \int dt \qquad \text{Ολοκλήρωση των δύο μελών της εξίσωσης}$$

$$\frac{1}{k}\ln|ky + b| = t + C. \qquad \text{Υπολογισμός ολοκληρωμάτων}$$

Προς στιγμή, υποθέτουμε ότι $ky + b > 0$, ή $y > -b/k$, οπότε η απόλυτη τιμή μπορεί να παραλειφθεί. Πολλαπλασιάζοντας επί k και εφαρμόζοντας την εκθετική μορφή και στα δύο μέλη της εξίσωσης, έχουμε

$$ky + b = e^{kt+kC} = e^{kt} \cdot \underbrace{e^{kC}}_{\text{το ορίζουμε εκ νέου ως } C} = Ce^{kt}.$$

Σημειώστε ότι χρησιμοποιούμε την κλασική πρακτική αντικατάστασης της σταθεράς C όταν λύνουμε ως προς y: Αν το C είναι αυθαίρετο, τότε τα e^{kC} και C/k είναι επίσης αυθαίρετα. Λύνουμε τώρα για τη γενική λύση:

$$y(t) = Ce^{kt} - \frac{b}{k}.$$

Μπορούμε να δείξουμε επίσης πως αν $ky + b < 0$, ή $y < -b/k$, προκύπτει η ίδια λύση (Άσκηση 32).

ΣΥΝΟΨΗ Λύση μια διαφορικής γραμμικής εξίσωσης πρώτης τάξης

Η γενική λύση της γραμμικής εξίσωσης πρώτης τάξης $y'(t) = ky + b$, όπου $k \neq 0$ και b πραγματικοί αριθμοί, είναι

$$y(t) = Ce^{kt} - \frac{b}{k},$$

όπου C μια αυθαίρετη σταθερά. Αν δοθεί μια αρχική συνθήκη, η τιμή του C μπορεί να προσδιοριστεί.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Επαληθεύστε με αντικατάσταση ότι η $y(t) = Ce^{kt} - b/k$ είναι μια λύση της $y'(t) = ky + b$, όπου b είναι πραγματικός αριθμός και $k \neq 0$. ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για χορήγηση φαρμάκου Ένα φάρμακο χορηγείται ενδοφλέβια σε έναν ασθενή με ρυθμό 6 mg/hr. Το φάρμακο έχει μια ημίσεια ζωή που αντιστοιχεί σε σταθερή τιμή $0.03\ \text{hr}^{-1}$. Έστω $y(t)$ η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα για $t \geq 0$. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών που διέπει την διαδικασία,

$$y'(t) = -0.03y + 6,\ y(0) = 0,$$

και παρουσιάστε τη λύση.

ΛΥΣΗ Η εξίσωση έχει την μορφή $y'(t) = ky + b$, όπου $k = -0.03$ και $b = 6$. Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y(t) = Ce^{-0.03t} + 200.$$

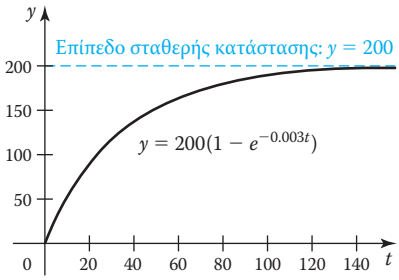
Για να βρούμε την τιμή του C για το συγκεκριμένο πρόβλημα, θέτουμε $y(0) = 0$ στη γενική λύση. Το αποτέλεσμα είναι $y(0) = C + 200 = 0$, που συνεπάγεται ότι $C = -200$. Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = -200e^{-0.03t} + 200 = 200(1 - e^{-0.03t}).$$

Το γράφημα της λύσης (Σχήμα Δ1.20) αποκαλύπτει κάτι σημαντικό: Η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα αυξάνει, αλλά πλησιάζει ένα επίπεδο σταθερής κατάστασης των

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} (200(1 - e^{-0.03t})) = 200 \text{ mg}.$$

Ένας γιατρός μπορεί εισπράξει ουσιαστική πληροφορία από αυτή τη λύση. Για παράδειγμα, μετά από 100 ώρες, το επίπεδο του φαρμάκου πλησιάζει το 95% του επιπέδου σταθερής κατάστασης.



Σχήμα Δ1.20

Σχετικές ασκήσεις 5–16 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Αν η τιμή της σταθεράς στο Παράδειγμα 1 ήταν 0.3 αντί 0.03, θα άλλαζε το επίπεδο σταθερής κατάστασης του φαρμάκου; Αν ναι, κατά πόσο; ◄

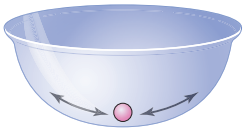
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Ανάλυση μέσω διανυσματικού πεδίου** Χρησιμοποιήστε διανυσματικά πεδία για να αναλύσετε τη συμπεριφορά των λύσεων των ακόλουθων εξισώσεων, όπου $k > 0$ και b μη μηδενικό. Υποθέτουμε πως $t \geq 0$.

α. $y'(t) = -ky + b$ **β.** $y'(t) = ky + b$

ΛΥΣΗ

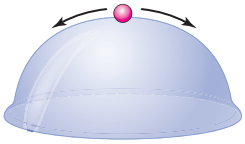
α. Παρατηρούμε αρχικά ότι $y'(t) = 0$ όταν $y = b/k$. Συνεπώς, η διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου αποτελείται από οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα όταν $y = b/k$. Αυτά τα οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα αντιστοιχούν στη λύση *ισορροπίας* $y(t) = \dfrac{b}{k}$; που είναι σταθερή για όλα τα t. Η σταθερή λύση μπορεί να είναι θετική ή αρνητική εξαρτώμενη από το πρόσημο του b. Αν $-ky + b > 0$, ή ισοδύναμα $y < b/k$, τότε $y'(t) > 0$, και οι λύσεις είναι αύξουσες σε αυτό το διάστημα. Παρόμοια, αν $-ky + b < 0$, ή ισοδύναμα $y > b/k$, τότε $y'(t) < 0$, και οι λύσεις είναι φθίνουσες σε αυτό το διάστημα. Το Σχήμα Δ1.21 δείχνει ένα τυπικό διανυσματικό πεδίο στην περίπτωση που $b > 0$. Παρατηρήστε ότι οι καμπύλες λύσεων προσεγγίζουν τη λύση ισορροπίας. Για αυτόν τον λόγο, η ισορροπία χαρακτηρίζεται *ευσταθής*.

► Οι έννοιες των ευσταθών και των ασταθών λύσεων ισορροπίας μπορούν να γίνουν εύκολα κατανοητές με τη χρήση ενός ημισφαιρικού μπολ και μιας μικρής σφαίρας. Όταν η σφαίρα ακινητοποιείται στον πυθμένα του μπολ, βρίσκεται σε θέση ισορροπίας. Αν η σφαίρα μετακινηθεί από τη θέση ισορροπίας επανέρχεται σε εκείνη.

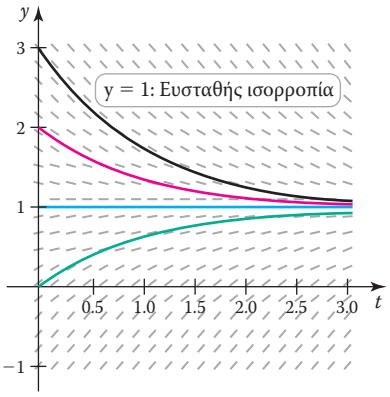


Ευσταθής

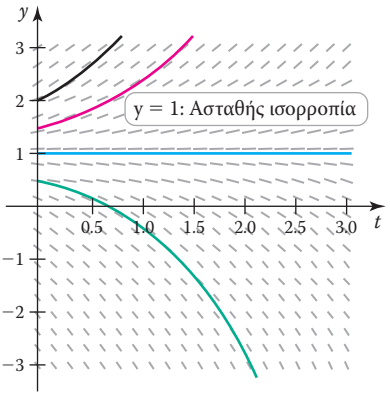
Αντιθέτως, όταν η σφαίρα βρίσκεται στην κορυφή του αντεστραμμένου μπολ, βρίσκεται σε θέση ισορροπίας, αν όμως μετακινηθεί από τη θέση ισορροπίας, απομακρύνεται από αυτήν.



Ασταθής



Σχήμα Δ1.21



Σχήμα Δ1.22

β. Η ανάλυση είναι παρόμοια με εκείνη του (α) μέρους. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια λύση ισορροπίας όταν $y = -b/k$, η οποία μπορεί να είναι θετική ή αρνητική εξαρτώμενη από το πρόσημο του b. Αν $ky + b > 0$, ή ισοδύναμα $y > -b/k$, τότε $y'(t) > 0$, και οι λύσεις είναι αύξουσες σε αυτό το διάστημα. Παρόμοια, αν $ky + b < 0$, ή ισοδύναμα $y < -b/k$, τότε $y'(t) < 0$, και οι λύσεις είναι φθίνουσες σε αυτό το διάστημα. Το Σχήμα Δ1.22 δείχνει ένα διανυσματικό πεδίο για $b < 0$. Τώρα οι καμπύλες λύσεων απομακρύνονται από τη λύση ισορροπίας και η ισορροπία χαρακτηρίζεται *ασταθής*.

Σχετικές ασκήσεις 17–22 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Ποια είναι η λύση ισορροπίας της εξίσωσης $y'(t) = 2y - 4$; Είναι ευσταθής ή ασταθής; ◄

Παραθέτουμε μια ποιοτική σύνοψη των σημαντικών εννοιών που παρουσιάστηκαν στο Παράδειγμα 2.

ΣΥΝΟΨΗ Λύσεις ισορροπίας

Η διαφορική εξίσωση $y'(t) = f(y)$ έχει μια (σταθερή) λύση **ισορροπίας** $y = a$ όταν $f(a) = 0$. Η ισορροπία είναι **ευσταθής** αν οι αρχικές συνθήκες κοντά στην $y = a$ παράγουν λύσεις που προσεγγίζουν την $y = a$ as $t \to \infty$. Η ισορροπία είναι **ασταθής** αν οι αρχικές συνθήκες κοντά στην $y = a$ παράγουν λύσεις που δεν προσεγγίζουν την $y = a$ όταν $t \to \infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Εξόφληση δανείου Υποθέστε ότι δανείζεστε 60.000 $ με μηνιαίο επιτόκιο 0.5% και σκοπεύετε να το επιστρέψετε με μηνιαίες δόσεις των 600 $. Το ανεξόφλητο ποσό του δανείου περιγράφεται προσεγγιστικά από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$B'(t) = \underbrace{0.005B}_{\text{επιτόκιο}} - \underbrace{600}_{\text{μηνιαίες δόσεις}}, \quad B(0) = 60{,}000,$$

όπου $B(t)$ είναι το ανεξόφλητο ποσό του δανείου μετά από t μήνες. Σημειώστε ότι το επιτόκιο αυξάνει το ανεξόφλητο ποσό του δανείου, ενώ οι μηνιαίες δόσεις το μικραίνουν.

α. Βρείτε και σχεδιάστε την συνάρτηση του ανεξόφλητου ποσού.

β. Σε πόσους μήνες κατά προσέγγιση το ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου μηδενίζεται;

➤ Η αποπληρωμή δανείου είναι ένα παράδειγμα διακριτής διαδικασίας (το επιτόκιο είναι δεδομένο και οι πληρωμές είναι μηνιαίες). Μπορεί όμως να εκφραστεί ως μια συνεχής διαδικασία με διαφορική εξίσωση επειδή το χρονικό διάστημα μεταξύ των δόσεων είναι μικρό συγκρινόμενο με το μήκος της όλης διαδικασίας δανειοδότησης. Οι διακριτές διαδικασίες μοντελοποιούνται συχνά με τις *εξισώσεις διαφορών*.

ΛΥΣΗ

α. Η διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή $y'(t) = ky + b$, όπου $k = 0.005$ μήνας^{-1} και $b = -\$600/$μήνα. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της σύνοψης, η γενική λύση είναι

$$B(t) = Ce^{kt} - \frac{b}{k} = Ce^{0.005t} + 120{,}000.$$

Η αρχική συνθήκη συνεπάγεται ότι

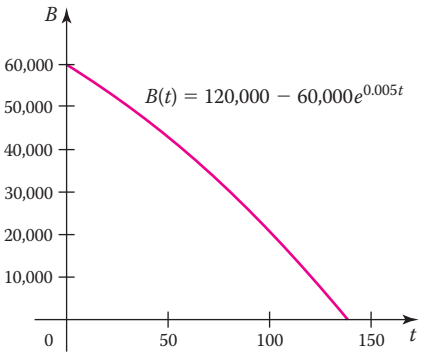
$$B(0) = C + 120{,}000 = 60{,}000 \Rightarrow C = -60{,}000.$$

Οπότε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$B(t) = Ce^{kt} - \frac{b}{k} = 120{,}000 - 60{,}000\, e^{0.005t}.$$

β. Το γράφημα (Σχήμα Δ1.23) δείχνει να μικραίνει το ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου και να φτάνει στο μηδέν σε $t \approx 139$ μήνες (11.6 χρόνια). Αυτό μπορεί να επαληθευτεί λύνοντας αλγεβρικά την $B(t) = 0$.

Σχετικές ασκήσεις 23–26 ◄



Σχήμα Δ1.23

Νόμος ψύξης του Νεύτωνα

Φανταστείτε ότι βγάζετε ένα πυρωμένο δοχείο από έναν καυτό φούρνο κεραμικής και το βάζετε σε ένα ράφι για να κρυώσει σε θερμοκρασία του δωματίου. Η διαίσθησή σας υπαγορεύει ότι επειδή η θερμοκρασία του δοχείου είναι μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία του δωματίου, το δοχείο ψύχεται και η θερμοκρασία του πλησιάζει τη θερμοκρασία του δωματίου. (Υποθέτουμε ότι το δωμάτιο είναι επαρκώς μεγάλο και η θέρμανση του δωματίου εξαιτίας του δοχείου είναι αμελητέα.)

Αποδεικνύεται ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί προσεγγιστικά με μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, παρόμοια με εκείνες που μελετήσαμε σε αυτή την ενότητα. Αυτή η εξίσωση είναι γνωστή ως ο νόμος ψύξης του Νεύτωνα και βασίζεται στην γνωστή

παρατήρηση ότι η *θερμότητα μεταφέρεται από το ζεστό στο κρύο.* Η λύση της εξίσωσης δίνει τη θερμοκρασία του μπολ σε κάθε χρονική στιγμή μετά την απομάκρυνση από τον φούρνο.

Θέτουμε $t = 0$ την χρονική στιγμή που το μπολ απομακρύνεται από τον φούρνο. Η θερμοκρασία του μπολ σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ είναι $T(t)$, και $T(0) = T_0$ είναι η θερμοκρασία του μπολ τη στιγμή ακριβώς που απομακρύνεται από τον φούρνο. Θέτουμε επίσης A τη θερμοκρασία του δωματίου ή του περιβάλλοντος. Τα T_0 και A θεωρούνται γνωστά.

Ο νόμος ψύξης του Newton λέει ότι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η θερμοκρασία σε κάθε χρονική στιγμή είναι ανάλογη της *διαφοράς* θερμοκρασίας μεταξύ του μπολ και του χώρου εκείνη τη στιγμή, δηλαδή,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - A),$$

όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά που καθορίζεται από τις ιδιότητες θερμικής αγωγιμότητας του μπολ. Σημειώστε ότι η εξίσωση έχει νόημα.

- Αν $T(t) > A$ (το μπολ είναι πιο θερμό από τον χώρο), τότε $\frac{dT}{dt} < 0$, και η θερμοκρασία του μπολ μειώνεται (ψύχεται).
- Αν $T(t) < A$ (το μπολ είναι πιο ψυχρό από τον χώρο), τότε $\frac{dT}{dt} > 0$, και η θερμοκρασία του μπολ αυξάνει (θερμαίνεται).

Παρατηρούμε ότι ο νόμος ψύξης του Newton αντιστοιχεί σε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης η οποία γνωρίζουμε πώς λύνεται. Η εξίσωση έχει τη μορφή $T'(t) = -kT + b$, όπου το k είναι αυθαίρετο και $b = kA$. Αυτή η εξίσωση έχει μελετηθεί νωρίτερα σε αυτή την ενότητα. Η γενική της λύση είναι

$$T(t) = Ce^{-kt} + A.$$

Όταν χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $T(0) = T_0$ για να προσδιορίσουμε το C, βρίσκουμε ότι

$$T(0) = C + A = T_0 \quad \Rightarrow \quad C = T_0 - A.$$

Συνεπώς, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$T(t) = (T_0 - A)e^{-kt} + A.$$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4 Επαληθεύστε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών ικανοποιεί την $T(0) = T_0$. Ποια είναι η λύση αν $T_0 = A$; ◄

Ο νόμος ψύξης του Νεύτωνα εκφράζει σωστά την διαδικασία ψύξης όταν το αντικείμενο είναι καλός αγωγός θερμότητας και όταν η θερμοκρασία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε όλο το αντικείμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 **Ψύξη ενός μπολ** Ένα μπολ απομακρύνεται από έναν φούρνο κεραμικής σε θερμοκρασία 200°C και τοποθετείται σε ένα ράφι ενός δωματίου με θερμοκρασία περιβάλλοντος 20°C. Δύο λεπτά μετά από την απομάκρυνση, η θερμοκρασία του γίνεται 160°C. Βρείτε τη θερμοκρασία του μπολ σε κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$.

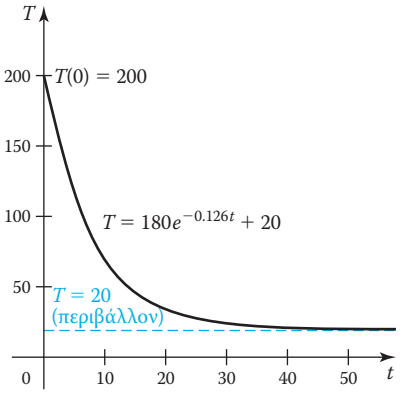
ΛΥΣΗ Θέτοντας $A = 20$, η γενική λύση της εξίσωσης ψύξης είναι

$$T(t) = Ce^{-kt} + 20.$$

Ως συνήθως, η αυθαίρετη σταθερά προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη $T(0) = 200$. Αντικαθιστώντας αυτή τη συνθήκη βρίσκουμε πως

$$T(0) = C + 20 = 200 \quad \Rightarrow \quad C = 180.$$

➤ Η τιμή της σταθεράς θερμικής αγωγιμότητας k είναι γνωστή για τα συνήθη υλικά. Το Παράδειγμα 4 απεικονίζει έναν πειραματικό τρόπο υπολογισμού της σταθεράς.



Σχήμα Δ1.24

Η λύση στο σημείο αυτό είναι $T(t) = 180e^{-kt} + 20$, αλλά σημειώστε ότι η σταθερά k παραμένει άγνωστη. Προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας την πρόσθετη πληροφορία ότι $T(2) = 160$. Αντικαθιστούμε στη λύση και λύνουμε ως προς k:

$$T(2) = 180e^{-2k} + 20 = 160 \qquad \text{Αντικατάσταση } t = 2$$

$$180e^{-2k} = 140 \qquad \text{Αναδιάταξη}$$

$$e^{-2k} = \frac{140}{180} = \frac{7}{9} \qquad \text{Αναδιάταξη}$$

$$k = -\frac{1}{2}\ln\frac{7}{9} \approx 0.126. \qquad \text{Λύση ως προς } k$$

Άρα η λύση για $t \geq 0$ είναι

$$T(t) = 180e^{-kt} + 20 \approx 180e^{-0.126t} + 20.$$

Το γράφημα (Σχήμα Δ1.24) δίνει ότι $T(0) = 200$ και $T(2) = 160$. Παρατηρήστε επίσης ότι $\lim_{t\to\infty} T(t) = 20$, που σημαίνει ότι η θερμοκρασία του μπολ πλησιάζει την θερμοκρασία του περιβάλλοντος καθώς $t \to \infty$. Ισοδύναμα, η λύση $T = 20$ αποτελεί μια ευσταθή ισορροπία του συστήματος.

Σχετικές ασκήσεις 27–30 ◀

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 5 Ποια είναι γενικώς η θερμοκρασία ισορροπίας για κάθε πρόβλημα ψύξης κατά τον νόμο του Νεύτωνα; Πρόκειται ευσταθή ή ασταθή ισορροπία; ◀

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ1.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι $y(t) = Ce^{-10t} - 13$. Ποια λύση ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 4$;

2. Ποια είναι η γενική λύση της εξίσωσης $y'(t) = 3y - 12$;

3. Ποια είναι η γενική λύση της εξίσωσης $y'(t) = -4y + 6$;

4. Ποια είναι η λύση ισορροπίας ης εξίσωσης $y'(t) = 3y - 9$. Είναι ευσταθής ή ασταθής;

Βασικές δεξιότητες

5–10. Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης *Βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων εξισώσεων.*

5. $y'(t) = 3y - 4$

6. $y'(x) = -y + 2$

7. $y'(x) + 2y = -4$

8. $y'(x) = 2y + 6$

9. $u'(t) + 12u = 15$

10. $v'(y) - \frac{v}{2} = 14$

11–16. Προβλήματα αρχικών τιμών *Λύστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών.*

11. $y'(t) = 3y - 6, y(0) = 9$

12. $y'(x) = -y + 2, y(0) = -2$

13. $y'(t) - 2y = 8, y(0) = 0$

14. $u'(x) = 2u + 6, u(1) = 6$

15. $y'(t) - 3y = 12, y(1) = 4$

16. $z'(t) + \frac{z}{2} = 6, z(-1) = 0$

17–22. Ευστάθεια σημείων ισορροπίας *Βρείτε την εξίσωση ισορροπίας των ακόλουθων εξισώσεων, κάντε ένα σκαρίφημα του διανυσματικού πεδίου για $t \geq 0$, και εξετάστε αν η λύση ισορροπίας είναι ευσταθής. Το διανυσματικό πεδίο είναι αναγκαίο μόνο για να υποδείξει αν οι λύσεις είναι αύξουσες ή φθίνουσες σε κάθε μέλος της λύσης ισορροπίας.*

17. $y'(t) = 12y - 18$

18. $y'(t) = -6y + 12$

19. $y'(t) = -\frac{y}{3} - 1$

20. $y'(t) - \frac{y}{4} - 1 = 0$

21. $u'(t) + 7u + 21 = 0$

22. $u'(t) - 4u = 3$

23–26. Προβλήματα δανείων *Τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών, μοντελοποιούν την αποπληρωμή ενός δανείου. Σε κάθε περίπτωση, λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών για $t \geq 0$, να κάνετε το γράφημα της λύσης και να προσδιορίσετε τον πρώτο μήνα που μηδενίζεται το ανεξόφλητο ποσό.*

23. $B'(t) = 0.005B - 500, B(0) = 50{,}000$

24. $B'(t) = 0.01B - 750, B(0) = 45{,}000$

25. $B'(t) = 0.0075B - 1500, B(0) = 100{,}000$

26. $B'(t) = 0.004B - 800, B(0) = 40{,}000$

27–30. Νόμος ψύξης του Newton *Λύστε τη διαφορική εξίσωση για τον νόμο ψύξης του Newton για να βρείτε τη θερμοκρασία στις παρακάτω περιπτώσεις. Στη συνέχεια απαντήστε κάθε άλλη ερώτηση.*

27. Ένα φλυτζάνι καφέ έχει θερμοκρασία 90°C όταν σερβίρεται και αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με θερμοκρασία 25°C. Ένα λεπτό μετά το σερβίρισμα ο καφές έχει θερμοκρασία 85°C. Πόσο πρέπει να περιμένετε μέχρι να μπορείτε να πιείτε τον καφέ σε θερμοκρασία 30°C;

28. Μια σιδερένια ράβδος απομακρύνεται από το καμίνι ενός σιδηρουργού με θερμοκρασία 900°C. Αν υποθέσουμε ότι $k = 0.02$

και η ράβδος ψύχεται σε έναν χώρο θερμοκρασίας 30°C, πότε φτάνει η θερμοκρασία της ράβδου τους 100°C;

29. Ένα ποτήρι με γάλα μεταφέρεται από το ψυγείο που έχει θερμοκρασία 5°C σε ένα δωμάτιο θερμοκρασίας 20°C. Ένα λεπτό αργότερα το γάλα έχει φτάσει σε θερμοκρασία 7°C. Μετά από πόσα λεπτά το γάλα θα έχει θερμοκρασία ίση με το 90% της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος;

30. Μια κατσαρόλα με σούπα που βράζει (100°C), μεταφέρεται σε έναν χώρο θερμοκρασίας 10°C. Μετά από 30 λεπτά, η σούπα έχει ψυχθεί στους 80°C. Πότε θα φτάσει σε θερμοκρασία 30°C;

Περαιτέρω διερευνήσεις

31. **Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι** Εξετάστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια ερμηνεία ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Η γενική λύση της $y'(t) = 2y - 18$ είναι $y(t) = 2e^{2t} + 9$.

β. Αν $k > 0$ και $b > 0$, τότε η $y(t) = 0$ δεν μπορεί να είναι λύση της $y'(t) = ky - b$.

γ. Η εξίσωση $y'(t) = ty(t) + 3$ είναι διαχωριζόμενων μεταβλητών και μπορεί να λυθεί με τις μεθόδους αυτής της ενότητας.

δ. Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία ενός θερμού αντικειμένου φτάνει στη θερμοκρασία του περιβάλλοντος μετά από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

32. **Περίπτωση 2 της γενικής λύσης** Λύστε την εξίσωση $y'(t) = ky + b$ στην περίπτωση που $ky + b < 0$ και επαληθεύστε ότι η γενική λύση είναι $y(t) = Ce^{kt} - \frac{b}{k}$.

33–36. Ειδικές εξισώσεις *Μια ειδική κατηγορία γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης έχει τη μορφή $a(t)y'(t) + a'(t)y(t) = f(t)$, όπου A και F είναι δοσμένες συναρτήσεις του t. Παρατηρήστε ότι το αριστερό μέλος αυτής της εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως παράγωγος ενός γινομένου, οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή*

$$a(t)y'(t) + a'(t)y(t) = \frac{d}{dt}(a(t)y(t)) = f(t).$$

Συνεπώς, η εξίσωση μπορεί να λυθεί ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη ως προς t. Χρησιμοποιήστε αυτό για να λύσετε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών.

33. $ty'(t) + y = 1 + t, y(1) = 4$

34. $t^3y'(t) + 3t^2y = \frac{1+t}{t}, y(1) = 6$

35. $e^{-t}y'(t) - e^{-t}y = e^{2t}, y(0) = 4$

36. $(t^2 + 1)y'(t) + 2ty = 3t^2, y(2) = 8$

37. **Μη εξυπηρετούμενο δάνειο** Θεωρήστε ένα πλάνο αποπληρωμής δανείου που περιγράφεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$B'(t) = 0.03B - 600, \quad B(0) = 40{,}000,$$

όπου το δανειζόμενο κεφάλαιο είναι $B(0) = \$40{,}000$, οι μηνιαίες δόσεις είναι \$600, και $B(t)$ είναι το ανεξόφλητο ποσό του δανείου.

α. Βρείτε την λύση του προβλήματος αρχικών τιμών και εξηγήστε γιατί η B είναι μια αύξουσα συνάρτηση.

β. Ποιο είναι το μέγιστο ποσό που μπορείτε να δανειστείτε με τους όρους αυτού του δανείου χωρίς να ρισκάρετε κάθε μήνα;

γ. Θεωρήστε τώρα το πιο γενικό πλάνο αποπληρωμής δανείου που περιγράφεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$B'(t) = rB - m, \quad B(0) = B_0,$$

όπου το $r > 0$ σημαίνει το επιτόκιο, $m > 0$ τη μηνιαία δόση και $B_0 > 0$ είναι το δανειζόμενο κεφάλαιο. Συναρτήσει των m και R, ποιο είναι το μέγιστο ποσό B_0 που μπορείτε να δανειστείτε χωρίς να ρισκάρετε κάθε μήνα;

38. **Χρόνος ψύξης** Υποθέστε ότι ένα αντικείμενο με αρχική θερμοκρασία $T_0 > 0$ τοποθετείται σε περιβάλλον θερμοκρασίας A, με $A < \frac{T_0}{2}$. Αν $t_{1/2}$ είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ψυχθεί το αντικείμενο σε $\frac{T_0}{2}$.

α. Δείξτε ότι $t_{1/2} = -\frac{1}{k}\ln\left[\frac{T_0 - 2A}{2(T_0 - A)}\right]$.

β. Ο $t_{1/2}$ αυξάνει ή μειώνεται όταν το k αυξάνει; Εξηγήστε.

γ. Γιατί είναι αναγκαία η συνθήκη $A < \frac{T_0}{2}$;

Εφαρμογές

T **39.** **Ενδοφλέβια χορήγηση φαρμάκου** Η ποσότητα ενός φαρμάκου στο αίμα ασθενούς (σε milligrams) μέσω ενδοφλέβιας χορήγησης, διέπεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) = -0.02y + 3, y(0) = 0$, όπου το t μετριέται σε ώρες.

α. Βρείτε και σχεδιάστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

β. Ποιο είναι το επίπεδο σταθερής κατάστασης του φαρμάκου;

γ. Πότε το επίπεδο του φαρμάκου φτάνει στο 90% της τιμής της σταθερής κατάστασης;

T **40.** **Αλίευση** Σε ένα ιχθυοτροφείο υπάρχουν 500 ψάρια τη στιγμή $t = 0$, όταν αρχίζει η αλίευση με ρυθμό $b > 0$ ψάρια /έτος. Ο πληθυσμός των ψαριών εκφράζεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'(t) = 0.01y - b, y(0) = 500$, όπου το t μετριέται σε χρόνια.

α. Βρείτε τον πληθυσμό των ψαριών για $t \geq 0$, σε σχέση με τον ρυθμό αλίευσης b.

β. Να κάνετε το γράφημα της λύσης στην περίπτωση που $b = 40$ ψάρια /έτος. Περιγράψτε τη λύση.

γ. Να κάνετε το γράφημα της λύσης στην περίπτωση που $b = 60$ ψάρια /έτος. Περιγράψτε τη λύση.

41. **Βέλτιστος ρυθμός αλίευσης** Έστω $y(t)$ ο πληθυσμός ενός είδους ψαριών που αλιεύεται σε $t \geq 0$. Θεωρούμε το μοντέλο αλίευσης $y'(t) = 0.008y - h, y(0) = y_0$, όπου h είναι η ετήσιος ρυθμός αλίευσης, y_0 ο αρχικός πληθυσμός των ψαριών και το t μετριέται σε χρόνια.

α. Αν $y_0 = 2000$, ποιος ρυθμός αλίευσης θα έπρεπε να εφαρμοστεί για να διατηρηθεί ένας σταθερός πληθυσμός $y = 2000$, για $t \geq 0$;

β. Αν ο ρυθμός είναι $h = 200$/χρόνο, ποιος αρχικός πληθυσμός εξασφαλίζει ένα σταθερό πληθυσμό;

T **42.** **Μοντέλο αποθεματικού** Το μοντέλο αποθεματικού είναι ένας επενδυτικός λογαριασμός στον οποίο το υπόλοιπο ιδανικά παραμένει σταθερό και οι αναλήψεις γίνονται από τους τόκους που αποφέρει ο λογαριασμός. Ένας τέτοιος λογαριασμός μπορεί να μοντελοποιηθεί με το πρόβλημα αρχικών τιμών $B'(t) = rB - m$, για $t \geq 0$, με $B(0) = B_0$. Η σταθερά $r > 0$ εκφράζει την τιμή του ετήσιου τόκου, το $m > 0$ είναι ο ετήσιος ρυθμός ανάληψης, B_0 είναι το αρχικό υπόλοιπο του λογαριασμού και το t μετριέται σε έτη.

α. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών με $r = 0.05$, $m = \$1000$/έτος, και $B_0 = \$15{,}000$. Το υπόλοιπο του λογαριασμού αυξάνεται ή μειώνεται;

β. Αν $r = 0.05$ και $B_0 = \$50{,}000$, ποιος είναι ετήσιος ρυθμός ανάληψης m που εξασφαλίζει σταθερό υπόλοιπο του λογαριασμού; Ποιο είναι αυτό το σταθερό υπόλοιπο;

Πρόσθετες ασκήσεις

43. Αλλαγή μεταβλητών σε μια εξίσωση Bernoulli Η εξίσωση $y'(t) + ay = by^p$, όπου A, b, και p είναι πραγματικοί αριθμοί, ονομάζεται *εξίσωση Bernoulli*. Εκτός από την περίπτωση $p = 1$, η εξίσωση είναι μη γραμμική και φαίνεται δύσκολο να λυθεί — εκτός αν κάνουμε ένα μικρό τέχνασμα. Με την αλλαγή των μεταβλητών $v(t) = (y(t))^{1-p}$, η εξίσωση μπορεί να μετατραπεί σε γραμμική. Εκτελέστε τα ακόλουθα βήματα.

α. Θέτοντας $v = y^{1-p}$, δείξτε ότι $y'(t) = \dfrac{y(t)^p}{1-p}v'(t)$.

β. Αντικαταστήστε αυτή την έκφραση για $y'(t)$ στη διαφορική εξίσωση και απλοποιήστε ώστε να προκύψει η νέα (γραμμική) εξίσωση $v'(t) + a(1-p)v = b(1-p)$, η οποία μπορεί να λυθεί με τις μεθόδους αυτής της ενότητας. Η λύση y της αρχικής εξίσωσης μπορεί τότε να προκύψει από το v.

44. Λύση εξισώσεων Bernoulli Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο που περιγράφεται συνοπτικά στην Άσκηση 43 για να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις Bernoulli.

α. $y'(t) + y = 2y^2$

β. $y'(t) - 2y = 3y^{-1}$

γ. $y'(t) + y = \sqrt{y}$

45–48. Γενικές γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης *Θεωρήστε τη γενική γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης* $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$. *Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί, αρχικά, προσδιορίζοντας τον* ολοκληρωτικό παράγοντα $p(t) = \exp\left(\int a(t)\,dt\right)$. *Ο ολοκληρωτικός παράγοντας λειτουργεί ως εξής. Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης επί p (το οποίο είναι πάντοτε θετικό) και δείχνουμε ότι το αριστερό μέλος είναι μια παράγωγος. Τότε η εξίσωση γίνεται*

$$p(t)(y'(t) + a(t)y(t)) = \frac{d}{dt}(p(t)y(t)) = p(t)f(t).$$

Ολοκληρώνουμε τώρα ως προς t τα δύο μέλη της εξίσωσης για να προκύψει η λύση. Χρησιμοποιήστε αυτή τη μέθοδο για να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών. Ξεκινήστε υπολογίζοντας τον αναγκαίο ολοκληρωτικό παράγοντα.

45. $y'(t) + \dfrac{1}{t}y(t) = 0, \quad y(1) = 6$

46. $y'(t) + \dfrac{3}{t}y(t) = 1 - 2t, \quad y(2) = 0$

47. $y'(t) + \dfrac{2t}{t^2+1}y(t) = 1 + 3t^2, \quad y(1) = 4$

48. $y'(t) + 2ty(t) = 3t, \quad y(0) = 1$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $y'(t) = Cke^{kt}$, όταν $ky + b = k(Ce^{kt} - b/k) + b = Cke^{kt}$. **2.** Το επίπεδο σταθερής κατάστασης του φαρμάκου θα είναι $y = 20$. **3.** Η λύση ισορροπίας $y = 2$ είναι ασταθής. **4.** $T(0) = (T_0 - A) + A = T_0$. Αν $T_0 = A$, $T(t) = A$ για όλα τα $t \geq 0$. **5.** Η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι μια ευσταθής ισορροπία.

Δ1.5 Μοντελοποίηση με διαφορικές εξισώσεις

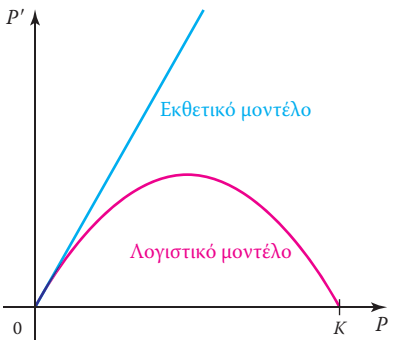
Πολλά παραδείγματα και ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου έχουν παρασταθεί γραφικά ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα την χρήση των διαφορικών εξισώσεων στη μοντελοποίηση ποικίλων προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Σε αυτή την τελευταία ενότητα, εστιάζουμε σε τρεις ειδικές εφαρμογές και εξετάζουμε ορισμένες από τις ιδέες που περιλαμβάνονται στη διαμόρφωση μαθηματικών μοντέλων. Η πρώτη εφαρμογή είναι η μοντελοποίηση πληθυσμών, παραδείγματα της οποίας έχουμε ήδη συναντήσει. Στην επόμενη βρίσκουμε την διαφορική εξίσωση που διέπει μια αντίδραση σε δεξαμενή ανάμειξης. Τέλος, παρουσιάζουμε και αναλύουμε το ιδιαίτερο γνωστό μοντέλο ενός οικοσυστήματος με δύο είδη.

Μοντέλα πληθυσμού

Μέχρι τώρα έχουμε συναντήσει δύο παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων που μοντελοποιούν την αύξηση του πληθυσμού. Αν θέσουμε $P(t)$ τον πληθυσμό ενός είδους τη χρονική στιγμή $t \geq 0$, τότε και οι δύο εξισώσεις έχουν τη γενική μορφή $P'(t) = f(P)$, όπου $f(P)$ είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από τον πληθυσμό και R και K είναι σταθερές.

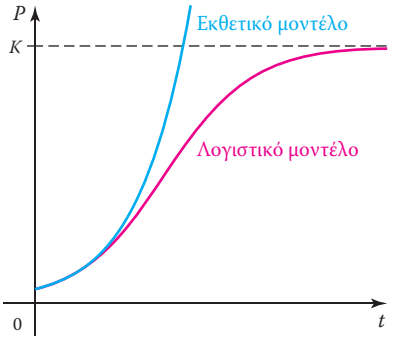
$$\text{Εκθετική αύξηση: } P'(t) = f(P) = rP$$

$$\text{Λογιστική αύξηση: } P'(t) = f(P) = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$



Σχήμα Δ1.25

Η **συνάρτηση του ρυθμού αύξησης** F δηλώνει τον ρυθμό αύξησης του πληθυσμού και επιλέγεται για να δώσει την καλύτερη περιγραφή του πληθυσμού. Στο Σχήμα Δ1.25 δίνεται ένα γράφημα των συναρτήσεων ρυθμού αύξησης για εκθετικά και λογιστικά μοντέλα. Σημειώστε ότι ο πληθυσμός P είναι η μεταβλητή στον οριζόντιο άξονα και η συνάρτηση του ρυθμού αύξησης, που δηλώνεται με P', βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα. Και στις δύο



Σχήμα Δ1.26

περιπτώσεις, η συνάρτηση του ρυθμού αύξησης είναι μη αρνητική, οπότε τα δύο μοντέλα περιγράφουν πληθυσμούς που γενικά είναι αύξοντες. Οι τιμές πληθυσμού για $f(P) = 0$ αντιστοιχούν στις λύσεις ισορροπίας.

Για το εκθετικό μοντέλο, η συνάρτηση του ρυθμού αύξησης αυξάνει γραμμικά σε σχέση με το μέγεθος του πληθυσμού, που σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο πληθυσμός, τόσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός αύξησης. Συνεπώς, με αυτό το μοντέλο, οι πληθυσμοί αυξάνουν (θεωρητικά) χωρίς όριο (Σχήμα Δ1.26).

Η συνάρτηση ρυθμού αύξησης για το λογιστικό μοντέλο έχει λύσεις στα $P = 0$ και $P = K$ (σημεία ισορροπίας) και έχει τοπικό μέγιστο στο $P = K/2$. Ως εκ τούτου, ο πληθυσμός αυξάνει αργά στην αρχή, πλησιάζει μια μέγιστη τιμή αύξησης και μετά αναπτύσσεται πιο αργά καθώς προσεγγίζει την τιμή της **φέρουσας ικανότητας** (του πληθυσμού) $P = K$ (Σχήμα Δ1.26). Το σημαντικό χαρακτηριστικό αυτού του μοντέλου είναι ότι ο πληθυσμός περιορίζεται ως προς το μέγεθος, εκφράζοντας υπερπληθυσμό ή έλλειψη πόρων.

Μια σημαντική παρατήρηση στο λογιστικό μοντέλο είναι ότι όταν ο πληθυσμός είναι σημαντικά μικρότερος σε σύγκριση με την τιμή της φέρουσας ικανότητας (συμβολίζουμε $P \ll K$), ο πληθυσμός αυξάνεται εκθετικά με σταθερή τιμή r. Αυτό το βλέπουμε στην συνάρτηση ρυθμού αύξησης:

$$f(P) = rP\left(1 - \underbrace{\frac{P}{K}}_{\text{μικρό}}\right) \approx rP.$$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Εξηγήστε γιατί η μέγιστη τιμή του ρυθμού αύξησης για το λογιστικό μοντέλο, επιτυγχάνεται στο σημείο $P = K/2$. ◄

Αυτό είναι επίσης εμφανές στο Σχήμα Δ1.26, όπου οι καμπύλες πληθυσμού σχεδόν συμπίπτουν για μικρές τιμές του t. Συνεπώς το r μπορεί να εμφανίζεται ως φυσικός ρυθμός αύξησης των ειδών σε ιδανικές συνθήκες (απεριόριστος χώρος και πόροι).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Σχεδιασμός λογιστικού μοντέλου** Οι βιολόγοι της άγριας ζωής παρατήρησαν για αρκετά χρόνια έναν συγκεκριμένο πληθυσμό κυνόμυων (είδος τρωκτικών). Όταν άρχισαν τις παρατηρήσεις, υπήρχαν 8 κυνόμυες. Μετά από έναν χρόνο ο πληθυσμός έφτασε τους 20 κυνόμυες. Μετά 10 χρόνια ο πληθυσμός είχε φτάσει οριακά τους 200 κυνόμυες. Υποθέτοντας πως σε αυτό το παράδειγμα εφαρμόζεται ένα λογιστικό μοντέλο αύξησης, βρείτε μια συνάρτηση που μοντελοποιεί τον πληθυσμό.

ΛΥΣΗ Οι μετρήσεις των βιολόγων υποθέτουν ότι ο αρχικός πληθυσμός είναι $P_0 = 8$ και η τιμή της φέρουσας ικανότητας του πληθυσμού είναι $K = 200$. Χρησιμοποιώντας τη λογιστική εξίσωση, το πρόβλημα αρχικών τιμών που προκύπτει είναι

$$P'(t) = rP\left(1 - \frac{P}{200}\right), \quad P(0) = P_0 = 8.$$

Εφαρμόζοντας τις μεθόδους της Ενότητας Δ1.3, η λύση αυτού του προβλήματος (Άσκηση 33) είναι

$$P(t) = \frac{200}{24e^{-rt} + 1}.$$

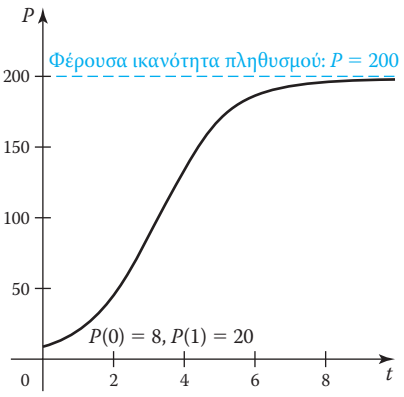
Σημειώστε ότι ο φυσικός ρυθμός αύξησης R δεν έχει ακόμη προσδιοριστεί. Υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο πληθυσμός μετά από έναν χρόνο είναι 20 κυνόμυες. Αντικαθιστώντας το $P(1) = 20$ στη λύση έχουμε

$$P(1) = \frac{200}{24e^{-r} + 1} = 20 \qquad \text{Αντικατάσταση } t = 1 \text{ και } P = 20.$$

$$e^{-r} = \frac{3}{8} \qquad \text{Απλοποίηση}$$

$$r = -\ln\frac{3}{8} \approx 0.981. \qquad \text{Λογαρίθμηση των δύο πλευρών}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του R, βρίσκουμε τη συνάρτηση πληθυσμού που εμφανίζεται στο Σχήμα Δ1.27. Παρατηρήστε ότι ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $P(0) = 8, P(1) \approx 20$, και ο πληθυσμός πλησιάζει την τιμή της φέρουσας ικανότητας του πληθυσμού των 200 κυνόμυων.



Σχήμα Δ1.27

Σχετικές ασκήσεις 9–18 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Μοντέλο αύξησης όγκων Gompertz** Τα μοντέλα αύξησης καρκινικών όγκων ακολουθούν συχνά την εξίσωση Gompertz

$$M'(t) = -rM \ln\left(\frac{M}{K}\right),$$

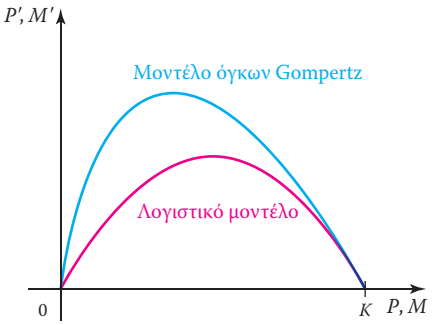
όπου $M(t)$ είναι η μάζα του όγκου σε χρόνο $t \geq 0$, και r και K θετικές σταθερές.

α. Να κάνετε το γράφημα της συνάρτησης ρυθμού αύξησης όγκων για το μοντέλο Gompertz με $M > 0$, μελετήστε τα χαρακτηριστικά της και να συγκρίνετε με τη συνάρτηση ρυθμού αύξησης του λογιστικού μοντέλου.

β. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης Gompertz με θετικές τιμές των r, K, και $M(0) = M_0$, υποθέτοντας ότι $0 < M_0 < K$.

γ. Να κάνετε το γράφημα της λύσης του μέρους (β) όταν $r = 0.5$, $K = 10$, και $M_0 = 0.01$.

ΛΥΣΗ



Σχήμα Δ1.28

α. Η συνάρτηση ρυθμού αύξησης $f(M) = -rM \ln\left(\frac{M}{K}\right)$ είναι μια μερική περίπτωση της συνάρτησης ρυθμού αύξησης του λογιστικού μοντέλου (Σχήμα Δ1.28). Αφήνεται να αποδειχθεί ως άσκηση (Άσκηση 32) ότι το μοντέλο όγκων Gompertz έχει μέγιστο ρυθμό αύξησης rK/e όταν $M = K/e$ (σε σύγκριση με τη συνάρτηση ρυθμού αύξησης του λογιστικού μοντέλου, που έχει μέγιστο $rK/4$ όταν $P = K/2$).

β. Η εξίσωση Gompertz είναι χωριζόμενων μεταβλητών και λύνεται με τις μεθόδους της Ενότητας Δ1.3:

$$\frac{M'(t)}{M \ln\left(\frac{M}{K}\right)} = -r$$

Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή χωριζόμενων μεταβλητών.

$$\int \frac{dM}{M \ln\left(\frac{M}{K}\right)} = -\int r\,dt$$

Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη: $M'(t)\,dt = dM$.

$$\ln\left|\ln\left(\frac{M}{K}\right)\right| = -rt + C$$

Ολοκληρώνουμε με $u = \ln\left(\frac{M}{K}\right)$ στο αριστερό μέλος.

$$\ln\left(\frac{M}{K}\right) = Ce^{-rt}$$

Γράφουμε τα δύο μέλη σε εκθετική μορφή, μετονομάζουμε το $e^{\pm C}$ σε C.

$$M(t) = K\exp(Ce^{-rt}).$$

Γράφουμε τα δύο μέλη σε εκθετική μορφή

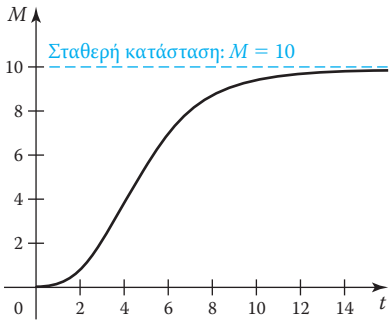
➤ Θυμηθείτε ότι η $\exp(u)$ είναι μια άλλη έκφραση του e^u.

Τώρα έχουμε τη γενική λύση. Η αρχική συνθήκη $M(0) = M_0$ συνεπάγεται ότι $M_0 = Ke^C$. Λύνουμε ως προς C, και βρίσκουμε $C = \ln\frac{M_0}{K}$.

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του C στη γενική λύση έχουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (Άσκηση 19):

$$M(t) = K\left(\frac{M_0}{K}\right)^{\exp(-rt)}.$$

Θα πρέπει να επαληθεύσετε ότι αυτή η ασυνήθιστη λύση, ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $M(0) = M_0$. Εκτός αυτού η λύση έχει μια μόνιμη κατάσταση που δίνεται από το $\lim_{t\to\infty} M(t) = K$ (Άσκηση 34).



Σχήμα Δ1.29

γ. Το γράφημα της λύσης με $r = 0.5$, $K = 10$, και $M_0 = 0.01$ φαίνεται στο Σχήμα Δ1.29. Παρατηρήστε ότι η λύση πλησιάζει την μάζα του επιπέδου σταθερής κατάστασης $M = K = 10$.

Σχετικές ασκήσεις 20–22 ◄

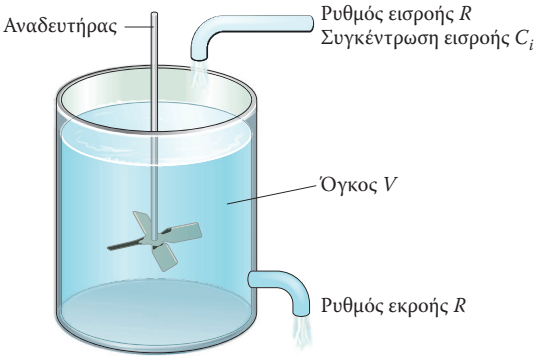
Αντιδράσεις σε δοχείο ανάδευσης

Τα μοντέλα των αντιδράσεων σε δοχεία ανάδευσης με τις πολλές μορφές και παραλλαγές τους, χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση βιομηχανικών και παραγωγικών διαδικασιών. Επίσης, έχουν προσαρμοστεί ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν σε προβλήματα φυσιολο-

➤ Στη βιολογία, σύστημα οργάνων, που ονομάζεται επίσης βιολογικό σύστημα, είναι μια ομάδα οργάνων που συνεργάζονται για την εκτέλεση μιας συγκεκριμένης λειτουργίας. Μια ομάδα συστημάτων συνθέτει ένα οργανισμό, π.χ. το ανθρώπινο σώμα.

γίας, όπως είναι η αφομοίωση των φαρμάκων από ένα σύστημα οργάνων. Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν αυτές τις αντιδράσεις μπορούν να προκύψουν από θεμελιώδεις αρχές και έχουμε τα εργαλεία για να τις λύσουμε.

Μια αντίδραση σε δοχείο ανάδευσης δημιουργείται σε ένα μεγάλο δοχείο που είναι αρχικά γεμάτο με ένα διάλυμα διαλυτής ουσίας, όπως αλάτι ή ζάχαρη. Το διάλυμα έχει γνωστή την αρχική συγκέντρωση της ουσίας, μετρημένη σε γραμμάρια ανά λίτρο (g/L). Το δοχείο γεμίζει με έναν σωλήνα εισροής με γνωστό ρυθμό R λίτρων ανά δευτερόλεπτο (L/s) με ένα διάλυμα της ίδιας ουσίας που έχει γνωστή συγκέντρωση C_i g/L. Το δοχείο είναι επίσης εφοδιασμένο με έναν σωλήνα εκροής που επιτρέπει την εκροή του διαλύματος με ρυθμό ίσο με τον ρυθμό εισροής R (L/s). Άρα σε κάθε χρονική στιγμή ο όγκος του διαλύματος, που συμβολίζεται με V και μετριέται σε λίτρα, είναι σταθερός. Η σύνθεση του δοχείου και οι ονομασίες των διαφόρων παραμέτρων φαίνονται στο Σχήμα Δ1.30.



Σχήμα Δ1.30

Θεωρήστε ότι σε χρόνο $t = 0$, οι σωλήνες εισροής και εκροής είναι ανοιχτοί και το διάλυμα εισέρχεται και εξέρχεται από το δοχείο. Δεχόμαστε ότι σε κάθε χρονική στιγμή το δοχείο αναδεύεται πλήρως, οπότε το διάλυμα στο δοχείο έχει μια ενιαία —αλλά μεταβαλλόμενη— συγκέντρωση. Ο στόχος είναι να βρεθεί σε κάθε στιγμή η μάζα της ουσίας (αλάτι ή ζάχαρη) στο δοχείο.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Θεωρήστε ότι το δοχείο είναι γεμάτο με διάλυμα αλατιού που αρχικά έχει συγκέντρωση 50 g/L και ο σωλήνας εισροής μεταφέρει καθαρό νερό (συγκέντρωσης 0 g/L). Αν η διαδικασία της ανάδευσης διαρκεί αρκετό χρόνο, ποια είναι η τελική συγκέντρωση αλατιού στο δοχείο; ➤

Το κλειδί στην μοντελοποίηση της αντίδρασης ανάδευσης είναι ότι

$$\text{συγκέντρωση} = \frac{\text{μάζα}}{\text{όγκος}} \quad \text{ή} \quad \text{μάζα} = \text{συγκέντρωση} \cdot \text{όγκος}.$$

Αν $m(t)$ είναι η μάζα της ουσίας στο δοχείο σε χρόνο $t \geq 0$, με δοσμένη την $m(0) = m_0$. Δεχόμενοι ότι η μάζα $m(t)$ είναι γνωστή σε κάποιο χρόνο t, αναρωτιόμαστε πώς μεταβάλλεται σε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[t, t + \Delta t]$ για να δώσει μια νέα μάζα $m(t + \Delta t)$. Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε όλη την μάζα που εισέρχεται και εξέρχεται από το δοχείο σε αυτό το χρονικό διάστημα. Η μάζα μεταβάλλεται ως εξής:

$$\underbrace{m(t + \Delta t)}_{\substack{\text{μάζα στο τέλος}\\ \text{του διαστήματος}}} \approx \underbrace{m(t)}_{\substack{\text{παρούσα}\\ \text{ποσότητα}}} + \underbrace{\textit{μάζα που εισέρχεται}}_{C_iR\Delta t} - \underbrace{\textit{μάζα που εξέρχεται.}}_{\frac{m(t)}{V}R\Delta t}$$

Το κύριο θέμα στη μοντελοποίηση της διαδικασίας είναι να προσδιοριστούν σε αυτή την εξίσωση οι όροι εισροής και εκροής. Θεωρήστε πρώτα την εισροή. Το διάλυμα ρέει με ρυθμό R L/s, οπότε ο όγκος του διαλύματος που εισρέει στο δοχείο σε Δt sec είναι $R\Delta t$ λίτρα (επαληθεύστε τις μονάδες). Το διάλυμα που εισρέει στο δοχείο έχει συγκέντρωση C_i g/L;, άρα η μάζα της ουσίας που εισρέει σε χρόνο Δt είναι

$$\underbrace{C_i}_{\substack{\text{συγκέντρωση}\\ \text{g/L}}} \cdot \underbrace{R}_{\substack{\text{ρυθμός}\\ \text{εισροής L/s}}} \cdot \underbrace{\Delta t}_{\substack{\text{χρονικό}\\ \text{διάστημα}}} \quad (\text{γραμμάρια}).$$

(Θυμηθείτε ότι μάζα = συγκέντρωση · όγκος; Ελέγξτε τις μονάδες.)

Ας εξετάσουμε τώρα το θέμα της εκροής. Σε χρόνο t, η μάζα της ουσίας στο δοχείο είναι $m(t)$, άρα η συγκέντρωση του διαλύματος είναι $m(t)/V$ g/L. Όπως με την εισροή, ο όγκος του διαλύματος που εξέρχεται από το δοχείο σε Δt sec είναι $R\Delta t$ λίτρα και η μάζα της ουσίας που εκρέει σε χρόνο Δt είναι

$$\underbrace{\frac{m(t)}{V}}_{\substack{\text{συγκέντρωση}\\ \text{g/L}}} \cdot \underbrace{R}_{\substack{\text{ρυθμός}\\ \text{εκροής}\\ \text{L/s}}} \cdot \underbrace{\Delta t}_{\substack{\text{χρονικό}\\ \text{διάστημα}}} \quad (\text{γραμμάρια}).$$

Αντικαθιστούμε τώρα αυτές τις ποσότητες στην εξίσωση μεταβολής μάζας:

$$m(t + \Delta t) \approx m(t) + \underbrace{C_iR\Delta t}_{\text{εισροή}} - \underbrace{\frac{m(t)}{V}R\Delta t}_{\text{εκροή}}.$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί προσέγγιση διότι η μάζα της ουσίας μεταβάλλεται στο χρονικό διάστημα $[t, t + \Delta t]$. Η προσέγγιση γίνεται ακριβέστερη όσο μειώνεται το χρονικό διάστημα Δt. Διαιρούμε με Δt: στην εξίσωση μεταβολής της μάζας:

$$\underbrace{\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t}}_{\to m'(t) \text{ καθώς } \Delta t \to 0} \approx C_i R - \frac{m(t)}{V} R.$$

Παρατηρήστε ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης προσεγγίζει την παράγωγο $m'(t)$ καθώς το Δt πλησιάζει στο μηδέν. Το αποτέλεσμα είναι μια διαφορική εξίσωση που διέπει την ποσότητα της ουσίας στο δοχείο ανάδευσης. Έχουμε να λύσουμε ένα γνωστό γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών πρώτης τάξεως:

$$m'(t) = -\frac{R}{V} m(t) + C_i R, \quad m(0) = m_0.$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης αναλύεται στην Άσκηση 35.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 **Ένα δοχείο ανάδευσης** Ένα δοχείο 1000-L είναι γεμάτο με διάλυμα άλμης (αλατιού) με αρχική συγκέντρωση 5 g/L. Ένα διάλυμα άλμης με συγκέντρωση 25 g/L εισρέει στο δοχείο με ρυθμό 8 L/s, ενώ το διάλυμα που αναμειγνύεται συνεχώς εκρέει από το δοχείο με 8 L/s.

α. Βρείτε την ποσότητα του αλατιού στο δοχείο για $t \geq 0$.

β. Βρείτε τη συγκέντρωση του διαλύματος στο δοχείο για $t \geq 0$.

ΛΥΣΗ

α. Μας έχει δοθεί η αρχική συγκέντρωση του διαλύματος στο δοχείο. Για να βρούμε την αρχική ποσότητα του αλατιού στο δοχείο, πολλαπλασιάζουμε τη συγκέντρωση με τον όγκο:

$$m_0 = 1000 \text{ L} \cdot 5 \frac{\text{g}}{\text{L}} = 5000 \text{ g}.$$

Η συγκέντρωση εισροής είναι $C_i = 25$ g/L και ο ρυθμός εκροής $R = 8$ L/s. Συνεπώς το πρόβλημα αρχικών τιμών για την αντίδραση είναι

$$m'(t) = -\frac{8}{1000} m(t) + 25 \cdot 8$$

$$= -0.008 m(t) + 200, \quad m(0) = 5000.$$

Πρόκειται για μια εξίσωση της μορφής $y'(t) = ky + b$, που έχει συζητηθεί στην Ενότητα Δ1.4. Θέτουμε $k = -0.008$ και $b = 200$, και η γενική λύση είναι

$$m(t) = Ce^{kt} - \frac{b}{k} = Ce^{-0.008t} - \frac{200}{(-0.008)} = Ce^{-0.008t} + 25{,}000.$$

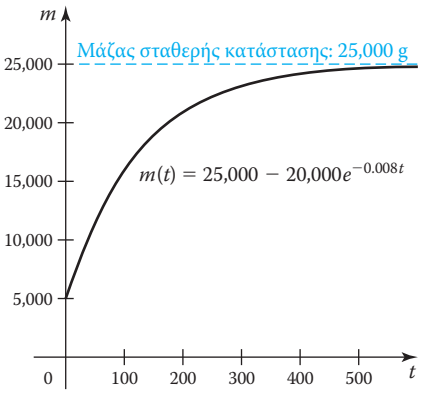
Η αρχική συνθήκη $m(0) = 5000$, όταν αντικατασταθεί στη γενική λύση, συνεπάγεται ότι

$$5000 = C + 25{,}000 \quad \Rightarrow \quad C = -20{,}000.$$

Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$m(t) = 25{,}000 - 20{,}000e^{-0.008t}.$$

Το γράφημα της m (Σχήμα Δ1.31) δείχνει ότι η ποσότητα του αλατιού στο δοχείο προσεγγίζει τα 25,000 g καθώς το t αυξάνεται. Αυτή η ποσότητα αντιστοιχεί σε συγκέντρωση 25,000 g/1000 L = 25 g/L, που είναι η συγκέντρωση του διαλύματος εισροής. Όσο αυξάνεται ο χρόνος, το αρχικό διάλυμα στο δοχείο αντικαθίσταται από το διάλυμα εισροής.

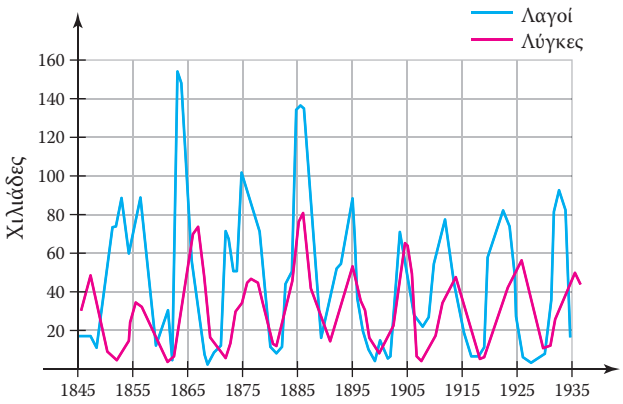


Σχήμα Δ1.31

β. Η συγκέντρωση βρίσκεται αν διαιρέσουμε τη συνάρτηση μάζας με τον όγκο του δοχείου. Άρα η συνάρτηση συγκέντρωσης είναι

$$C(t) = 25 - 20e^{-0.008t}, \text{ για } t \geq 0.$$

Σχετικές ασκήσεις 23–26 ◄



Σχήμα Δ1.32

➤ Το αυθεντικό μοντέλο κυνηγού-θηράματος αποδίδεται στον βέλγο μαθηματικό Pierre François Verhulst (1804–1849). Το μοντέλο βελτιώθηκε περαιτέρω από τον αμερικανό βιοφυσικό Alfrend Lotka και τον ιταλό μαθηματικό Vito Voltera, ο οποίο το χρησιμοποίησε για να μελετήσει πληθυσμούς καρχαριών. Αυτές οι εξισώσεις ονομάζονται επίσης εξισώσεις Lotka-Voltera.

Μοντέλα κυνηγού-θηράματος

Το περισσότερο ίσως γνωστό γράφημα της οικολογίας για τη ζωή άγριων ζώων προσφέρει δεδομένα 100 ετών, που έχουν συλλεχθεί από την Hudson Bay, για τους πληθυσμούς του καναδέζικου λύγκα και του λευκού λαγού (Σχήμα Δ1.32). Τα αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά αυτών των γραφημάτων είναι οι διαδοχικές αυξομειώσεις των δύο πληθυσμών και το γεγονός ότι ο πληθυσμός των λαγών δεν είναι εναρμονισμένος με τον πληθυσμό του λύγκα. Γενικώς, δύο είδη μπορεί να αλληλεπιδρούν με έναν τρόπο ανταγωνιστικό, με συνεργατικό τρόπο, ή όπως στην περίπτωση του ζεύγους λύγκα-λαγού, ως κυνηγός και θήραμα. Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε το θεμελιώδες μοντέλο που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις κυνηγού-θηράματος.

Πρέπει λοιπόν να θεωρήσουμε ένα σύστημα που να αποτελείται από δύο είδη —έναν κυνηγό και ένα θήραμα— και να επινοήσουμε ένα *ζεύγος* διαφορικών εξισώσεων που να περιγράφουν τις αλληλεπιδράσεις τους και οι λύσεις των οποίων μας δίνει τους πληθυσμούς τους. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, έστω ότι οι κυνηγοί είναι αλεπούδες που ο πληθυσμός τους σε χρόνο $t \geq 0$ είναι $F(t)$, και έστω ότι τα θηράματα είναι λαγοί που ο πληθυσμός τους σε χρόνο $t \geq 0$ είναι $H(t)$. Εδώ είναι οι υποθέσεις που ορίζουν το μοντέλο.

- Στην απουσία λαγών (θήραμα), ο πληθυσμός των αλεπούδων μειώνεται εκθετικά, ενώ τα «συναπαντήματα» λαγών και αλεπούδων αυξάνουν τον πληθυσμό των αλεπούδων (οι λαγοί είναι η τροφή τους).
- Στην απουσία αλεπούδων (κυνηγοί), ο πληθυσμός των λαγών αυξάνει εκθετικά, ενώ τα «συναπαντήματα» λαγών και αλεπούδων εξαφανίζουν τον πληθυσμό των λαγών (οι αλεπούδες τρώνε τους λαγούς).

Εδώ είναι ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων που συμπεριλαμβάνει αυτές τις υποθέσεις.

$$\underbrace{F'(t)}_{\text{ρυθμός μεταβολής πληθυσμού αλεπούδων}} = \underbrace{-aF(t)}_{\text{φυσική μείωση αλεπούδων}} + \underbrace{bF(t)H(t)}_{\text{αύξηση αλεπούδων οφειλόμενη στα «συναπαντήματα» με λαγούς}}$$

$$\underbrace{H'(t)}_{\text{ρυθμός μεταβολής πληθυσμού λαγών}} = \underbrace{cH(t)}_{\text{φυσική αύξηση πληθυσμού λαγών}} - \underbrace{dF(t)H(t)}_{\text{μείωση λαγών οφειλόμενη σε «συναπαντήματα» με αλεπούδες}}$$

Σε αυτές τις εξισώσεις, τα a, b, c, και d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Παρατηρήστε ότι στην πρώτη εξίσωση, ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού των αλεπούδων μειώνεται από το μέγεθος του πληθυσμού των αλεπούδων και αυξάνεται από τον αριθμό των «αλληλεπιδράσεων» αλεπούδων και λαγών. Υποτίθεται ότι ο αριθμός των «αλληλεπιδράσεων» αλεπούδων και λαγών είναι ανάλογος του γινομένου των πληθυσμών αλεπούδων και λαγών. Στη δεύτερη εξίσωση, ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού των λαγών αυξάνεται από το μέγεθος του πληθυσμού των λαγών και μειώνεται από τον αριθμό των «αλληλεπιδράσεων» αλεπούδων και λαγών.

Δεν έχουμε κάποια μέθοδο για να λύσουμε αυτό το ζεύγος εξισώσεων. Πράγματι, η εύρεση μια αναλυτικής λύσης αποτελεί πρόκληση (Άσκηση 39). Ευτυχώς μπορούμε να καταφύγουμε σε ένα γνωστό εργαλείο μελέτης λύσεων: τα διανυσματικά πεδία. Σε αυτή την περίπτωση όμως, επειδή υπάρχουν δύο άγνωστες λύσεις, το διανυσματικό πεδίο σχεδιάζεται στο επίπεδο FH.

Ας ξαναγράψουμε πιο συνεκτικά τις εξισώσεις.

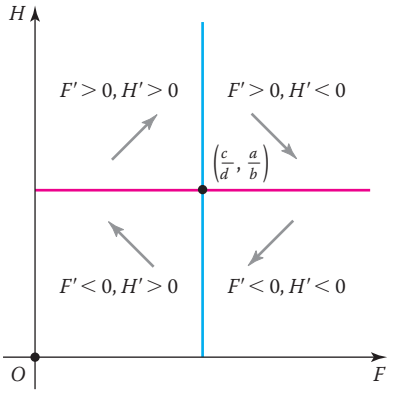
$$F'(t) = -aF + bFH = F(-a + bH)$$

$$H'(t) = cH - dFH = H(c - dF)$$

Όπως με τα διανυσματικά πεδία που μελετήσαμε νωρίτερα, ψάχνουμε για συνθήκες στις οποίες οι παράγωγοι γίνονται μηδέν, θετικές και αρνητικές. Επειδή τα F και H είναι πληθυσμοί, υποθέτουμε ότι παίρνουν μη αρνητικές τιμές.

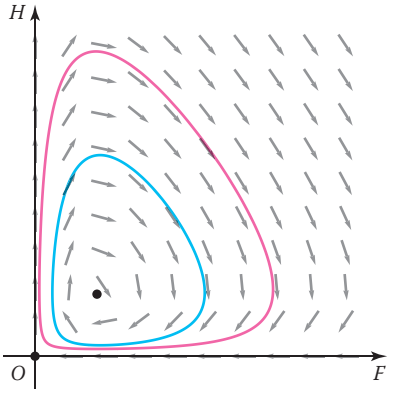
Τα σημεία του επιπέδου FH στα οποία $F'(t) = H'(t) = 0$ είναι ιδιαίτερης σημασίας γιατί αντιστοιχούν στις λύσεις ισορροπίας. Θα πρέπει να επαληθεύσετε ότι υπάρχουν δύο τέτοια σημεία, τα:

$$(F, H) = (0, 0) \text{ και } (F, H) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right).$$



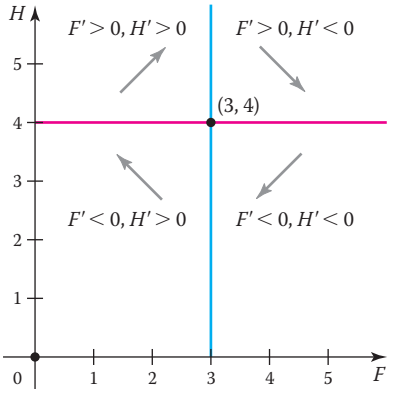
Σχήμα Δ1.33

➤ Παρατηρήστε ότι όταν σχεδιάζουμε λύσεις στο επίπεδο FH, η ανεξάρτητη μεταβλητή t δεν εμφανίζεται αναλυτικά στο γράφημα. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα στο επίπεδο FH είναι διαφορετικό από ένα γράφημα της F ως συνάρτησης του t ή της H ως συνάρτησης του t. Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε από το επίπεδο FH την περίοδο των ταλαντώσεων.



Σχήμα Δ1.34

➤ Οι μεταβλητές στα μοντέλα πληθυσμού εμφανίζονται σε κλίμακα ως προς κάποια ποσότητα. Για παράδειγμα, οι F και H μπορούν να εκφραστούν σε εκατοντάδες ατόμων, οπότε η ισότητα $F = 3$ μπορεί να σημαίνει 300 αλεπούδες.



Σχήμα Δ1.35

Αν οι δύο πληθυσμοί έχουν κάποιες από αυτές τις αρχικές τιμές, τότε παραμένουν για πάντα σταθεροί.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $F > 0$, η συνθήκη $F'(t) = F(-a + bH) > 0$ ικανοποιείται όταν $-a + bH > 0$—ή ισοδύναμα όταν $H > \frac{a}{b}$. Με ανάλογο συλλογισμό, η συνθήκη $F'(t) < 0$ ικανοποιείται όταν $0 < H < \frac{a}{b}$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στην δεύτερη εξίσωση και έχουμε $H'(t) = H(c - dF) > 0$ όταν $0 < F < \frac{c}{d}$ και $H'(t) < 0$ όταν $F > \frac{c}{d}$.

Το Σχήμα Δ1.33 συνοψίζει όσα έχουμε αναφέρει έως τώρα.

Παρατηρούμε ότι η κατακόρυφη ευθεία $F = \frac{c}{d}$ και η οριζόντια ευθεία $H = \frac{a}{b}$ χωρίζουν το πρώτο τεταρτημόριο στο επίπεδο FH σε τέσσερις περιοχές. Σε κάθε περιοχή, οι παράγωγοι των F και H έχουν συγκεκριμένα πρόσημα. Για παράδειγμα, στην περιοχή που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων, έχουμε $F' < 0$ και $H' > 0$, που σημαίνει ότι σε αυτή την περιοχή η F είναι φθίνουσα και η H αύξουσα. Έτσι σημειώνουμε αυτή την περιοχή με ένα βέλος που δείχνει προς την κατεύθυνση της φθίνουσας F και της αύξουσας H. Όλες οι καμπύλες λύσεων σε αυτή την περιοχή κινούνται στην αρνητική κατεύθυνση της F και στην θετική κατεύθυνση της H. Παρόμοιες εξηγήσεις ερμηνεύουν τα βέλη στις άλλες τρεις περιοχές του Σχήμα Δ1.33.

Αν παρατηρήσουμε από μακριά το Σχήμα Δ1.33, μπορούμε να διακρίνουμε τη γενική «ροή» των καμπυλών λύσης. Κινούνται δεξιόστροφα κυκλικά γύρω από το σημείο ισορροπίας. Αν και δεν προκύπτει από αυτή την ανάλυση, αποδεικνύεται ότι οι καμπύλες λύσεων είναι κλειστές καμπύλες. Συνεπώς αν επιλέξουμε έναν αρχικό πληθυσμό αλεπούδων και λαγών, που να αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου FH, η καμπύλη λύσης που προκύπτει τελικώς επιστρέφει στο ίδιο σημείο. Σε όλη την εξέλιξη, οι F και H κινούνται με κυκλικό τρόπο-όπως είδαμε στα δεδομένα της Hudson Bay.

Το Σχήμα Δ1.34 εμφανίζει τις δύο καμπύλες λύσεων μαζί στο διανυσματικό πεδίο.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 **Εξηγήστε γιατί μια κλειστή καμπύλη λύσης στο επίπεδο FH** παριστάνει πληθυσμούς αλεπούδων και λαγών που περιστρέφονται κυκλικά. ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 **Ένα μοντέλο κυνηγού-θηράματος** Θεωρήστε το μοντέλο κυνηγού-θηράματος που δίνεται από τις εξισώσεις

$$F'(t) = -12F + 3FH,$$
$$H'(t) = 15H - 5FH.$$

α. Βρείτε τις ευθείες στις οποίες $F' = 0$ και $H' = 0$, και τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.

β. Να κάνετε ένα σκαρίφημα των τεσσάρων περιοχών του πρώτου τεταρτημορίου του επιπέδου FH και να σημειώσετε τις κατευθύνσεις στις οποίες κινούνται οι καμπύλες λύσεων σε κάθε περιοχή.

γ. Να σχεδιάσετε μια αντιπροσωπευτική καμπύλη λύσης στο επίπεδο FH.

ΛΥΣΗ

α. Από την πρώτη εξίσωση, λύνοντας την $F' = 0$ έχουμε τη συνθήκη

$$-12F + 3FH = 3F(-4 + H) = 0,$$

που συνεπάγεται ότι $F' = 0$ όταν $F = 0$ ή όταν $H = 4$. Από τη δεύτερη εξίσωση λύνοντας την $H' = 0$ συνεπάγεται ότι

$$15H - 5FH = 5H(3 - F) = 0.$$

Συνεπώς, $H' = 0$ όταν $H = 0$ ή όταν $F = 3$. Σημεία ισορροπίας έχουμε όταν $F' = H' = 0$ (ταυτοχρόνως). Αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται στα σημεία $(0, 0)$ και $(F, H) = (3, 4)$. Άρα το σύστημα έχει δύο σημεία ισορροπίας. Αυτές οι παρατηρήσεις καταγράφονται στο Σχήμα Δ1.35.

β. Η οριζόντια ευθεία $H = 4$ και η κατακόρυφη $F = 3$ χωρίζουν το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου FH σε δύο περιοχές. Η συνθήκη

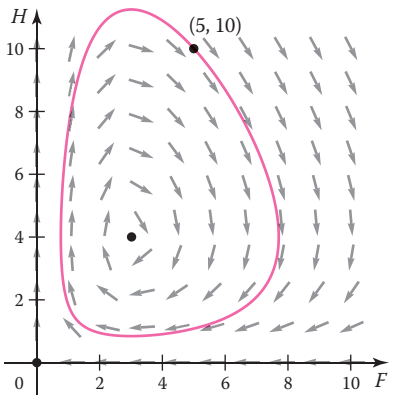
$$F' = -12F + 3FH = 3F(-4 + H) > 0$$

συνεπάγεται ότι $H > 4$ (θυμηθείτε ότι $F > 0$). Έπεται λοιπόν ότι $F' < 0$ όταν $0 < H < 4$. Παρομοίως,

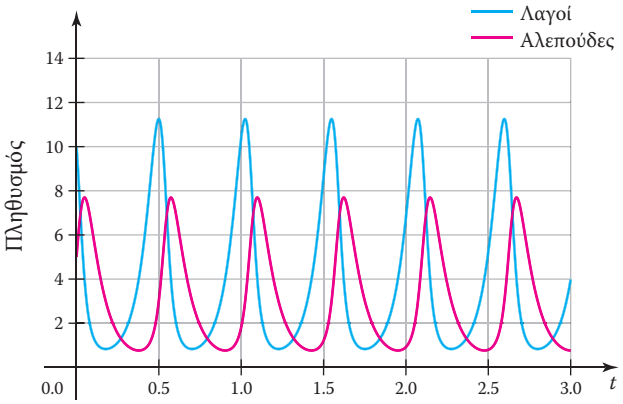
$$H' = 15H - 5FH = 5H(3 - F) > 0$$

όταν $0 < F < 3$, και $H' < 0$ όταν $F > 3$. Και αυτές οι παρατηρήσεις εμφανίζονται στο Σχήμα Δ1.35 και από αυτές μπορούμε να δούμε ότι οι καμπύλες λύσεων περιστρέφονται δεξιόστροφα γύρω από το σημείο ισορροπίας $(3, 4)$.

γ. Το Σχήμα Δ1.36 δείχνει λεπτομερώς το διανυσματικό πεδίο με μια τυπική καμπύλη λύσης πάνω από το διανυσματικό πεδίο.



Σχήμα Δ1.36



Σχήμα Δ1.37

Μια τελευταία άποψη για τις λύσεις προκύπτει με χρήση αριθμητικής μεθόδου, όπως η μέθοδος Euler, για την προσέγγιση των λύσεων των εξισώσεων κυνηγού-θηράματος. Το Σχήμα Δ1.37 απεικονίζει ως συναρτήσεις χρόνου τους πληθυσμούς αλεπούδων και λαγών. Η περιοδική συμπεριφορά είναι προφανής και η περίοδος των ταλαντώσεων φαίνεται να είναι περίπου 0.5 χρονικές μονάδες.

Σχετικές ασκήσεις 27–30 ◄

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ1.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Εξηγήστε πώς η συνάρτηση ρυθμού αύξησης προσδιορίζει τη λύση ενός μοντέλου πληθυσμού.

2. Τι είναι η φέρουσα ικανότητα πληθυσμού; Πώς εκφράζεται με μαθηματικό τρόπο στο γράφημα μιας συνάρτησης πληθυσμού;

3. Εξηγήστε πώς μπορεί να είναι φθίνουσα η συνάρτηση ρυθμού αύξησης ενώ η συνάρτηση πληθυσμού είναι αύξουσα.

4. Εξηγήστε πώς λειτουργεί η αντίδραση σε δοχείο ανάδευσης.

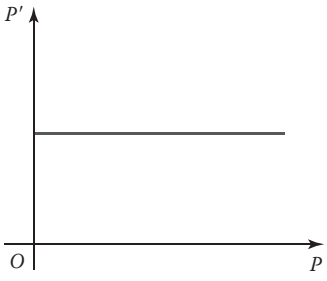
5. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την αντίδραση σε ένα δοχείο ανάδευσης (όπως αναπτύσσεται σε αυτή την ενότητα) είναι γραμμική ή μη γραμμική; Ποια είναι η τάξη της;

6. Ποιες είναι οι υποθέσεις που χαρακτηρίζουν το μοντέλο κυνηγού-θηράματος που αναφέρεται σε αυτή την ενότητα;

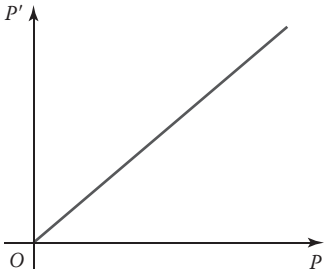
7. Περιγράψτε τις καμπύλες λύσεων σε ένα μοντέλο κυνηγού-θηράματος στο επίπεδο FH.

8. Περιγράψτε τη συμπεριφορά των δύο πληθυσμών σε ένα μοντέλο κυνηγού-θηράματος ως συνάρτηση του χρόνου.

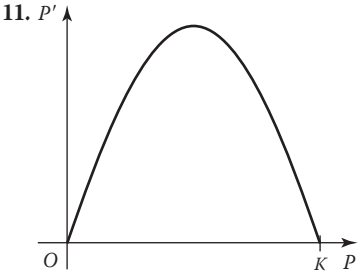
9.



10.



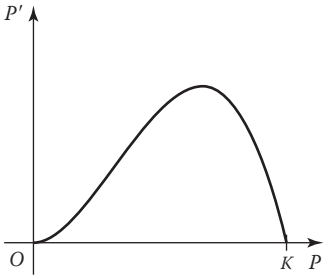
11.



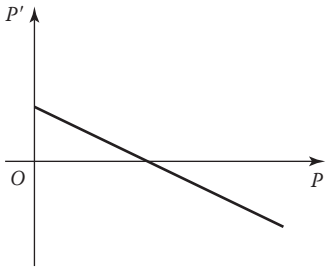
Βασικές δεξιότητες

9–14. Συναρτήσεις ρυθμού αύξησης *Να κάνετε το γράφημα της συνάρτησης πληθυσμού (ως συνάρτησης του χρόνου) που προκύπτει από τις ακόλουθες συναρτήσεις ρυθμού αύξησης. Υποθέστε ότι ο πληθυσμός κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει από μια θετική τιμή.*

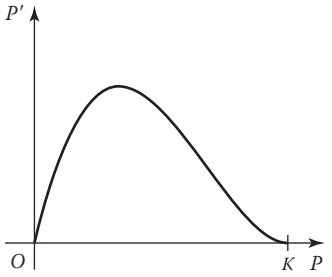
12.



13.



14.



T **15–16. Λύση λογιστικών εξισώσεων** *Γράψτε μια λογιστική εξίσωση με τις ακόλουθες τιμές παραμέτρων. Στη συνέχεια λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών και να κάνετε το γράφημα της λύσης. Έστω R ο ρυθμός φυσικής αύξησης, K η φέρουσα ικανότητα του πληθυσμού και P_0 ο αρχικός πληθυσμός.*

15. $r = 0.2, K = 300, P_0 = 50$

16. $r = 0.4, K = 5500, P_0 = 100$

17–18. Σχεδιασμός λογιστικών συναρτήσεων *Χρησιμοποιήστε την μέθοδο του Παραδείγματος 1 για να βρείτε μια λογιστική συνάρτηση που περιγράφει τους παρακάτω πληθυσμούς. Σχεδιάστε τη συνάρτηση πληθυσμού.*

17. Ο πληθυσμός αυξάνει από 200 σε 600 τον πρώτο χρόνο και τελικώς φτάνει το 2000.

18. Ο πληθυσμός αυξάνει από 50 σε 60 τον πρώτο μήνα και τελικώς φτάνει το 150.

19. Γενική λύση Gompertz Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$M'(t) = -rM \ln\left(\frac{M}{K}\right), \quad M(0) = M_0$$

με αρχικές θετικές τιμές R, K, και M_0.

T **20–22. Λύση της εξίσωσης Gompertz** *Λύστε την εξίσωση Gompertz της Άσκησης 19 με δοσμένες τιμές των r, K, και M_0. Μετά σχεδιάστε τη λύση για να επαληθεύσετε ότι τα $M(0)$ και $\lim_{t\to\infty} M(t)$ είναι σωστά.*

20. $r = 0.1, K = 500, M_0 = 50$

21. $r = 0.05, K = 1200, M_0 = 90$

22. $r = 0.6, K = 5500, M_0 = 20$

T **23–26. Αντίδραση σε δοχείο ανάδευσης** *Για καθεμία από τις ακόλουθες αντιδράσεις σε δοχεία ανάδευσης, να κάνετε την ανάλυση που απαιτείται.*

α. *Να γράψετε το πρόβλημα αρχικών τιμών για τη μάζα της ουσίας.*
β. *Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών και να σχεδιάσετε τη λύση για να επαληθεύσετε ότι τα $m(0)$ και $\lim_{t\to\infty} m(t)$ είναι σωστά.*

23. Ένα δοχείο 500-L είναι αρχικά γεμάτο με καθαρό νερό. Εισρέει στο δοχείο με ρυθμό 4L/min ένα διάλυμα θειικού χαλκού συγκέντρωσης 20 g/L. Το νέο διάλυμα αποστραγγίζεται από το δοχείο με ρυθμό 4L/min.

24. Ένα δοχείο 1500-L είναι αρχικά γεμάτο με ένα διάλυμα που περιέχει 3000g αλατιού. Ένα διάλυμα αλατιού συγκέντρωσης 20 g/L εισρέει στο δοχείο με ρυθμό 3L/min. Το νέο διάλυμα αποστραγγίζεται από το δοχείο με ρυθμό 3L/min.

25. Ένα δοχείο 2000-L είναι αρχικά γεμάτο με ένα διάλυμα 40 g/L ζάχαρης. Ένα διάλυμα ζάχαρης συγκέντρωσης 10 g/L εισρέει στο δοχείο με ρυθμό 10L/min. Το νέο διάλυμα αποστραγγίζεται από το δοχείο με ρυθμό 10L/min.

26. Μια λίμνη ενός εκατομμυρίου λίτρων υφίσταται χημική μόλυνση έχοντας συγκέντρωση 20 g/L. Η αιτία της μόλυνσης απομακρύνεται και εισρέει στη λίμνη καθαρό νερό με ρυθμό 1200L/hr. Υποθέτοντας ότι έχει γίνει ολική ανάμειξη στη λίμνη η οποία αποστραγγίζεται με ρυθμό 1200L/hr, πόσος χρόνος απαιτείται για να επανέλθει η συγκέντρωση της λίμνης στο 10% της αρχικής τιμής της;

27–30. Μοντέλα κυνηγού-θηράματος *Θεωρήστε τα ακόλουθα ζεύγη διαφορικών εξισώσεων που εκφράζουν ένα σύστημα κυνηγού-θηράματος με πληθυσμούς x και y. Σε κάθε περίπτωση να κάνετε την ακόλουθη διαδικασία.*

α. *Να διακρίνετε ποια εξίσωση αντιστοιχεί στον κυνηγό και ποια στο θήραμα.*
β. *Βρείτε τις ευθείες στις οποίες $x'(t) = 0$. Βρείτε τις ευθείες στις οποίες $y'(t) = 0$.*
γ. *Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.*
δ. *Να διακρίνετε τέσσερις περιοχές του πρώτου τεταρτημορίου του επιπέδου xy στις οποίες οι x' και y' είναι θετικές ή αρνητικές.*
ε. *Σχεδιάστε μια αντιπροσωπευτική καμπύλη λύσης στο επίπεδο xy και δείξτε την κατεύθυνση προς την οποία εξελίσσεται η λύση.*

27. $x'(t) = -3x + 6xy, y'(t) = y - 4xy$

28. $x'(t) = 2x - 4xy, y'(t) = -y + 2xy$

29. $x'(t) = -3x + xy, y'(t) = 2y - xy$

30. $x'(t) = 2x - xy, y'(t) = -y + xy$

Περαιτέρω διερευνήσεις

31. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Εξετάστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια ερμηνεία ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Αν σε ένα μοντέλο πληθυσμού η συνάρτηση αύξησης είναι θετική, τότε ο πληθυσμός αυξάνεται.
β. Η λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών δοχείου ανάδευσης, πλησιάζει μια σταθερά όταν $t \to \infty$.
γ. Στα μοντέλα κυνηγού-θηράματος που αναφέρονται σε αυτή την ενότητα, αν ο αρχικός πληθυσμός των κυνηγών είναι μηδενικός, τότε ο αριθμός των θηραμάτων αυξάνει απεριόριστα.

32. Συναρτήσεις ρυθμού αύξησης

α. Δείξτε ότι η λογιστική συνάρτηση αύξησης $f(P) = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$ έχει μια μέγιστη τιμή $\frac{rK}{4}$ στο σημείο $P = \frac{K}{2}$.

β. Δείξτε ότι η συνάρτηση αύξησης Gompertz $f(M) = -rM \ln\left(\frac{M}{K}\right)$ έχει μια μέγιστη τιμή $\frac{rK}{e}$ στο σημείο $M = \frac{K}{e}$.

33. Λύση λογιστικής εξίσωσης Χρησιμοποιήστε διαχωρισμό μεταβλητών για να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$P'(t) = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad P(0) = P_0$$

είναι $P(t) = \dfrac{K}{\left(\frac{K}{P_0} - 1\right)e^{-rt} + 1}$.

34. Ιδιότητες της λύσης της Gompertz Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση

$$M(t) = K\left(\frac{M_0}{K}\right)^{\exp(-rt)}$$

Ικανοποιεί τις συνθήκες $M(0) = M_0$ και $\lim_{t\to\infty} M(t) = K$.

35. Ιδιότητες λύσεων δοχείου ανάδευσης

α. Δείξτε ότι για θετικές τιμές των R, V, C_i, και m_0, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$m'(t) = -\frac{R}{V}m(t) + C_iR, \quad m(0) = m_0$$

είναι $m(t) = (m_0 - C_iV)e^{-Rt/V} + C_iV$.

β. Επαληθεύστε ότι $m(0) = m_0$.

γ. Υπολογίστε το $\lim_{t\to\infty} m(t)$ και δώστε μια φυσική ερμηνεία του αποτελέσματος.

δ. Υποθέστε πως τα m_0 και V είναι γνωστά. Περιγράψτε το γεγονός της αύξησης της R στο γράφημα της λύσης.

Εφαρμογές

36. Ένα μοντέλο φυσιολογίας Μια παραδοχή στη μοντελοποίηση της απορροφητικότητας ενός φαρμάκου, είναι ο όγκος του αίματος σε ένα ατόμο, είναι ένας μεμονωμένος χώρος που συμπεριφέρεται ως δοχείο ανάδευσης. Υποθέστε ότι ο όγκος του αίματος είναι ένα δοχείο τεσσάρων λίτρων που αρχικά έχει μηδενική συγκέντρωση κάποιου συγκεκριμένου φαρμάκου. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, εισάγεται ένας φλεβοκαθετήρας (στο δοχείο) που μεταφέρει ένα διάλυμα φαρμάκου συγκέντρωσης 500mg/L. Ο ρυθμός εισροής είναι 0.06 L/m. Υποθέτουμε ότι το φάρμακο αναμιγνύεται γρήγορα σε όλο το αίμα και ότι η ποσότητα του αίματος παραμένει σταθερή.

α. Γράψτε το πρόβλημα αρχικών τιμών που εκφράζει την ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα, για $t \geq 0$.

β. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών και να κάνετε τα γραφήματα της ποσότητας και της συγκέντρωσης του φαρμάκου.

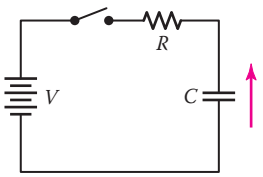
γ. Ποια είναι η ποσότητα σταθερής κατάστασης του φαρμάκου στο αίμα;

δ. Μετά πόσα λεπτά η ποσότητα του φαρμάκου φτάνει το 90% του επιπέδου σταθερής κατάστασής του;

37. Εξίσωση κυκλώματος RC Θεωρούμε ότι μια μπαταρία με τάση V συνδέεται σε σειρά με ένα πυκνωτή (μια συσκευή φόρτισης) με χωρητικότητα C και σε μια αντίσταση ισχύος R. Όσο αυξάνει η φόρτιση Q στον πυκνωτή, η ένταση ρεύματος I στον πυκνωτή μειώνεται σύμφωνα με τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών. Λύστε κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών και ερμηνεύστε τη λύση.

α. $I'(t) + \frac{1}{RC}I(t) = 0, I(0) = \frac{V}{R}$

β. $Q'(t) + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{V}{R}, Q(0) = 0$



38. Προβλέψεις πληθυσμού στις ΗΠΑ Σύμφωνα με τη Διεύθυνση Απογραφών των ΗΠΑ ο πληθυσμός (στο πλησιέστερο εκατομμύριο) ήταν 281 εκατομμύρια το 2000 και 310 εκατομμύρια το 2010. Η Διεύθυνση προβλέπει ότι το 2050 ο πληθυσμός θα είναι 439 εκατομμύρια. Για να κατασκευαστεί ένα λογιστικό μοντέλο πρέπει να υπολογιστούν τόσο ο ρυθμός αύξησης όσο και η φέρουσα ικανότητα του πληθυσμού. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να υπολογιστούν αυτές οι παράμετροι. Εδώ δίνεται μια προσέγγιση:

α. Υποθέτουμε ότι το $t = 0$ αντιστοιχεί στο 2000 και ότι η αύξηση του πληθυσμού είναι εκθετική για τα πρώτα δέκα χρόνια, δηλαδή μεταξύ 2000 και 2010, ο πληθυσμός δίνεται από την $P(t) = P(0)e^{rt}$. Υπολογίστε τον ρυθμό αύξησης r με αυτή την παραδοχή.

β. Γράψτε την λύση της λογιστικής εξίσωσης με την τιμή του r που βρέθηκε στο μέρος (α). Χρησιμοποιήστε την προβλεπόμενη τιμή $P(50) = 439$ εκατομμύρια για να βρείτε μια τιμή της φέρουσας ικανότητας K του πληθυσμού.

γ. Σύμφωνα με το λογιστικό μοντέλο που συγκροτήθηκε στα μέρη (α) και (β), πότε ο πληθυσμός των ΗΠΑ θα φτάσει το 95% της φέρουσας ικανότητας;

δ. Εκτιμήσεις αυτού του είδους πρέπει να γίνονται και να ερμηνεύονται προσεκτικά. Αν υποτεθεί ότι το 2050 ο προβλεπόμενος πληθυσμός είναι 450 αντί 439 εκατομμύρια, ποια είναι η τιμή της φέρουσας ικανότητας σε αυτή την περίπτωση;

ε. Να επαναλάβετε το μέρος (δ) υποθέτοντας ότι το 2050 ο προβλεπόμενος πληθυσμός είναι 430 αντί 439 εκατομμύρια. Ποια είναι η τιμή της φέρουσας ικανότητας σε αυτή την περίπτωση;

στ. Σχολιάστε την «ευαισθησία» της τιμής της φέρουσας ικανότητας σε πρόβλεψη 40 χρόνων για τον πληθυσμό.

Πρόσθετες ασκήσεις

T

39. Αναλυτική λύση των εξισώσεων κυνηγού-θηράματος Η λύση των εξισώσεων κυνηγού θηράματος

$$x'(t) = -ax + bxy, y'(t) = cy - dxy$$

μπορεί να παρασταθεί με παραμετρικές εξισώσεις που περιγράφουν τις καμπύλες λύσεων. Υποθέτουμε ότι τα a, b, c, και d είναι θετικές σταθερές και θεωρούμε λύσεις στο πρώτο τεταρτημόριο.

α. Θυμίζουμε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, διαιρούμε την πρώτη εξίσωση με την δεύτερη για να προκύψει μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών ως προς x και y.

β. Δείξτε ότι η γενική λύση μπορεί να γραφεί στην αναλυτική μορφή $e^{dx+by} = Cx^cy^a$, όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

γ. Έστω $a = 0.8$, $b = 0.4$, $c = 0.9$, και $d = 0.3$. Σχεδιάστε τις καμπύλες λύσεων για $C = 1.5$, 2, και 2.5 και διαπιστώστε ότι πρόκειται για κλειστές καμπύλες. Χρησιμοποιήστε το παράθυρο $[0, 9] \times [0, 9]$.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Το γράφημα της συνάρτησης ρυθμού αύξησης είναι μια παραβολή με ρίζες (τομές με τον άξονα x), στα $P = 0$ και $P = K$. Η κορυφή της παραβολής βρίσκεται στο μέσον του διαστήματος μεταξύ των ριζών ή σε αυτή την περίπτωση στο $P = K/2$.

2. 0 g/L **3.** Σχεδιάστε μια κλειστή καμπύλη λύσεων στο επίπεδο FH και σημειώστε τις τιμές των μεταβλητών F και H. Διατρέχοντας μια φορά την καμπύλη, οι τιμές κάθε μεταβλητής αυξάνουν, ύστερα φθίνουν (ή αντιστρόφως) και επιστρέφουν στις αρχικές τιμές τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Εξετάστε αν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι σωστές και δώστε μια ερμηνεία ή αντιπαράδειγμα.

α. Η διαφορική εξίσωση $y' + 2y = t$ είναι πρώτης τάξης, γραμμική και χωριζόμενων μεταβλητών.
β. Η διαφορική εξίσωση $y'y = 2t^2$ είναι πρώτης τάξης, γραμμική και χωριζόμενων μεταβλητών.
γ. Η συνάρτηση $y = t + 1/t$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $ty' + y = 2t$, $y(1) = 2$.
δ. Το διανυσματικό πεδίο για τη διαφορική εξίσωση $y'(t) = t + y(t)$ έχει σχεδιαστεί στο επίπεδο ty.
ε. Η μέθοδος Euler δίνει την ακριβή λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = ty^2$, $y(0) = 3$ στο διάστημα $[0, a]$ με την προϋπόθεση ότι το A δεν είναι πολύ μεγάλο.

2–10. Γενικές λύσεις *Εφαρμόστε μέθοδο της επιλογής σας για να βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων εξισώσεων.*

2. $y'(t) + 3y = 0$ **3.** $y'(t) + 2y = 6$

4. $p'(x) = 4p + 8$ **5.** $y'(t) = 2ty$

6. $y'(t) = \sqrt{\dfrac{y}{t}}$ **7.** $y'(t) = \dfrac{y}{t^2 + 1}$

8. $y'(x) = \dfrac{\sin x}{2y}$ **9.** $y'(t) = (2t + 1)(y^2 + 1)$

10. $z'(t) = \dfrac{tz}{t^2 + 1}$

11–18. Λύση προβλημάτων αρχικών τιμών *Εφαρμόστε μέθοδο της επιλογής σας για να βρείτε τη γενική λύση των ακόλουθων προβλημάτων αρχικών τιμών.*

11. $y'(t) = 2t + \cos t$, $y(0) = 1$

12. $y'(t) = -3y + 9$, $y(0) = 4$

13. $Q'(t) = Q - 8$, $Q(1) = 0$ **14.** $y'(x) = \dfrac{x}{y}$, $y(2) = 4$

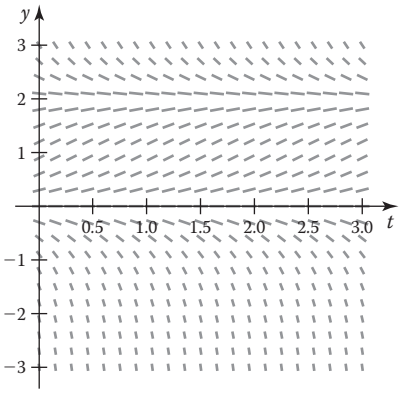
15. $u'(t) = \left(\dfrac{u}{t}\right)^{1/3}$, $u(1) = 8$ **16.** $y'(x) = 4x \csc y$, $y(0) = \pi/2$

17. $s'(t) = \dfrac{1}{2s(t + 2)}$, $s(-1) = 4$, $t \geq -1$

18. $\theta'(x) = 4x \cos^2 \theta$, $\theta(0) = \pi/4$

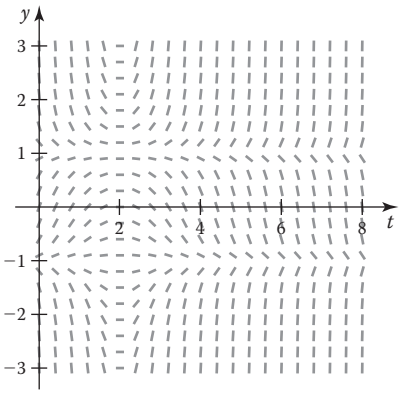
19. Διανυσματικά πεδία Θεωρήστε το διανυσματικό πεδίο για την εξίσωση $y' = y(2 - y)$ που φαίνεται στο σχήμα και αρχικές συνθήκες της μορφής $y(0) = A$.

α. Σχεδιάστε μια λύση στο διανυσματικό πεδίο με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$.
β. Σχεδιάστε μια λύση στο διανυσματικό πεδίο με αρχική συνθήκη $y(0) = 3$.
γ. Για ποιες τιμές του A οι αντίστοιχες λύσεις είναι αύξουσες για $t \geq 0$;
δ. Για ποιες τιμές του A οι αντίστοιχες λύσεις είναι φθίνουσες για $t \geq 0$;
ε. Βρείτε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη διαφορική εξίσωση.



20. Διανυσματικά πεδία Το διανυσματικό πεδίο για την εξίσωση $y'(t) = (t - 2)(y^2 - 1)$ φαίνεται στο σχήμα.

α. Σχεδιάστε μια λύση στο διανυσματικό πεδίο με αρχική συνθήκη $y(0) = 1.5$.
β. Σχεδιάστε μια λύση στο διανυσματικό πεδίο με αρχική συνθήκη $y(0) = -1.5$.
γ. Χρησιμοποιήστε το διανυσματικό πεδίο (να μη λύσετε τη διαφορική εξίσωση) για να κάνετε μια εκτίμηση για το $\lim_{t \to \infty} y(t)$ όταν $y(0) = 0$. Αιτιολογήστε τον συλλογισμό σας.
δ. Χρησιμοποιήστε το διανυσματικό πεδίο για να κάνετε μια εκτίμηση για το $\lim_{t \to \infty} y(t)$ όταν $y(0) = 2$. Αιτιολογήστε τον συλλογισμό σας.
ε. Υπάρχουν αρχικές συνθήκες της μορφής $y(0) = A$ που οδηγούν σε μια λύση που είναι σταθερή για όλα τα $t \geq 0$;



21. Η Μέθοδος Euler Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = \frac{1}{2y}, y(0) = 1.$$

α. Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler με $\Delta t = 0.1$ για να υπολογίσετε προσεγγίσεις του $y(0.1)$ και $y(0.2)$.
β. Εφαρμόστε τη μέθοδο Euler με $\Delta t = 0.05$ για να υπολογίσετε προσεγγίσεις του $y(0.1)$ και $y(0.2)$.
γ. Η ακριβής λύση αυτού του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y = \sqrt{t+1}$. Υπολογίστε τα σφάλματα στις προσεγγίσεις του $y(0.2)$ που βρέθηκαν στα μέρη (α) και (β). Ποια προσέγγιση δίνει το μικρότερο σφάλμα;

22–25. Λύσεις ισορροπίας *Βρείτε τις λύσεις ισορροπίας για τις ακόλουθες εξισώσεις και εξετάστε ποια λύση είναι ευσταθής ή ασταθής.*

22. $y'(t) = y(2 - y)$

23. $y'(t) = y(3 + y)(y - 5)$

24. $y'(t) = \sin 2y$, for $|y| < \pi$

25. $y'(t) = y^3 - y^2 - 2y$

26. Λογιστική αύξηση Ο πληθυσμός μια αγέλης κουνελιών εκφράζεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$P'(t) = 0.2P\left(1 - \frac{P}{1200}\right), P(0) = 50.$$

α. Βρείτε τις λύσεις ισορροπίας.
β. Βρείτε τον πληθυσμό για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$.
γ. Ποια είναι η τιμή της φέρουσας ικανότητας του πληθυσμού;
δ. Πόσος είναι ο πληθυσμός όταν μεγιστοποιείται ο ρυθμός αύξησης;

27. Παράμετροι λογιστικής αύξησης Μια καλλιέργεια κυττάρων έχει πληθυσμό 20 όταν προστίθεται μια θρεπτική ουσία. Μετά 20 ώρες, η καλλιέργεια έχει πληθυσμό 80 και η φέρουσα ικανότητα εκτιμάται στα 1600 κύτταρα.

α. Χρησιμοποιήστε τα δεδομένα για $t = 0$ και $t = 20$ για να βρείτε τον φυσικό ρυθμό αύξησης της καλλιέργειας.
β. Δώστε τη λύση της λογιστικής εξίσωσης για την καλλιέργεια κυττάρων.
γ. Μετά πόσες ώρες ο πληθυσμός φτάνει στο μισό της φέρουσας ικανότητας;

28. Λογιστική αύξηση στην Ινδία Ο πληθυσμός της Ινδίας ήταν 435 εκατομμύρια το 1960 ($t = 0$) και 487 εκατομμύρια το 1965 ($t = 5$). Ο προβλεπόμενος πληθυσμός για το 2050 είναι 1.57 δισεκατομμύρια.

α. Υποθέστε ότι ο πληθυσμός αυξάνει εκθετικά μεταξύ 1960 και 1965 και χρησιμοποιήστε τον πληθυσμό αυτών των ετών για να βρείτε τον φυσικό ρυθμό αύξησης σε ένα λογιστικό μοντέλο.
β. Εφαρμόστε τη λύση της λογιστικής εξίσωσης και τον προβλεπόμενο πληθυσμό για το 2050 για να προσδιορίσετε τη φέρουσα ικανότητα.
γ. Με βάση τις τιμές των r και K που βρέθηκαν στα μέρη (α) και (β), γράψτε τη συνάρτηση λογιστικής αύξησης για τον πληθυσμό της Ινδίας (μετρημένο σε εκατομμύρια κατοίκους).
δ. Σε ποιο έτος κατά προσέγγιση, ο πληθυσμός της Ινδίας θα φτάσει για πρώτη φορά τα 2 δισεκατομμύρια;
ε. Να επισημάνετε πιθανά μειονεκτήματα αυτού του μοντέλου. Γιατί η φέρουσα ικανότητα μπορεί να είναι είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη από την προβλεπόμενη τιμή του μοντέλου;

29. Αντίδραση σε δοχείου ανάδευσης Ένα δοχείο 100-L γεμίζεται με καθαρό νερό όταν από έναν σωλήνα εισρέει ένα διάλυμα ζάχαρης συγκέντρωσης 20 gm/L με ρυθμό 0.5 L/min. Το διάλυμα αναμιγνύεται πλήρως και εκρέει από το δοχείο με ρυθμό 0.5 L/min.

α. Βρείτε την ποσότητα της ζάχαρης στο δοχείο σε κάθε χρονική στιγμή μετά την εισροή.
β. Ποια είναι η σταθερή κατάσταση της ποσότητας της ζάχαρης στο δοχείο;
γ. Σε ποια χρονική στιγμή η ποσότητα της ζάχαρης φτάνει το 95% του επιπέδου της σταθερής κατάστασης;

30. Νόμος ψύξης του Νεύτωνα Ένα φλιτζάνι καφέ απομακρύνεται από έναν φούρνο μικροκυμάτων με θερμοκρασία 80°C αφήνεται να κρυώσει σε έναν χώρο θερμοκρασίας 25°C. Πέντε λεπτά αργότερα, η θερμοκρασία του καφέ είναι 60°C.

α. Βρείτε τη σταθερά k της διαδικασίας ψύξης.
β. Βρείτε τη θερμοκρασία του καφέ για $t \geq 0$.
γ. Πότε η θερμοκρασία του καφέ φτάνει τους 50°C;

31. Ένα μοντέλο κυνηγού-θηράματος Θεωρήστε το μοντέλο κυνηγού-θηράματος

$$x'(t) = -4x + 2xy, y'(t) = 5y - xy.$$

α. Το x εκφράζει τον πληθυσμό του κυνηγού ή του θηράματος των ειδών;
β. Βρείτε τις γραμμές κατά τις οποίες $x'(t) = 0$. Βρείτε τις γραμμές κατά τις οποίες $y'(t) = 0$.
γ. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος.
δ. Εντοπίστε τις τέσσερις περιοχές του πρώτου τεταρτημορίου του επιπέδου xy στις οποίες τα x' και y' είναι θετικά ή αρνητικά.
ε. Σχεδιάστε μια τυπική καμπύλη λύσης στο επίπεδο xy. Προς ποια κατεύθυνση αναπτύσσεται το διανυσματικό πεδίο;

32. Μια εξίσωση πρώτης τάξης Θεωρήστε την εξίσωση $t^2y'(t) + 2ty(t) = e^{-t}$.

α. Δείξτε ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως παράγωγος ενός όρου.
β. Ολοκληρώστε τα δύο μέλη της εξίσωσης για να προκύψει η γενική λύση.
γ. Βρείτε τη λύση που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(1) = 0$.

33. Μια εξίσωση δεύτερης τάξης Θεωρήστε την εξίσωση $t^2y''(t) + 2ty'(t) - 12y(t) = 0$.

α. Αναζητήστε λύσεις της μορφής $y(t) = t^p$, όπου το p πρέπει να προσδιοριστεί. Αντικαταστήστε αυτή τη δοκιμαστική λύση στην εξίσωση και βρείτε τιμές p_1 και p_2. του p που δίνουν λύσεις.
β. Υποθέτοντας ότι η γενική λύση της εξίσωσης είναι $y(t) = C_1 t^{p_1} + C_2 t^{p_2}$, βρείτε τη λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(1) = 0$, και $y'(1) = 7$.

Απαντήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ1

Ενότητα Δ1.1 Ασκήσεις, σελ. Δ1-7–Δ1-9

1. 2 **3.** 2 **5.** Ναι **15.** $y = 3t - \dfrac{e^{-2t}}{2} + C$

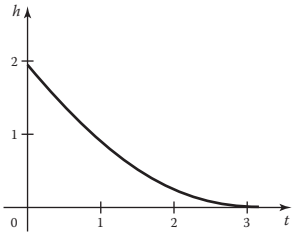
17. $y = 2\ln|\sec 2x| - 3\sin x + C$

19. $y = 2t^6 + 6t^{-1} - 2t^2 + C_1 t + C_2$

21. $u = \dfrac{x^{11}}{2} + \dfrac{x^9}{2} - \dfrac{x^7}{2} + \dfrac{5}{x} + C_1 x + C_2$

23. $y = e^t + t + 3$ **25.** $y = x^3 + x^{-3} - 2$ **27.** $y = -t^5 + 2t^3 + 1$

29. α. $s = -4.9t^2 + 29.4t + 30$, $v = -9.8t + 29.4$
β. Το ψηλότερο σημείο 74.1 m, σε $t = 3$ s **31.** Η ποσότητα των πόρων αυξάνει για $H < 75$, και είναι σταθερή αν $H = 75$. Περίπου 28 χρονικές μονάδες.
33. $h = (1.4 - 0.2t\sqrt{2g})^2 \approx (1.4 - 0.44t)^2$;
Το δοχείο είναι άδειο μετά από 3.16 s περίπου.



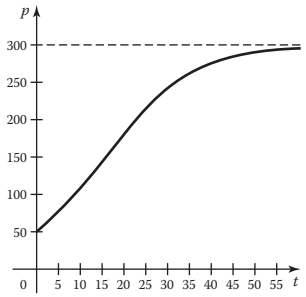
35. α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό

37. $u = \ln(x^2 + 4) - \tan^{-1}\dfrac{x}{2} + C$ **39.** $y = \sin^{-1} x + C_1 x + C_2$

41. $u = \dfrac{1}{4}\tan^{-1}\dfrac{x}{4} - 4x + 2$ **43.** $y = e^t(t - 2) + 2(t + 1)$

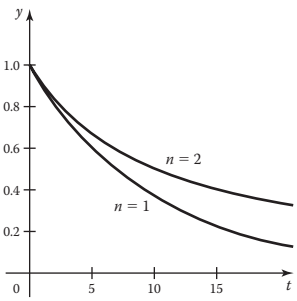
51. γ. $y = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$ **53. β.** $C = \dfrac{K - 50}{50}$

γ.



δ. 300

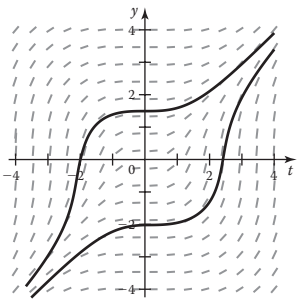
55. γ. Ο ρυθμός της πτώσης είναι μεγαλύτερος για το μοντέλο $n = 1$.



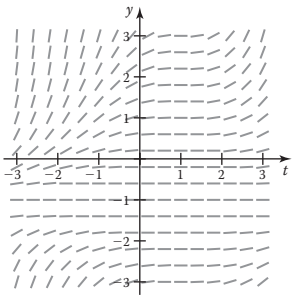
Ενότητα Δ1.2 Ασκήσεις, σελ. Δ1-15–Δ1-18

1. Στα επιλεγμένα σημεία (t_0, y_0) στην περιοχή που μας ενδιαφέρει σχεδιάστε ένα μικρό ευθύγραμμο τμήμα με $f(t_0, y_0)$. **3.** $y(3.1) \approx 1.6$

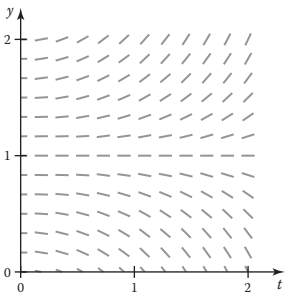
5.



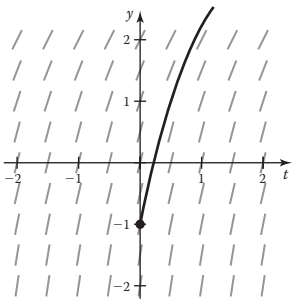
7. α. Δ **β.** Β **γ.** Α **δ.** Γ **9.** Μια αρχική συνθήκη $y(0) = -1$ οδηγεί σε σταθερή λύση. Για κάθε άλλη αρχική συνθήκη, οι λύσεις είναι πάντα αύξουσες.



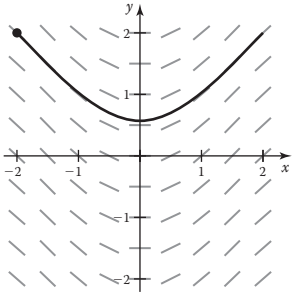
11. Μια αρχική συνθήκη $y(0) = 1$ οδηγεί σε σταθερή λύση. Αρχικές συνθήκες $y(0) = A$ οδηγούν σε λύσεις που είναι πάντα αύξουσες αν $A > 1$.



13.

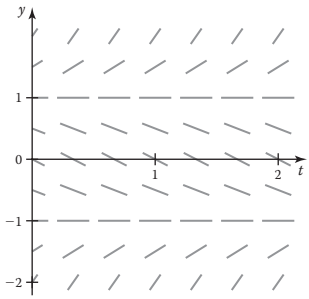


15.

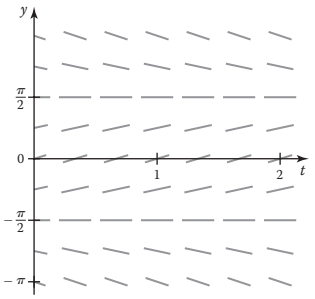


17. α. $y = 1, y = -1$ **β.** Οι λύσεις είναι αύξουσες για $|y| > 1$; φθίνουσες για $|y| < 1$. **γ.** Αρχικές συνθήκες $y(0) = A$ οδηγούν σε λύσεις αύξουσες για $|A| > 1$ φθίνουσες για $|A| < 1$.

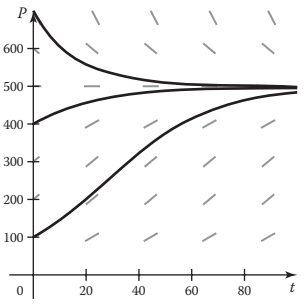
δ.



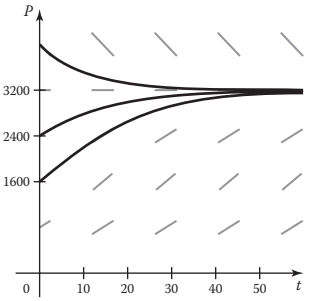
19. α. $y = \pi/2, y = -\pi/2$ **β.** Οι λύσεις είναι αύξουσες για $|y| < \pi/2$, φθίνουσες για $|y| > \pi/2$. **γ.** Αρχικές συνθήκες $y(0) = A$ οδηγούν σε λύσεις αύξουσες για $|A| < \pi/2$ φθίνουσες για $\pi/2 < |A| < \pi$. **δ.**



21. Οι λύσεις ισορροπίας είναι $P = 0$ και $P = 500$.



23. Οι λύσεις ισορροπίας είναι $P = 0$ και $P = 3200$.



25. $y(0.5) \approx u_1 = 4 \cdot y(1) \approx u_2 = 8$

27. $y(0.1) \approx u_1 = 1.1 \cdot y(0.2) \approx u_2 = 1.19$

29. α.

Δt	**προσέγγιση στο $y(0.2)$**	**προσέγγιση στο $y(0.4)$**
0.20000	0.80000	0.64000
0.10000	0.81000	0.65610
0.05000	0.81451	0.66342
0.02500	0.81665	0.66692

β.

Δt	**σφάλματα για $y(0.2)$**	**σφάλματα για $y(0.4)$**
0.20000	0.01873	0.03032
0.10000	0.00873	0.01422
0.05000	0.00422	0.00690
0.02500	0.00208	0.00340

γ. Βήμα χρόνου $\Delta t = 0.025$; Γενικά, μικρότερα βήματα χρόνου παράγουν πιο ακριβή αποτελέσματα. **δ.** Υποδιπλασιασμός των βημάτων χρόνου συνεπάγεται κατά προσέγγιση υποδιπλασιασμό του σφάλματος.

31. α.

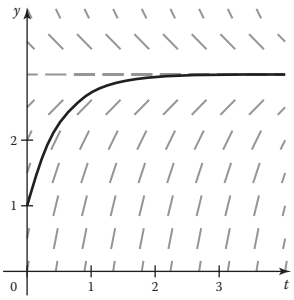
Δt	**προσέγγιση στο $y(0.2)$**	**προσέγγιση στο $y(0.4)$**
0.20000	3.20000	3.36000
0.10000	3.19000	3.34390
0.05000	3.18549	3.33658
0.02500	3.18335	3.33308

β.

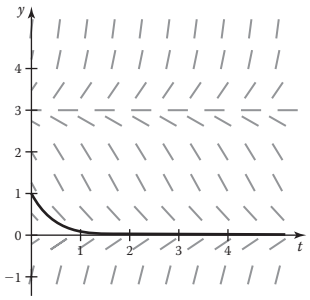
Δt	**σφάλματα για** $y(0.2)$	**σφάλματα για** $y(0.4)$
0.20000	0.01873	0.03032
0.10000	0.00873	0.01422
0.05000	0.00422	0.00690
0.02500	0.00208	0.00340

γ. Χρονικό βήμα $\Delta t = 0.025$; Γενικά, μικρότερα βήματα χρόνου παράγουν πιο ακριβή αποτελέσματα. **δ.** Υποδιπλασιασμός των βημάτων χρόνου συνεπάγεται κατά προσέγγιση υποδιπλασιασμό του σφάλματος. **33. α.** $y(2) \approx 0.00604662$ **β.** 0.012269 **γ.** $y(2) \approx 0.0115292$ **δ.** Το σφάλμα στο μέρος (γ) είναι περίπου το μισό του σφάλματος στο μέρος (β).
35. α. $y(4) \approx 3.05765$ **β.** 0.0339321
γ. $y(4) \approx 3.0739$ **δ.** Το σφάλμα στο μέρος (γ) είναι περίπου το μισό του σφάλματος στο μέρος (β).
37. α. Αληθές **β.** Λάθος **39. α.** $y = 3$

β, γ.

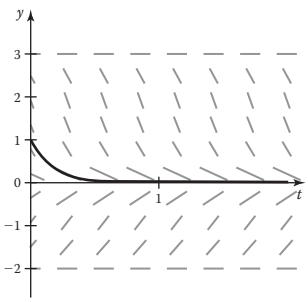


41. α. $y = 0$ και $y = 3$ **β, γ.**



43. α. $y = -2$, $y = 0$, και $y = 3$

β, γ.

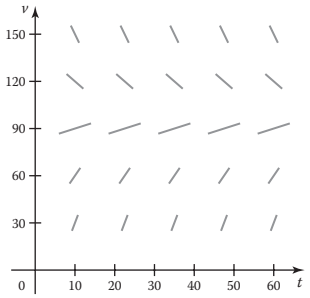


45. α. $\Delta t = \dfrac{b-a}{N}$ **β.** $u_1 = A + f(a, A)\dfrac{b-a}{N}$

γ. $u_{k+1} = u_k + f(t_k, u_k)\dfrac{b-a}{N}$, όπου $u_0 = A$ και

$t_k = a + k(b-a)/N$, για $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

47. α.



β. Αυξάνει για $A < 98$ και φθίνει για $A > 98$ **γ.** $v(t) = 98$

Ενότητα Δ1.3 Ασκήσεις, σελ. Δ1-22–Δ1-25

1. Α Μια πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών έχει τη μορφή $g(y)\,y'(t) = h(t)$, όπου ο παράγοντας $g(y)$ είναι μια συνάρτηση του y και $h(t)$ μια συνάρτηση του t.

3. Όχι **5.** $y = \dfrac{t^4}{4} + C$

7. $y = \pm\sqrt{2t^3 + C}$ **9.** $y = -2\ln\left(\dfrac{1}{2}\cos t + C\right)$

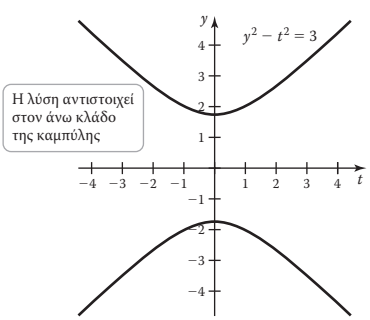
11. $y = \dfrac{x}{1 + Cx}$ **13.** $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{C - \cos t}}$ **15.** $u = \ln\left(\dfrac{e^{2x}}{2} + C\right)$

17. $y = \ln t + 2$ **19.** $y = \sqrt{t^3 + 81}$

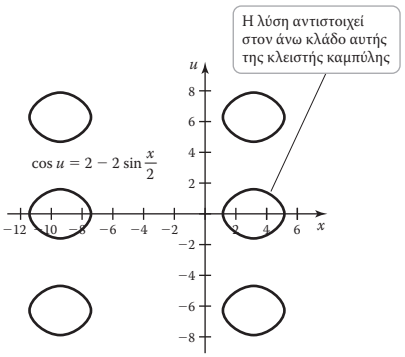
21. Μη χωριζόμενων μεταβλητών

23. $y = \sqrt{e^t - 1}$ **25.** $y = \ln(e^x + 2)$

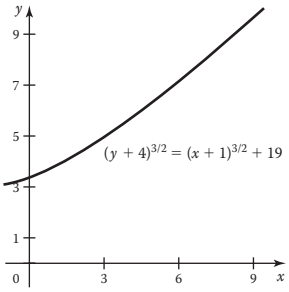
27.



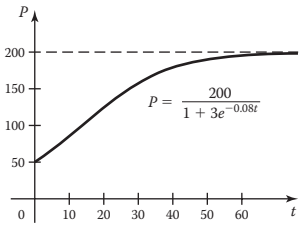
29.



31.



33. α.



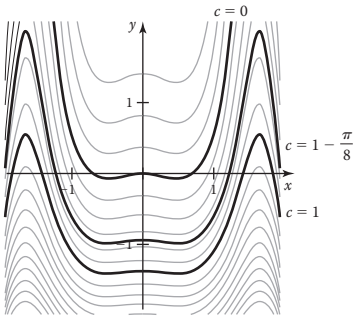
β. 200

35. α. Αληθές **β.** Λάθος **γ.** Αληθές **37.** $y = \dfrac{t^3}{2 - t^3}$

39. $y = \dfrac{3}{2}(-2 + 2^{1/5}(6 + 5t)^{1/5})$

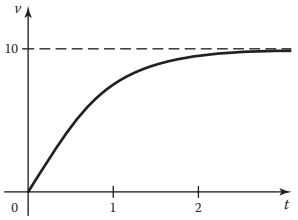
41. α. $y = -2\ln\left(\dfrac{x^2}{4} + \cos(x^2) + C\right)$ **β.** $C = 0, 1, 1 - \dfrac{\pi}{8}$

γ.



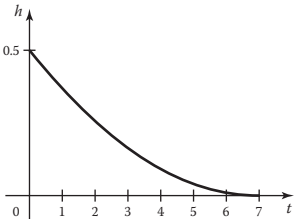
43. $y = kx$ **45. β.** $\sqrt{gm/k}$ **γ.** $v = \sqrt{\dfrac{g}{a}}\dfrac{Ce^{2\sqrt{ag}\,t} - 1}{Ce^{2\sqrt{ag}\,t} + 1}$,

όπου $a = \dfrac{k}{m}$

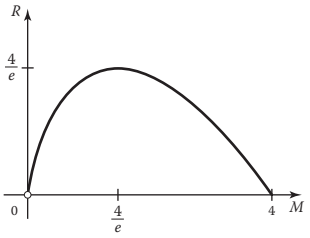


47. α. $h = (\sqrt{H} - kt)^2$ **β.** $h = (\sqrt{0.5} - 0.1t)^2$

γ. ≈ 7.07 s

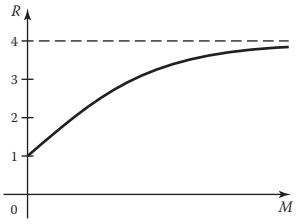


49. α.



Το R είναι θετικό αν $0 < M < 4$.
Το R έχει μέγιστο όταν
$M = \dfrac{4}{e}\cdot \lim\limits_{M\to 0} R(M) = 0.$

β. $M(t) = 4^{1-e^{-t}}$; Ο όγκος μεγαλώνει αρχικά γρήγορα και στη συνέχεια ο ρυθμός αύξησης μειώνεται. Το οριακό μέγεθος του όγκου είναι 4.



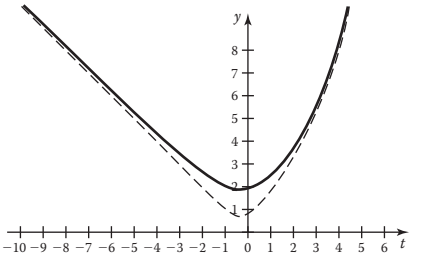
γ. Το οριακό μέγεθος του όγκου είναι K. **51. α.** $y = \dfrac{1}{1 - t}$

β. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - t}}$ **γ.** $y = \dfrac{1}{(n(1 - t))^{1/n}}$· καθώς $t \to 1^-$, $y \to \infty$

53. α. $y = \pm\sqrt{t^2 + e^t + C}$

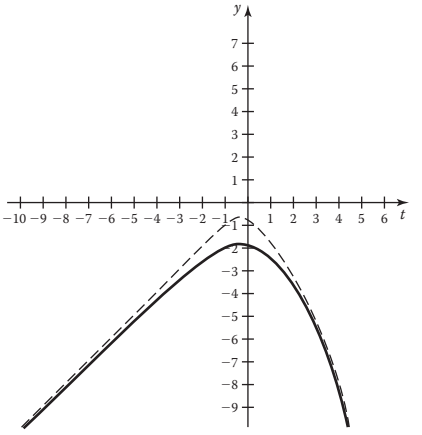
β. $y = \sqrt{t^2 + e^t - 1/e}$· $y = \sqrt{t^2 + e^t + 3 - 1/e}$

γ. Όταν το t αυξάνει, το y αυξάνει απεριόριστα.



δ. $y = -\sqrt{t^2 + e^t - 1/e}$; $y = -\sqrt{t^2 + e^t + 3 - 1/e}$

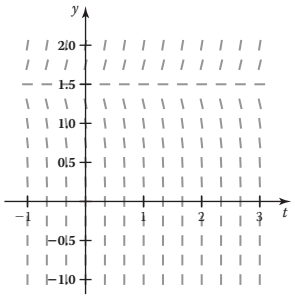
ε. Όταν το t αυξάνει, το y αυξάνει απεριόριστα.



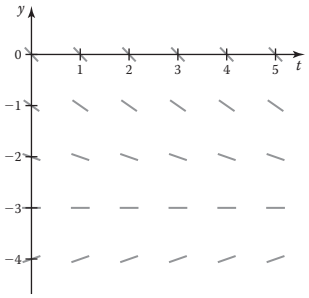
Ενότητα Δ1.4 Ασκήσεις, σελ. Δ1-30–Δ1-32

1. $y = 17e^{-10t} - 13$ **3.** $y = Ce^{-4t} + \frac{3}{2}$ **5.** $y = Ce^{3t} + \frac{4}{3}$
7. $y = Ce^{-2x} - 2$ **9.** $u = Ce^{-12t} + \frac{5}{4}$ **11.** $y = 7e^{3t} + 2$
13. $y = 4(e^{2t} - 1)$ **15.** $y = 4(2e^{3t-3} - 1)$

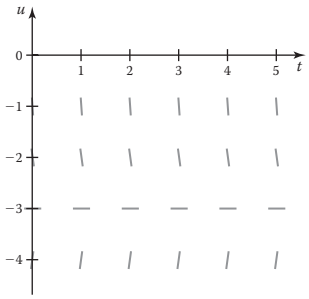
17. $y = \frac{3}{2}$. Ασταθής



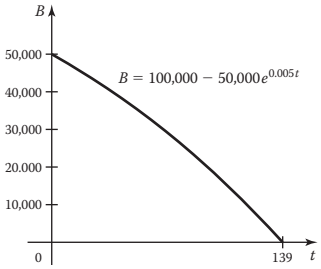
19. $y = -3$. Ευσταθής



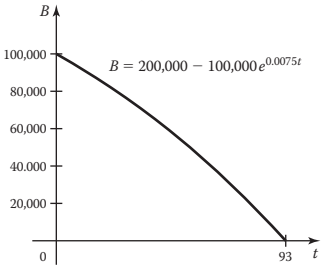
21. $u = -3$. Ευσταθής



23. $B = 100{,}000 - 50{,}000\, e^{0.005t}$. Φτάνει σε μηδενισμό του υπολοίπου μετά από 139 μήνες περίπου



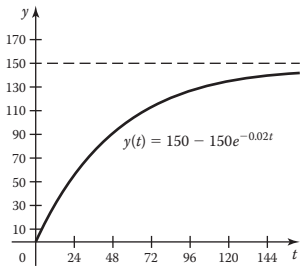
25. $B = 200{,}000 - 100{,}000\, e^{0.0075t}$. Φτάνει σε μηδενισμό του υπολοίπου μετά από 93 μήνες περίπου



27. ≈ 32 min **29.** ≈ 14 min **31. α.** Λάθος **β.** Αληθές **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **33.** $y = 1 + \frac{t}{2} + \frac{5}{2t}$ **35.** $y = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{7}{2}e^{t}$

37. α. $B = 20{,}000 + 20{,}000\, e^{0.03t}$. Το ανεξόφλητο ποσό αυξάνει επειδή η μηνιαία δόση 600$ είναι μικρότερη από τον τόκο του ανεξόφλητου ποσού. **β.** $20,000 **γ.** $\frac{m}{r}$

39. α.



β. 150 **γ.** ≈ 115.1 hr

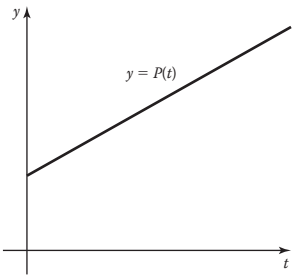
41. α. $h = 16\ \text{yr}^{-1}$ **β.** 25,000 **45.** $y(t) = \frac{6}{t}$

47. $y = \frac{9t^5 + 20t^3 + 15t + 76}{15(t^2 + 1)}$

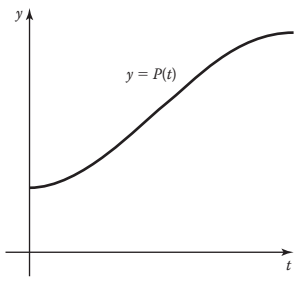
Ενότητα Δ1.5 Ασκήσεις, σελ. Δ1-39–Δ1-42

1. Η συνάρτηση ρυθμού αύξησης δηλώνει τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο πληθυσμός. Ο πληθυσμός αυξάνεται όταν η συνάρτηση του ρυθμού αύξησης είναι θετική και ο πληθυσμός μειώνεται όταν η συνάρτηση του ρυθμού αύξησης είναι αρνητική. **3.** Αν ο ρυθμός αύξησης είναι θετικός (αδιάφορο αν αυξάνει ή μειώνεται), ο πληθυσμός αυξάνει. **5.** Είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. **7.** Οι καμπύλες λύσης στο επίπεδο *FH*-είναι κλειστές καμπύλες και περιστρέφονται γύρω από το σημείο ισορροπίας.

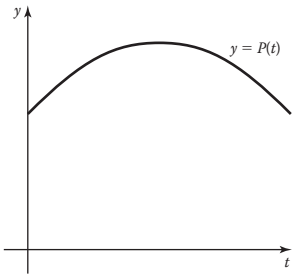
9.



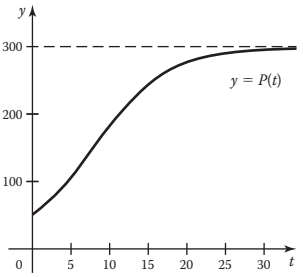
11.



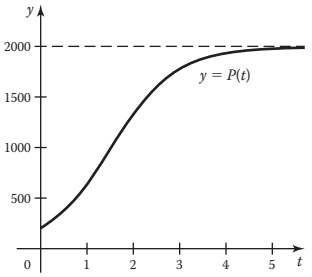
13.



15. $P' = 0.2\,P\left(1 - \dfrac{P}{300}\right)\cdot P = \dfrac{300}{5e^{-0.2t} + 1}$

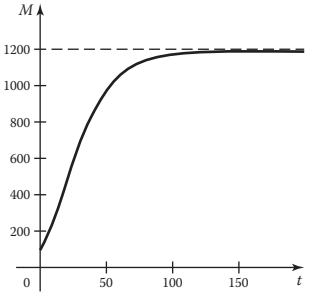


17. $P = \dfrac{2000}{9e^{-\ln(27/7)t} + 1}$



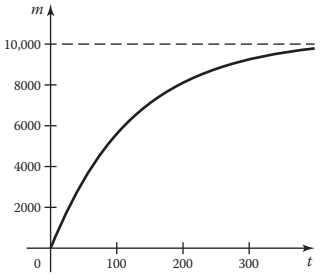
19. $M = K\left(\dfrac{M_0}{K}\right)^{e^{-rt}}$

21. $M = 1200 \cdot 0.075e^{0.05t}$



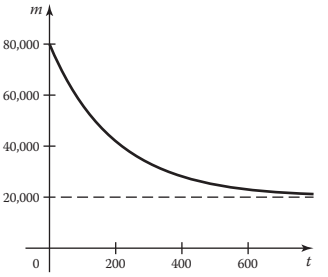
23. α. $m'(t) = -0.008t + 80, m(0) = 0$

β. $m = e^{-0.008t}(10{,}000\,e^{0.008t} - 10{,}000)$



25. α. $m'(t) = -0.005\,t + 100, m(0) = 80{,}000$

β. $m = 60{,}000\,e^{-0.005t} + 20{,}000$



27. α. x είναι ο κυνηγός και y το θήραμα.

β. $x' = 0$ στις ευθείες $x = 0$ και $y = \frac{1}{2}$. $y' = 0$ στις ευθείες $y = 0$ και $x = \frac{1}{4}$. **γ.** $(0, 0), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

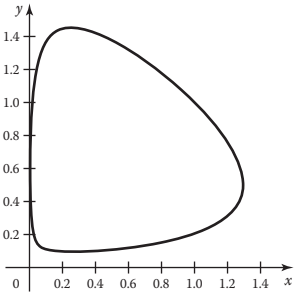
δ. $x' > 0$ και $y' > 0$ για $0 < x < \frac{1}{4}, y > \frac{1}{2}$

$x' > 0$ και $y' < 0$ για $x > \frac{1}{4}, y > \frac{1}{2}$

$x' < 0$ και $y' < 0$ για $x > \frac{1}{4}, 0 < y < \frac{1}{2}$

$x' < 0$ και $y' > 0$ για $0 < x < \frac{1}{4}, 0 < y < \frac{1}{2}$

ε. Η λύση αναπτύσσεται δεξιόστροφα.



29. α. x είναι ο κυνηγός και y το θήραμα.

β. $x' = 0$ στις ευθείες $x = 0$ και $y = 3$. $y' = 0$ στις ευθείες $y = 0$ και $x = 2$. **γ.** $(0,0), (2, 3)$

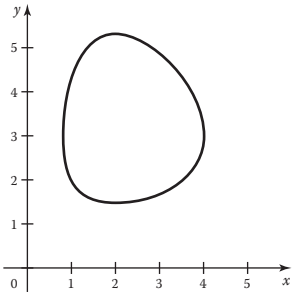
δ. $x' > 0$ και $y' > 0$ για $0 < x < 2, y > 3$

$x' > 0$ και $y' < 0$ για $x > 2, y > 3$

$x' < 0$ και $y' < 0$ για $x > 2, 0 < y < 3$

$x' < 0$ και $y' > 0$ για $0 < x < 2, 0 < y < 3$

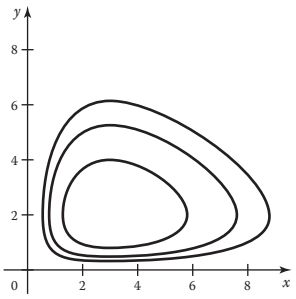
ε. Η λύση αναπτύσσεται δεξιόστροφα.



31. α. Αληθής **β.** Λάθος **γ.** Αληθής **35. γ.** $\lim\limits_{t\to\infty} m(t) = C_iV$, που είναι η ποσότητα της ουσίας στο δοχείο όταν είναι γεμάτο με το διάλυμα εισροής. **δ.** Όταν αυξάνει το R αυξάνει ο ρυθμός με τον οποίο το διάλυμα στο δοχείο πλησιάζει την σταθερή κατάσταση συγκέντρωσης.

37. α. $I = \dfrac{V}{R}e^{-t/(RC)}$ **β.** $Q = VC(1 - e^{-t/(RC)})$

39. α. $y'(x) = \dfrac{y(c - dx)}{x(-a + by)}$ **γ.**



ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ1 Ασκήσεις επανάληψης, σελ. Δ1-42–Δ1-43

1. α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Αληθής **δ.** Αληθής **ε.** Λάθος

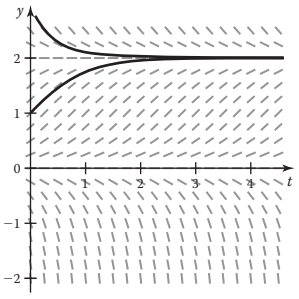
3. $y = Ce^{-2t} + 3$ **5.** $y = Ce^{t^2}$ **7.** $y = Ce^{\tan^{-1}t}$

9. $y = \tan(t^2 + t + C)$ **11.** $y = \sin t + t^2 + 1$

13. $Q = 8(1 - e^{t-1})$ **15.** $u = (3 + t^{2/3})^{3/2}$

17. $s = \sqrt{16 + \ln(t + 2)}$

19. α, β.



γ. $0 < A < 2$

δ. $A > 2$ ή $A < 0$

ε. $y = 0$ και $y = 2$

21. α. 1.05, 1.09762 **β.** 1.04939, 1.09651

γ. 0.00217, 0.00106, το σφάλμα στο μέρος (β) είναι μικρότερο.

23. $y = -3$ (ασταθής), $y = 0$ (ευσταθής), $y = 5$ (ασταθής)

25. $y = -1$ (ασταθής), $y = 0$ (ευσταθής), $y = 2$ (ασταθής)

27. α. 0.0713 **β.** $P = \dfrac{1600}{79\,e^{-0.0713t} + 1}$

γ. Περίπου 61 ώρες

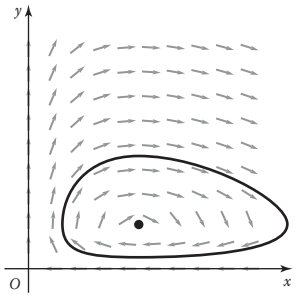
29. α. $m = 2000(1 - e^{-0.005t})$ **β.** 2000 g

γ. Περίπου 599 min.

31. α. x είναι ο κυνηγός. **β.** $x'(t) = 0$ όταν $x = 0$ και $y = 2$. $y'(t) = 0$ στις ευθείες $y = 0$ και $x = 5$. **γ.** $(0, 0)$ και $(5, 2)$

δ. $x' > 0, y' > 0$ για $0 < x < 5$ και $y > 2\cdot x' > 0, y' < 0$ για $x > 5$ και $y > 2\cdot x' < 0, y' < 0$ για $x > 5$ και $0 < y < 2\cdot x' < 0, y' > 0$ για $0 < x < 5$ και $0 < y < 2$

ε. Δεξιόστροφα



33. α. $p_1 = 3, p_2 = -4$ **β.** $y(t) = t^3 - t^{-4}$