Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με την Μέθοδο Simplex

Το βασικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού αφορά στην βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης η οποία εξαρτάται από πολλές μεταβλητές που υπόκεινται σε ένα σύνολο περιορισμών. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου Simplex που αναπτύχθηκε από τον Dantzig το 1947. Δίνεται έμφαση στα θεωρήματα που την πλαισιώνουν ενώ παρουσιάζεται μέσω παραδειγμάτων η επαναληπτική της διαδικασία κατά την οποία σε κάθε επανάληψη η λύση μετακινείται σε ένα νέο ακρότατο σημείο που βελτιώνει την αξία της αντικειμενικής συνάρτησης.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκε εκτενώς η επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές μόνο, κάτι που μας περιορίζει στον στον χώρο των δύο διαστάσεων. Όπως είδαμε, η γραφική επίλυση μας παρέχει την λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού καθορίζοντας την περιοχή των εφικτών λύσεων και έπειτα τον προσδιορισμό του σημείου της περιοχής αυτής που δίνει στην αντικειμενική συνάρτηση την βέλτιστη τιμή Ωστόσο, η αυξανόμενη πολυπλοκότητα αρκετών προβλημάτων οικονομικής φύσεως, χωρίς όμως να περιορίζεται σε τέτοιου είδους, ανάγει τον αριθμό των μεταβλητών απόφασης σε περισσότερες από δύο. Τα προβλήματα αυτά που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη επιλύονται με βάση την μέθοδο Simplex. Η μέθοδος αυτή ανακαλύφθηκε και αναπτύχθηκε από τον Dantzig (1947) και την ομάδα του που είχε την ονομασία SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs) την περίοδο που εργάζονταν στο Πεντάγωνο των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής με σκοπό την ανάπτυξη βέλτιστων μηχανισμών εκπαίδευσης και συντήρησης όλου του μηχανικού εξοπλισμού. Νωρίτερα, είχαν διαμορφωθεί και επιλυθεί διάφορα προβλήματα τύπου γραμμικού προγραμματισμού. Τα σημαντικότερα από αυτά αφορούν στο πρόβλημα της μεταφοράς (Hitchcock 1941, Koopmans 1949) και το πρόβλημα της δίαιτας (Stigler 1945). Ο Dantzig ήταν όμως ο άνθρωπος που κατασκεύασε το γενικό πλαίσιο και ταυτόχρονα ανακάλυψε μέθοδο επίλυσης του. Μετέπειτα, διάφοροι ερευνητές ανακάλυψαν αλγορίθμους οι οποίοι βελτίωσαν την διαδικασία επίλυσης της μεθόδου Simplex (π.χ. Khachiyan, 1979; Karmakar, 1984)

3.2 Τυπική μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα καλούμε ότι είναι σε τυπική μορφή όταν είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, όλοι του οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη-αρνητικούς τους σταθερούς τους όρους και όλες οι μεταβλητές αποφάσεως είναι μη-αρνητικές. Στην περίπτωση που κάποια ή όλες από τις παραπάνω προϋποθέσεις δεν ικανοποιείται, θα πρέπει να προχωρήσουμε σε μετατροπή του προβλήματος σε τυπική μορφή με βάση τους παρακάτω κανόνες. Πιο συγκεκριμένα:

- Όταν ζητείται ο προσδιορισμός του ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ θέτουμε $g(x) = -f(x)$ και μεγιστοποιούμε την συνάρτηση $g(x)$ (δηλαδή $\min Z = -\max W$).
- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη των αντίστοιχων περιορισμών με (-1) όταν υπάρχουν αρνητικοί σταθεροί όροι.
- Στην περίπτωση της ύπαρξης ανισώσεων στους περιορισμούς εισάγουμε περιθώριες (slack variables) μεταβλητές. Όταν ο περιορισμός που έχουμε είναι της μορφής <= τότε προστίθεται μια χαλαρή μεταβλητή ενώ όταν ο περιορισμός είναι της μορφής >= τότε αφαιρείται.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου έχουμε τον περιορισμό $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 12$ τότε είναι ισοδύναμος της $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + s = 12, s \geq 0$. Στην περίπτωση όπου η συνθήκη είναι της μορφής $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 12$, τότε με την προσθήκη της χαλαρής μεταβλητής θα έχουμε ότι $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + s = 12$, $s \geq 0$

- Η τελευταία περίπτωση αφορά στις μεταβλητές χωρίς πρόσημο. Όταν η μεταβλητή μας x_j είναι αρνητική τότε πολύ απλά θέτουμε το εξής $x_j = -x_j^*$. Όταν δεν υπόκειται σε κάποιον περιορισμό τότε θέτουμε $x_j = x_j' - x_j''$, $x_j' x_j'' \geq 0$ έχοντας υπόψη ότι ισχύει ότι $x_j' = \max\{0, x_j\}$, $x_j'' = \min\{0, x_j\}$.

Η γενική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να δοθεί ως εξής:

$$
\begin{array}{l}
\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
a_{11} x_1 + \ldots \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n + \ldots = b_1 \\
a_{21} x_1 + \ldots \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n + \ldots = b_2 \\
\ldots \quad \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots = \ldots \\
a_{m1} x_1 + \ldots \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n + \ldots = b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Ωστόσο, με την εισαγωγή των περιθωρίων μεταβλητών το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μετατρέπεται ως εξής:

$$
\begin{array}{l}
\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
a_{11} x_1 + \ldots \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n + \ldots + a_{1n+m} x_{n+m} = b_1 \\
a_{21} x_1 + \ldots \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n + \ldots + a_{2n+m} x_{n+m} = b_2 \\
\ldots \quad \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots = \ldots \\
a_{m1} x_1 + \ldots \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n + \ldots + a_{mn+m} x_{n+m} = b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Μπορούμε να δούμε τα παραπάνω μέσω του επόμενου παραδείγματος. Να γραφεί σε τυποποιημένη μορφή το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$
\begin{array}{l}
\min\limits_{x_1, x_2, x_3} Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
s.t. \\
2x_1 + 3x_2 \leq 41 \\
2x_1 - x_2 + x_3 = 38 \\
x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq -55 \\
x_2 + x_3 \geq 25 \\
x_1, x_2 \geq 0, x_3 \in R
\end{array}
$$

Εφαρμόζοντας όσα είπαμε, έχουμε το παρακάτω π.γ.π.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

$$-\max_{x_1, x_2, x_3} Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3^{'} + 3x_3^{''}$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 41$$
$$2x_1 - x_2 + x_3^{'} - x_3^{''} = 38$$
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3^{'} - 2x_3^{''} + x_5 = 55$$
$$x_2 + x_3^{'} - x_3^{''} - x_6 = 25$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

3.3 Περιγραφή της Μεθόδου Simplex

Η μέθοδος Simplex η οποία θα μπορούσε να χαρακτηριστεί και ως αλγοριθμική περιλαμβάνει μια συγκεκριμένη διαδικασία βημάτων με βάση τα οποία οδηγούμαστε από ένα ακραίο σημείο του εφικτού χωρίου σε ένα άλλο πιο γειτονικό. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινώντας από μια αρχική κορυφή μπορούμε μέσω της μεθόδου να προχωρήσουμε σε άλλες γειτονικές κορυφές κατά μήκος των ακμών του πολυγώνου του εφικτού συνόλου. Σε κάθε μετάβαση της μεθόδου από μία κορυφή σε μια άλλη η μέθοδος Simplex κατορθώνει να βρει την ακμή που την οδηγεί σε μια κορυφή, η οποία δίνει βελτιωμένη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από κορυφή σε κορυφή βελτιώνεται και τελικά φτάνουμε σε μια κορυφή όπου η αντικειμενική συνάρτηση βελτιστοποιείται. Οποιαδήποτε άλλη κορυφή δίνει χειρότερη λύση και έτσι η διαδικασία τερματίζεται.

Πριν περάσουμε στην αναλυτική-μαθηματική παρουσίαση της συγκεκριμένης μεθόδου θα χρησιμοποιήσουμε μια περιγραφική παρουσίαση αυτής κατά την οποία και θεωρούμε ότι θα αναπτυχτούν τα ανάλογα ερωτήματα που θα χρειαστούν για την εισαγωγή του θεωρητικού μέρους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να επιλύσουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο βρίσκεται σε τυπική μορφή. Σκοπός μας είναι να παρέχουμε μια απλή και περιγραφική διαδικασία για το πώς αυτό το πρόβλημα θα λυθεί με την συγκεκριμένη μέθοδο.

$$\max_{x_1, x_2} Z = 6x_1 + 7x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα μπορούσε και να αποδοθεί ως:

$$\max_{x_1, x_2, x_3} Z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

s.t.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 = 12$$
$$2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Αρχικά για να σχηματίσουμε τον πρώτο πίνακα του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει να υπολογίσουμε-εντοπίσουμε μια βάση της λύσης.

*Με τον όρο **βάση*** εννοούμε τα διανύσματα της μορφής (1, 0, 0, …, 0), (0, 1, 0, …, 0) … (0, 0, …, 1) του διανυσματικού χώρου R^n. Δηλαδή, τις στήλες από τα x_j που σχηματίζουν τον $n \times n$ πίνακα. Στην δεύτερη στήλη (c_B) του πρώτου πίνακα, εισάγουμε τους αντίστοιχους συντελεστές της βάσης όπως αυτοί εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση z, ($x_3 = 0$), ($x_4 = 0$). Στην τρίτη τώρα στήλη του πρώτου πίνακα (x_B), εισέρχεται η στήλη το διάνυσμα των διαθέσιμων ποσοτήτων, ***b***. Τέλος, στις επόμενες στήλες τοποθετούμε τους συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτές εμφανίζονται στο σύστημα περιορισμών του προβλήματος το οποίο βρίσκεται πάντα σε τυπική μορφή. Με βάση τα παραπάνω, ο πρώτος πίνακας Simplex σχηματίζεται ως εξής (Πίνακας 3.1):

Πίνακας 3.1 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 1.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	0
x_B	c_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	12
x_4	0	8	2	1	0	1	8
	z						

Στην στήλη δίπλα στο c_j εμφανίζονται οι συντελεστές όπως αυτοί βρίσκονται στην αντικειμενική συνάρτηση. Οι κενές θέσεις στον πίνακα συμπληρώνονται με τα άγνωστα μέχρι στιγμής στοιχεία k_j, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3.2).

Πίνακας 3.2 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 2.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6
	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

Το ερώτημα που προκύπτει είναι το πως όμως υπολογίζονται οι τιμές των στοιχείων αυτών. Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να κάνουμε τον διαχωρισμό και να αναφέρουμε ότι για k_j, $j = 1, \ldots, 5$ τα στοιχεία αυτά υπολογίζονται ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $c_b \times b$. Άρα το $k_1 = 0 \times 12 + 0 \times 8 = 0$ ενώ τα υπόλοιπα υπολογίζονται με βάση των εξής τύπο $k_j = c_j - c_b \times b$.

Εάν τώρα κάνουμε τις αντίστοιχες πράξεις, θα έχουμε ότι ο πίνακάς μας παίρνει την παρακάτω μορφή (Πίνακας 3.3):

Πίνακας 3.3 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 3.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6
	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	k_1	$k_2 = 6 - (2 \times 0 + 2 \times 0) = 6$	$k_3 = 7 - (3 \times 0 + 1 \times 0) = 7$	$k_4 = 0$	$k_5 = 0$	

Να σημειώσουμε ότι τα υπολογισμένα στοιχεία στις θέσεις k_4 και k_5 είναι ίσα με μηδέν. Ενώ θα πρέπει να αναφέρουμε πως το στοιχείο 7, της τρίτης στήλης στην τελευταία γραμμή του πίνακα αναφέρεται ως **οδηγό στοιχείο (pivot)** (Πίνακας 3.4).

Πίνακας 3.4 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 4.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6
	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	0	6	7	0	0	

Ορισμός 1: καθορίζουμε ως εισερχόμενη στην βάση μεταβλητή την μεταβλητής της οποίας η υπολογισμένη αντίστοιχα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο παράδειγμά μας ουσιαστικά πρόκειται για την μεταβλητή x_2. Προφανώς μιλώντας για μεταβλητή που θα εισέλθει στην βάση μας κάποια θα πρέπει να εξέλθει.

Ορισμός 2: Καθορίζουμε ως εξερχόμενη μεταβλητή από την βάση την μεταβλητή η οποία έχει την μικρότερη τιμή θ.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

Συνεπώς, θα πρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα για το πώς θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους k_6 και k_7 που αναφέρονται στην παράμετρο θ. Ο υπολογισμός γίνεται με βάση τα στοιχεία της στήλης b και της στήλης που θα εισέλθει στην βάση. Πιο συγκεκριμένα, είναι ο λόγος τους και ως εκ τούτου θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα ως εξής: $k_6 = \frac{12}{3} = 4$, $k_7 = \frac{8}{1} = 8$.

Άρα τελικά, ο πίνακας έχει την μορφή που φαίνεται παρακάτω (Πίνακας 3.5).

Πίνακας 3.5 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 5.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	4
x_4	0	8	2	1	0	1	8
	z	0	6	7	0	0	

Ως οδηγό στοιχείο λοιπόν μπορούσαμε να ορίσουμε αυτό που αντιστοιχεί στο στοιχείο της γραμμής που βρίσκεται η εξερχόμενη μεταβλητή καθώς και η εισερχόμενη μεταβλητή (συνεπώς το 3). Αντικαθιστούμε λοιπόν στην πρώτη στήλη της βάσης την εξερχομένη μεταβλητή με την εισερχόμενη και προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 3.6).

Πίνακας 3.6 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 6.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7						
x_4	0						
	z						

Για να γεμίσουμε με στοιχεία τον δεύτερο πίνακα θα πρέπει να υπολογίσουμε ότι το οδηγό στοιχείο θα πρέπει να ισούται με την μονάδα (διαιρείται με το 1/3). Οπότε στην παρούσα φάση, ο Πίνακας 3.6 μετατρέπεται στον Πίνακα 3.7, όπως φαίνεται παρακάτω:

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

Πίνακας 3.7 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 7.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	
x_4	0						
	z						

Κάνοντας τις κατάλληλες γραμμοπράξεις, επιθυμούμε το στοιχείο κάτω από τον οδηγό στοιχείο να γίνει μηδέν. Οπότε, πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με (−1) και την προσθέτουμε στην δεύτερη οπότε ο Πίνακας 3.7, παίρνει την παρακάτω μορφή (Πίνακας 3.8):

Πίνακας 3.8 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 8.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	k_6
x_4	0	4	4/3	0	−1/3	1	k_7
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική υπολογίζουμε τις τιμές των k_j, $j = 1, \ldots, 7$ και προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 3.9).

Πίνακας 3.9 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 9.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	k_6
x_4	0	4	4/3	0	−1/3	1	k_7
	z	28	4/3	0	−7/3	0	

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η μεγαλύτερη θετική τιμή αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_1. Διαιρώντας τώρα με τις τιμές της μεταβλητής παίρνουμε τα k_6 και k_7, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3.10):

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

Πίνακας 3.10 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 10.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	6
x_4	0	4	4/3	0	−1/3	1	3
	z	28	4/3	0	−7/3	0	

Η εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_1 ενώ η εξερχόμενη η x_4. Πολλαπλασιάζοντας με 3/4 παίρνουμε τον οδηγό στοιχείο, το οποίο βρίσκεται στην δεύτερη στήλη και στην Τρίτη γραμμή του κύριου μέρους του πίνακα Simplex, όπως απεικονίζεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3.11).

Πίνακας 3.11 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 11.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	-
x_1	6	3	1	0	−1/4	3/4	-
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Εάν τώρα πολλαπλασιάσουμε την γραμμή που αναφέρεται το στοιχείο x_1 με (−2/3) και προσθέσουμε στην από πάνω γραμμή θα προκύψει ο παραπάτω πίνακας (Πίνακας 3.12):

Πίνακας 3.12 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 12.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	2	0	1	1/2	−1/2	-
x_1	6	3	1	0	−1/4	3/4	-
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Υπολογίζοντας τώρα τις τιμές των k_j, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 3.13):

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική

Πίνακας 3.13 **Κατασκευή πίνακα Simplex – 13.**

Βάση		c_j	6	7	0	0	
x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	2	0	1	1/2	−1/2	-
x_1	6	3	1	0	−1/4	3/4	-
	z	32	0	0	−2	−1	

Η διαδικασία μας μέσω της μεθόδου Simplex σε αυτό το σημείο έχει τελειώσει καθώς στην γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης οι υπολογισμένες ποσότητες έχουν τιμές μικρότερες ή ίσες του μηδενός. Η κορυφή της βέλτιστης λύσης δίνεται από τα στοιχεία της στήλης ***b*** και της πρώτης στήλης.

3.4 Θεωρητική προσέγγιση της Μεθόδου Simplex

Σ' αυτό το τμήμα του κεφαλαίου θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια περισσότερο θεωρητική προσέγγιση σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει μια εφικτή λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού καθώς και με ποιόν τρόπο επιτυγχάνεται η συγκεκριμένη λύση.

Αρχικά, παρατίθενται κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν βασικά στοιχεία για την κατανόηση της λύσης:

- **Κυρτό Σύνολο:** ένα σύνολο ***C*** καλείται κυρτό εάν $\forall x_1, x_2 \in C \; \exists \; x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C, \lambda \in [0, 1]$.
- **Εφικτό Σημείο:** καλείται το σημείο του οποίου οι συντεταγμένες του ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς. Ο χώρος των εφικτών σημείων καλείται εφικτός χώρος ενώ βέλτιστο σημείο αυτό που μας δίνει την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- **Εσωτερικό σημείο συνόλου:** εάν υπάρχει ανοικτή σφαίρα $(x, \varepsilon) \in C, \forall \varepsilon > 0$ τότε ένα σημείο θα καλείται συνοριακό όταν $\exists \, G(x, \varepsilon) \in C, \forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \varepsilon > 0, G(x, \varepsilon) \cap C = \varnothing$
- **Συνοριακό σημείο** θα καλείται ένα σημείο εάν δεν υπάρχει ανοικτή σφαίρα $G(x, \varepsilon) \in C, \forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \varepsilon > 0, G(x, \varepsilon) \cap C \neq \varnothing$
- **Ακρότατο συνοριακό σημείο** καλείται αυτό που δεν μπορεί αν εκφραστεί ως γραμμικός κυρτός συνδυασμός δύο διακεκριμένων σημείων του συνόλου.

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει στα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού οι εξισώσεις των περιορισμών μπορούν να γραφούν ως εξής:

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου - Ν. 2121/1993 | Εκδόσεις Κριτική
ΔΕΙΓΜΑ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ