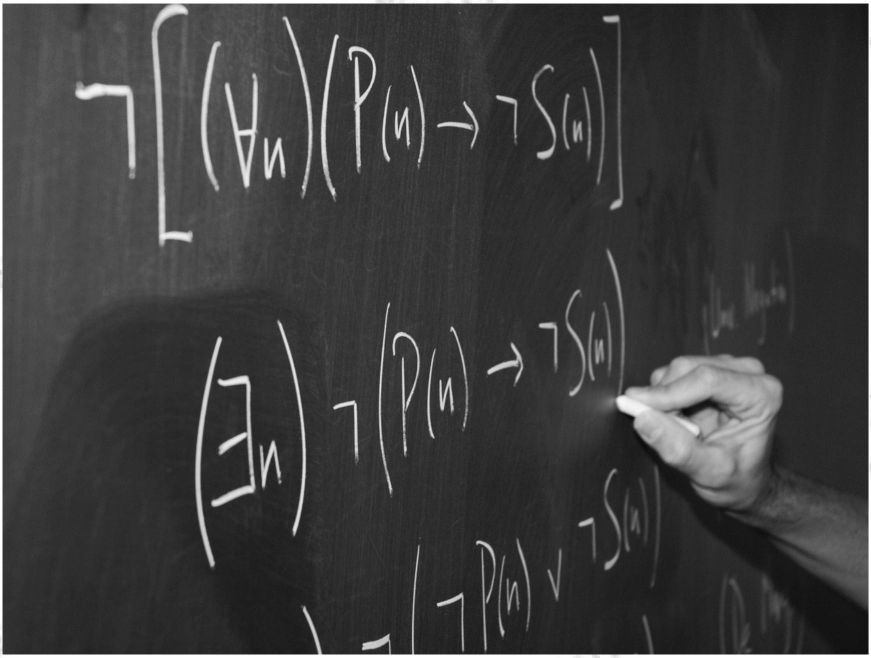
ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1 Η λογική σκέψη

Οι μαθηματικοί ασχολούνται επαγγελματικά με την ακριβή απόδοση των εννοιών που ενδιαφέρονται να περιγράψουν. Όταν διαβάζουμε κάποιον μαθηματικό ισχυρισμό, εννοείται ότι θα πρέπει να εξετάσουμε με σοβαρότητα κάθε μία λέξη που αυτός περιλαμβάνει· η καλή μαθηματική γλώσσα μάς μεταφέρει ένα σαφές και αναμφίσημο περιεχόμενο. Αν θέλετε να διαβάζετε και να γράφετε μαθηματικά, τότε θα πρέπει να εξασκηθείτε στην τέχνη των λογικών συλλογισμών. Και ο σκοπός αυτού του 1ου κεφαλαίου είναι να σας βοηθήσει να επικοινωνείτε με τη μαθηματική γλώσσα μέσω της κατανόησης των βασικών στοιχείων της λογικής.



Σχήμα 1.1 Τα σύμβολα είναι σπουδαία συνιστώσα της μαθηματικής γλώσσας.

Ας δώσουμε μια σύντομη προειδοποίηση: η μαθηματική λογική είναι δυνατόν να φανεί κάπως δύσκολη ως προς την κατανόηση – ιδίως τις πρώτες φορές που ερχόμαστε σε επαφή μαζί της. Στο παρόν κεφάλαιο αρχίζουμε με την παρουσίαση της τυπικής, ή συμβολικής, λογικής, και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε αυτή τη λογική στη μελέτη της γλώσσας των μαθηματικών. Το υλικό που θα παρουσιάσουμε θα έχει στην αρχή μια κάπως ομιχλώδη όψη, τελικά όμως (όπως ελπίζουμε) αυτή η ομίχλη θα διαλυθεί, και όταν αυτό συμβεί, οι μαθηματικές προτάσεις θα αρχίσουν να έχουν σαφέστερο και πληρέστερο νόημα για σας.

1.1 Τυπική λογική

Ο συμβολισμός αποτελεί σπουδαία συνιστώσα της μαθηματικής γλώσσας. Οι μαθηματικοί γεμίζουν συχνά τους μαυροπίνακές τους με ποικίλους παράξενους χαρακτήρες και σύμβολα. Αυτή η εικόνα ίσως είναι τρομακτική για τον αρχάριο αναγνώστη, υπάρχει όμως μια καλή δικαιολογία για αυτή τη μορφή επικοινωνίας: Πολύ συχνά η διαδικασία αναδιατύπωσης ενός προβλήματος με τη χρήση συμβολικής γλώσσας βοηθά στο να αντιληφθούμε τι ακριβώς «τρέχει» με αυτό το πρόβλημα. Αντί να κινούμαστε στο θολό τοπίο της καθημερινής γλωσσικής χρήσης, μεταγράφουμε τα προβλήματά μας με τη χρήση συμβόλων και στη συνέχεια εκτελούμε επακριβώς προσδιορισμένους συμβολικούς χειρισμούς πάνω σε αυτά τα σύμβολα. Αυτή είναι η ουσία μιας πανίσχυρης τεχνικής που ονομάζουμε *φορμαλισμός* [ή *τυπικοποίηση*, ή *τυποποίηση*]. Στην τρέχουσα ενότητα θα εξερευνήσουμε το πώς η τυποποιητική προσέγγιση της λογικής μπορεί να μας βοηθήσει να αποφεύγουμε συλλογιστικά σφάλματα.

Ας σημειώσουμε το εξής περί της ορολογίας: θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο *τυπικός* για να περιγράψουμε όσες διαδικασίες στηρίζονται σε χειρισμούς συμβόλων. Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται συχνά για να σημάνει το «αυστηρός», αλλά, εδώ, δεν έχουμε αυτή την πρόθεση. Τα τυπικά επιχειρήματα μπορεί να είναι «αυστηρά» μεν, αλλά το ίδιο ισχύει και για επιχειρήματα που δεν στηρίζονται επί συμβόλων.

Ένα ελκυστικό χαρακτηριστικό της τυποποίησης είναι ότι μας επιτρέπει να εργαζόμαστε χωρίς να σκεπτόμαστε κατ' ανάγκην το πώς ερμηνεύονται τα εκάστοτε σύμβολα. Και, υπ' αυτή την έννοια, η τυπική λογική είναι κατ' ουσία «λογική *μη* σκέψη». Πώς συμβαίνει αυτό να καταλήγει ως πλεονέκτημα; Συμβαίνει διότι οι τυπικοί υπολογισμοί είναι λιγότερο επιρρεπείς σε σφάλματα. Πρέπει να είστε ήδη εξοικειωμένοι με αυτό το φαινόμενο: το μεγαλύτερο μέρος της αριθμητικής που διδάσκεται στο σχολείο έχει τυπική μορφή. Εκεί, μας εφοδιάζουν με έναν καλά ορισμένο συμβολικό αλγόριθμο για τον πολλαπλασιασμό αριθμών (με χαρτί και μολύβι) και μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε αποτελεσματικά τριψήφιους αριθμούς χωρίς να χρειάζεται να ασχοληθούμε ιδιαίτερα με το τι χειρισμούς πραγματοποιούμε. Φυσικά, η οποιαδήποτε τυποποίηση είναι άχρηστη αν δεν γνωρίζουμε τίποτε από όσα κάνουμε, διότι στο τέλος των όποιων τυπικών υπολογισμών θα πρέπει να είμαστε σε θέση να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα.

1.1.1 Διερευνητικά προβλήματα

Τα τρία *διερευνητικά προβλήματα* που θα ακολουθήσουν έχουν σχεδιαστεί για να σας βοηθήσουν να συλλογιστείτε τις ιδέες αυτής της ενότητας. Θα πρέπει να προσπαθήσετε να τα λύσετε πριν προχωρήσετε στα επόμενα. Το ιδανικό θα ήταν, επίσης, να συζητήσετε τις απαντήσεις σας με τους/τις συμφοιτητές/τριές σας. Θα συναντήσετε τέτοια προβλήματα διασκορπισμένα σε ολόκληρο το βιβλίο· και όταν τα συναντάτε, να θυμάστε ότι αποτελούν ζητήματα με «ανοικτές προοπτικές», τα οποία συχνά θα εισάγουν έννοιες όχι οικείες σε σας. Για να τα αξιοποιήσετε στο έπακρο, αφιερώστε λίγο χρόνο στο να τα σκεφθείτε μόνοι σας, κρατήστε σημειώσεις των όποιων αρχικών απαντήσεων σκεφτήκατε, και στη συνέχεια μοιραστείτε τις σκέψεις σας, τα συμπεράσματά σας και τις απορίες σας με άλλους.

Διερευνητικό πρόβλημα 1.1 Ο Αλέκος, κρύβοντας τα χέρια πίσω από την πλάτη του, ισχυρίζεται ότι κρατά ένα εικοσάλεπτο στο αριστερό του χέρι και ένα χαρτονόμισμα των 20€ στο δεξί του χέρι. Εσείς πιστεύετε ότι ο Αλέκος λέει ψέματα. Τι θα μπορούσατε να προσφέρετε ως τεκμήριο για να αποδείξετε ότι όντως ψεύδεται; Επινοήστε κάποιο είδος διαγράμματος, γραφήματος, ή συμβολισμού, ικανού να απεικονίσει όλα τα εναλλακτικά ενδεχόμενα.

Διερευνητικό πρόβλημα 1.2 Η Βασιλική γνωρίζει αν ο Αλέκος λέει ψέματα ή όχι και υπόσχεται ότι θα σας δώσει ένα γλύκισμα στην περίπτωση που ο Αλέκος ψεύδεται. Η Βασιλική τηρεί πάντοτε τις υποσχέσεις της. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η Βασιλική δεν σας δίνει κανένα γλύκισμα· τι συμπέρασμα μπορείτε να εξαγάγετε από αυτό το γεγονός; Εναλλακτικά, ας υποθέσουμε ότι η Βασιλική σάς δίνει τελικά ένα γλύκισμα· τι συμπεραίνετε; Παρουσιάστε τους συλλογισμούς σας με κάποιον συστηματικό τρόπο.

Διερευνητικό πρόβλημα 1.3 Η Αλκυόνη και η Γαλήνη είναι δύο θερινές κατασκηνώσεις που τηρούν τους εξής καθημερινούς κανόνες σχετικά με τη χρήση και τον καθαρισμό των κολυμβητηρίων που διαθέτουν.

Ο κανόνας της Αλκυόνης: αν το κολυμβητήριο έχει χρησιμοποιηθεί το απόγευμα και δεν έχει καθαριστεί μετά το γεύμα, τότε πρέπει να καθαριστεί μετά το δείπνο.

Ο κανόνας της Γαλήνης: τουλάχιστον ένα από τα εξής τρία πρέπει να τηρείται: (α) το κολυμβητήριο δεν χρησιμοποιείται τα απογεύματα· (β) εκτελείται καθαρισμός μετά το γεύμα· (γ) εκτελείται καθαρισμός μετά το δείπνο.

Σε τι διαφέρουν μεταξύ τους οι παραπάνω κανόνες; Εξηγήστε το σκεπτικό σας.

1.1.2 Σύνδεσμοι και προτάσεις

Για να τυποποιήσουμε τη λογική, θα χρειαστούμε έναν τρόπο συστηματικής μεταγραφής των (λογικών) ισχυρισμών σε συμβολική μορφή. Θα αρχίσουμε με έναν επακριβή ορισμό του όρου *ισχυρισμός*:

Ορισμός 1.1 *Ισχυρισμός* [επίσης: *πρόταση*] θεωρείται οποιαδήποτε δηλωτική φράση, η οποία είτε είναι αληθ, είτε είναι ψευδής – όχι όμως και τα δύο.

Τα ακόλουθα είναι παραδείγματα ισχυρισμών:

- το 7 είναι περιττός αριθμός.
- $1 + 1 = 4$.
- Όταν βρέχει, το έδαφος είναι υγρό.
- Ο καθηγητής μας κατάγεται από τον πλανήτη Άρη.

Ας προσέξουμε, σε αυτό το σημείο, ότι δεν είναι απαραίτητο να είμαστε σε θέση να διαγνώσουμε αν κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής ή αν είναι ψευδής, προκειμένου αυτός να καταστεί όντως ισχυρισμός. Ο καθηγητής μας είτε θα είναι αρειανός είτε δεν θα είναι αρειανός, αν και ίσως να αμφιβάλλουμε για το ποια από τις δύο περιπτώσεις ισχύει πραγματικά.

Πώς θα μπορούσε μια δηλωτική φράση να μην έχει τη μορφή ισχυρισμού; Υπάρχουν κυρίως δύο τρόποι με τους οποίους συμβαίνει κάτι τέτοιο. Μια δήλωση ενδέχεται να περιέχει κάποιον απροσδιόριστο όρο:

Το x είναι άρτιος αριθμός.

Σε αυτές τις περιπτώσεις αποκαλούμε το «x» *ελεύθερη μεταβλητή*. Το αληθές ή ψευδές της παραπάνω δήλωσης εξαρτάται από την τιμή του x, και άρα, όσο η τιμή του παραμένει απροσδιόριστη, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε τη σχετική δήλωση ως ισχυρισμό. Ένας δεύτερος τύπος δηλώσεων που δεν είναι ισχυρισμοί είναι οι *αυτοαναφορικές* δηλώσεις:

Αυτή η πρόταση είναι ψευδής.

Δεν είναι δυνατόν να χαρακτηρίσουμε την παραπάνω δήλωση ούτε ως αληθή ούτε ως ψευδή. Αν πούμε ότι είναι αληθής, τότε η δήλωση ισχυρίζεται ότι είναι ψευδής· και αν πούμε ότι είναι ψευδής, τότε εμφανίζεται να λέει το αληθές.

Το εξής φαινόμενο συμβαίνει πολύ συχνά: έχουμε έναν σύνθετο ισχυρισμό, ο οποίος αποτελείται από διάφορους απλούστερους ισχυρισμούς συνδεδεμένους μεταξύ τους με λέξεις όπως «και», «είτε», «αν…τότε» κ.ά. Αναπαριστούμε αυτές τις συνδετικές λέξεις με τους πέντε *λογικούς συνδέσμους* που παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1. Οι λογικοί σύνδεσμοι είναι πολύ χρήσιμοι για την ανάλυση σύνθετων ισχυρισμών σε απλούστερους, διότι φωτίζουν σημαντικές λογικές ιδιότητες των ισχυρισμών.

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε ένα τυπικό σύστημα για τη λογική, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να *μεταφράσουμε* οποιαδήποτε φράση φυσικής γλώσσας (λ.χ. στα ελληνικά, ή στα αγγλικά, κ.λπ.) στον αντίστοιχο τυπικό ισχυρισμό. Η τεχνική μας προς τούτο θα είναι να αντιστοιχούμε γράμματα του αλφαβήτου στους απλούς ισχυρισμούς και στη συνέχεια να κατασκευάζουμε σύνθετες εκφράσεις μέσω των λογικών συνδέσμων.

Περιγραφή	**Σύμβολο**
και	$\wedge$
ή, είτε	$\vee$
όχι	$\neg$
«συνεπάγεται, αν…τότε	$\rightarrow$
ισοδυναμεί, αν και μόνο αν	$\leftrightarrow$

Πίνακας 1.1 Οι πέντε λογικοί σύνδεσμοι.

Παράδειγμα 1.1 Αν το p αναπαριστά τον ισχυρισμό «φοράς παπούτσια», και το q αναπαριστά τον ισχυρισμό «είναι αδύνατον να κόψεις τα νύχια σου», τότε η έκφραση

$$p \rightarrow q$$

αναπαριστά τον ισχυρισμό «όταν φοράς τα παπούτσια σου, είναι αδύνατον να κόψεις τα νύχια σου». Μπορεί, φυσικά, κάποιος να διαλέξει μια παραλλαγή αυτής της διατύπωσης σε φυσική γλώσσα, λ.χ.: «δεν είναι δυνατόν να κόψεις τα νύχια σου, αφού φοράς τα παπούτσια σου», ή «με το να φοράς τα παπούτσια σου, καθίσταται αδύνατη η κοπή των νυχιών σου». Ο ισχυρισμός $\neg q$ μεταφράζεται κατά γράμμα στη φράση «δεν ισχύει ότι δεν είναι δυνατόν να κόψεις τα νύχια σου». Φυσικά, στην καθημερινή μας γλώσσα λέμε πιο απλά: «Είναι δυνατόν να κόψεις τα νύχια σου», αλλά αυτό ήδη εμπεριέχει τη χρήση της λογικής, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

1.1.3 Οι πίνακες αλήθειας

Δεν έχουμε όμως ολοκληρώσει το στήσιμο του τυπικού λογικού συστήματός μας, διότι δεν έχουμε ακόμα συγκεκριμενοποιήσει το νόημα των λογικών συνδέσμων. Φυσικά, τα ονόματα που τους έχουμε αποδώσει μαρτυρούν το ποια είναι η πρόθεση χρήσης που έχουμε κατά νου, αλλά για να επιτρέψουμε τη σύνθεση ισχυρισμών με απόλυτη μαθηματική ακρίβεια, θα πρέπει να καταστήσουμε σαφές ποια ακριβώς είναι η ερμηνεία καθενός λογικού συνδέσμου.

Ο ορισμός του νοήματος ενός μαθηματικού συμβόλου αποτελεί καθήκον δυσκολότερο από ό,τι αρχικά φαίνεται. Ακόμα και το σύμβολο + της πρόσθεσης στη συνήθη αριθμητική παρουσιάζει προβλήματα. Αν και όλοι μας έχουμε μια διαισθητική αντίληψη της πρόσθεσης –περιγράφει το πώς να ενώσουμε δύο ποσότητες–, φαίνεται πολύ δύσκολο να εξηγήσουμε την έννοια της πρόσθεσης χωρίς να επιστρέψουμε σε διαισθητικά σχήματα λόγου: τι σημαίνει ακριβώς το «ενώσουμε»; Και τι θεωρούμε, πραγματικά, ως «ποσότητα»;

Θα μπορούσαμε, φυσικά, με απλό μεν αλλά καθόλου πρακτικό τρόπο, να ορίσουμε το σύμβολο + με το να παραθέσουμε σε έναν κατάλογο όλες τις περιπτώσεις της πρόσθεσης, όπως στον Πίνακα 1.2. Ένας τέτοιος πίνακας δεν θα τελείωνε βέβαια πουθενά, θα αποτελούσε όμως –θεωρητικά– έναν πλήρη ορισμό του +.

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2
2	1	3
1	2	3
⋮	⋮	⋮

Πίνακας 1.2 Ο ορισμός του συμβόλου + με την απαρίθμηση όλων των περιστατικών πρόσθεσης απαιτεί έναν ατελεύτητο πίνακα.

Η κατάσταση που συναντάμε στη λογική είναι πολύ πιο εύκολο να αντιμετωπιστεί. Κάθε ισχυρισμός είναι δυνατόν να αποτιμηθεί με δύο μόνο τρόπους: είτε ως αληθής («Α»), είτε ως ψευδής («Ψ»). Επομένως, όταν χρησιμοποιούμε δύο μεταβλητές p και q για την αναπαράσταση δύο ισχυρισμών, μπορούμε να τις χειριστούμε ως δύο αγνώστους, καθένας από τους οποίους επιδέχεται μία από δύο τιμές: Α ή Ψ. Αυτό μάς επιτρέπει να ορίσουμε το νόημα των λογικών συνδέσμων χρησιμοποιώντας πίνακες: Αντί για άπειρες στο πλήθος τους τιμές για τις αριθμητικές μεταβλητές x και y, έχουμε μόνο δύο δυνατές τιμές για καθεμία από τις λογικές μεταβλητές p και q.

Θα προχωρήσουμε τώρα στον προσδιορισμό της ερμηνείας καθενός από τους λογικούς συνδέσμους, παραθέτοντας τον πλήρη κατάλογο των τιμών Α/Ψ που παράγουν για κάθε συνδυασμό τιμών T/F των εμπλεκόμενων λογικών μεταβλητών. Η απλούστερη περίπτωση είναι εκείνη του συνδέσμου της άρνησης $\neg$: αν το p είναι αληθές, τότε το $\neg p$ είναι ψευδές, και αντίστροφα.

p	$\neg p$
Α	Ψ
Ψ	Α

Αυτούς τους πίνακες τιμών θα τους ονομάζουμε *πίνακες αλήθειας*: οι πίνακες αυτοί προσδιορίζουν τις τιμές Α/Ψ που παράγει ο αντίστοιχος λογικός σύνδεσμος.

Οι σύνδεσμοι «και» και «ή» ορίζονται από τους παρακάτω πίνακες αλήθειας. Αφού τώρα έχουμε δύο λογικές μεταβλητές, και καθεμιά επιδέχεται δύο τιμές, θα πρέπει να απαριθμήσουμε 4 περιπτώσεις:

p	q	$p \wedge q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

p	q	$p \vee q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Ο ορισμός του συνδέσμου «και» ($\wedge$) είναι ο αναμενόμενος: προκειμένου να αληθεύει ο (συζευκτικός) ισχυρισμός $p \wedge q$, πρέπει να αληθεύει τόσο ο ισχυρισμός p όσο και ο ισχυρισμός q. Ο αντίστοιχος ορισμός για τον σύνδεσμο «ή» ($\vee$) είναι κατά τι λιγότερο προφανής: ο ορισμός μας προσδιορίζει ότι ο (διαζευκτικός) ισχυρισμός $p \vee q$ αληθεύει όταν ο ισχυρισμός p αληθεύει, όταν ο q αληθεύει, αλλά και όταν αληθεύουν και οι δύο. Αυτή η ερμηνεία διαφέρει, σε μερικές περιπτώσεις, από εκείνην της καθημερινής μας πρακτικής: όταν σας προσφέρουν «σούπα ή σαλάτα» σε κάποιο εστιατόριο, ο σερβιτόρος δεν περιμένει από εσάς να απαντήσετε «και τα δύο».

Ο σύνδεσμος «αν και μόνο αν» ($\leftrightarrow$) απαιτεί και οι δύο επιμέρους ισχυρισμοί να έχουν την ίδια τιμή αλήθειας. Ο σχετικός πίνακας αλήθειας είναι, δηλαδή, ο εξής:

p	q	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Διάφοροι συγγραφείς χρησιμοποιούν τη συντομογραφία «αν» για την έκφραση «αν και μόνο αν». (Ο λογικός σύνδεσμος «αν...τότε» ($\rightarrow$) έχει τη λιγότερο προφανή ερμηνεία διαισθητικά:

p	q	$p \rightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Για να κατανοήσουμε τα κίνητρα που οδηγούν σε αυτό τον προσδιορισμό, ας επανέλθουμε στον ισχυρισμό $p \rightarrow q$, του παραδείγματος 1.1.

Αν φοράς τα παπούτσια σου, τότε είναι αδύνατον να κόψεις τα νύχια σου.

Αν θέλει κάποιος να διαψεύσει αυτό τον ισχυρισμό, τότε θα πρέπει να κατορθώσει να κόψει τα νύχια του την ώρα που όντως φορά τα παπούτσια του. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα πρέπει να παραδεχθεί –τουλάχιστον– ότι ο ισχυρισμός δεν είναι ψευδής· και για οποιονδήποτε ισχυρισμό, αν αυτός δεν ψεύδεται, τότε αληθεύει. Αν κάποιος δεν φορά παπούτσια, ίσως να είναι και ίσως να μην είναι (για κάποιον απροσδιόριστο λόγο) σε θέση να κόψει τα νύχια του· κανένα όμως από αυτά τα δύο ενδεχόμενα δεν αντιφάσκει προς τον ισχυρισμό $p \rightarrow q$.

Από μια άλλη οπτική γωνία, αν ζούσαμε σε κάποιον κόσμο όπου δεν θα υπήρχαν παπούτσια, τότε ο παραπάνω ισχυρισμός είναι *τετριμμένα αληθής*: αφού (σε έναν τέτοιο κόσμο) κανείς και ποτέ δεν μπορεί να φορά παπούτσια, δεν αποτελεί σφάλμα το να ισχυριστούμε ότι «αν φοράς παπούτσια, τότε όλα είναι δυνατά». Αυτό ακριβώς εξηγεί τις δύο τελευταίες γραμμές του πίνακα αλήθειας: όταν η υπόθεση p είναι ψευδής, τότε ο ισχυρισμός αληθεύει όποια τιμή και αν έχει το συμπέρασμα q.

Οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν συχνά τον όρο «συνεπάγεται» ως συνώνυμο του λογικού συνδέσμου $\rightarrow$. Η φράση «αν p τότε q» φέρει το ίδιο νόημα με τη φράση «p συνεπάγεται q», και συγκεκριμένα ότι το q αποτελεί αναγκαίο επακόλουθο του p. Αλλά ο όρος «συνεπάγεται» επιδέχεται στα ελληνικά (όπως και στα αγγλικά ο όρος «imply») διάφορες ερμηνείες. Σε κάποιες περιστάσεις ερμηνεύεται και ως «υπονοεί», όπως λ.χ. στη φράση «Δεν είπε ότι ήθελε να φύγει, αλλά αυτό συνεπαγόταν από τα λόγια της». Η μαθηματική χρήση αυτού του όρου είναι σαφώς αυστηρότερη και εκφράζει μια αναγκαστική σχέση, π.χ.: «$x > 3$ συνεπάγεται $x^2 > 3$». Έχει μεγάλη σημασία να αναγνωρίζουμε το πότε και πώς διάφοροι συνηθισμένοι όροι της καθημερινής μας γλώσσας αποκτούν στα μαθηματικά μια ιδιαίτερη ερμηνεία. Η άσκηση 32, στο τέλος αυτής της ενότητας, διερευνά ένα πρόσθετο παράδειγμα – αυτό της λέξης «μόνο».

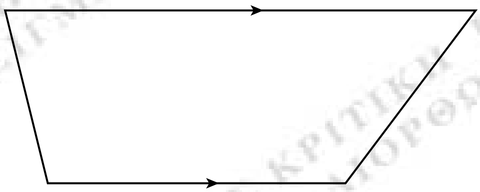
1.1.4 Λογικές ισοδυναμίες

Ορισμός 1.2 Δύο ισχυρισμοί είναι *λογικά ισοδύναμοι* αν έχουν τις ίδιες τιμές αλήθειας σε όλες τις περιστάσεις – αν δηλαδή έχουν τον ίδιο πίνακα αλήθειας.

Ορισμένες ισοδυναμίες εμφανίζονται συχνά στα μαθηματικά, όπως και στην καθημερινή μας ζωή.

Παράδειγμα 1.2 Ας εξετάσουμε το ακόλουθο θεώρημα της γεωμετρίας από το Λύκειο:

Αν ένα τετράπλευρο περιέχει ζεύγος παράλληλων πλευρών, τότε περιέχει και ένα ζεύγος παραπληρωματικών γωνιών.[1]



Το παραπάνω θεώρημα έχει τη μορφή της συνεπαγωγής $p \rightarrow q$, όπου ο ισχυρισμός p είναι ότι το τετράπλευρο φέρει ένα ζεύγος παράλληλων πλευρών, και ο q είναι ο ισχυρισμός ότι το τετράπλευρο περιέχει ζεύγος παραπληρωματικών γωνιών.

Είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και το εξής διαφορετικό θεώρημα, που αναπαρίσταται συμβολικά με τον ισχυρισμό $\neg q \rightarrow \neg p$:

Αν ένα τετράπλευρο δεν περιέχει ζεύγος παραπληρωματικών γωνιών, τότε δεν περιέχει ζεύγος παράλληλων πλευρών.

1. Θυμίζουμε ότι δύο γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα ίσο με 180°.

Γνωρίζουμε ότι αυτό το δεύτερο θεώρημα είναι λογικά ισοδύναμο με το πρώτο, διότι ο ισχυρισμός $p \rightarrow q$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον ισχυρισμό $\neg q \rightarrow \neg p$, όπως διαπιστώνεται στον ακόλουθο πίνακα αλήθειας:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Αυτό που παρατηρούμε στον παραπάνω πίνακα είναι ότι η στήλη του ισχυρισμού $p \rightarrow q$ είναι επακριβώς η ίδια με τη στήλη του ισχυρισμού $\neg q \rightarrow \neg p$.

Ας εξετάσουμε τώρα μία ακόμα παραλλαγή αυτού του θεωρήματος:

> Αν ένα τετράπλευρο περιέχει κάποιο ζεύγος παραπληρωματικών γωνιών, τότε περιέχει και ζεύγος παράλληλων πλευρών.

Αυτή η φράση έχει τη μορφή $q \rightarrow p$, αλλά ο παρακάτω πίνακας αλήθειας μάς δείχνει ότι ο ισχυρισμός $q \rightarrow p$ *δεν* είναι λογικά ισοδύναμος με τον ισχυρισμό $p \rightarrow q$, διότι οι τιμές αλήθειας τους διαφέρουν στη 2η και 3η γραμμή.

p	q	$q \rightarrow p$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Πράγματι, αυτή η τελευταία φράση δεν αληθεύει, εν γένει, στη γεωμετρία. (Μπορείτε να δώσετε αντιπαράδειγμα, δηλαδή να σχεδιάσετε κάποιο τετράπλευρο ως προς το οποίο η παραπάνω φράση διαψεύδεται;)

Ο ισχυρισμός $\neg q \rightarrow \neg p$ ονομάζεται ο *αντιθετοαντίστροφος* του $p \rightarrow q$, ενώ ο ισχυρισμός $q \rightarrow p$ ονομάζεται ο *αντίστροφος* του $p \rightarrow q$. Οι πίνακες αλήθειας που παραθέσαμε πιο πριν αποδεικνύουν ότι ο αντιθετοαντίστροφος ενός ισχυρισμού s είναι λογικά ισοδύναμος με τον s, ενώ ο αντίστροφος του s ίσως να μην είναι.

Υπάρχει, μάλιστα, πληθώρα περιπτώσεων στις οποίες η θεώρηση του αντιστρόφου ως αληθούς παράγει προβλήματα. Π.χ., ας υποθέσουμε ότι αληθεύει ο εξής ισχυρισμός:

> Αν κάποια εταιρεία δεν συμμετέχει σε παράνομες λογιστικές πρακτικές, τότε ένας έλεγχος δεν θα παραγάγει σχετικά στοιχεία ή παρατυπίες.

Προφανώς, το να υποθέσουμε κάτι τέτοιο είναι φυσικό και εύλογο, διότι αν δεν υπάρχουν παρατυπίες, δεν μπορούν να υπάρξουν και αποδείξεις για κάτι τέτοιο. Παρά ταύτα, το αντίστροφο είναι μάλλον ψευδές:

> Αν ένας λογιστικός έλεγχος δεν αποκάλυψε παρατυπίες, τότε η ελεγχθείσα εταιρεία δεν συμμετέχει σε παράνομες λογιστικές πρακτικές.

Άλλωστε, κανείς δεν μπορεί να αποκλείσει την περίπτωση να διέφυγε την προσοχή των ελεγκτών κάποια παρατυπία της εταιρείας.

Σε αυτό το σημείο ίσως αισθάνεστε την ανάγκη να διαμαρτυρηθείτε ότι η τυπική λογική καταβάλλει πολύ κόπο μόνο και μόνο για να επιβεβαιώνει συλλογισμούς όπως αυτόν του τελευταίου παραδείγματος. Και αυτό το τελευταίο δεν είναι άλλο παρά απλή κοινή λογική – σωστά; Μάλλον ισχύει αυτό. Όμως, ό,τι φαίνεται εύλογο σε κάποιον από εμάς, ίσως να μην είναι σαφές σε κάποιον άλλο. Επιπρόσθετα, το σύστημα της τυπικής λογικής που αναπτύσσουμε είναι σε θέση να χειριστεί αρκετά πιο περίπλοκες καταστάσεις, για τις οποίες η «κοινή λογική» πιθανώς να αποτύγχανε. Η λύση του επόμενου παραδείγματος χρησιμοποιεί την τυπική λογική. Προσπαθήστε να λύσετε το σχετικό πρόβλημα με βάση την «κοινή λογική». Αν και η οδός διά της τυπικής λογικής είναι ίσως λίγο πιο χρονοβόρα, θα σας διαλύσει κάθε αμφιβολία που ίσως σας έμεινε για τον δικό σας συλλογισμό.

Παράδειγμα 1.3 Αν ο Ααρών έχει αργήσει, τότε θα έχει αργήσει και ο Βασίλειος. Και, αν τόσο ο Ααρών όσο και ο Βασίλειος έχουν αργήσει, τότε η τάξη θα πλήττει. Έστω ότι η τάξη δεν έχει πλήξει· τι συμπεραίνουμε για τον Ααρών;

Λύση: Ας αρχίσουμε μεταγράφοντας τον πρώτο ισχυρισμό σε συμβολική λογική:

$p =$ ο Ααρών έχει αργήσει.
$q =$ ο Βασίλης έχει αργήσει.
$r =$ η τάξη πλήττει.

Έστω S ο ισχυρισμός «Αν ο Ααρών έχει αργήσει, τότε θα έχει αργήσει και ο Βασίλειος. Και, αν τόσο ο Ααρών όσο και ο Βασίλειος έχουν αργήσει, τότε η τάξη θα πλήττει». Ο ισχυρισμός S μεταγράφεται, συμβολικά, στον εξής ισχυρισμό:

$$S = (p \to q) \wedge [(p \wedge q) \to r]$$

Ας κατασκευάσουμε λοιπόν τον πίνακα αλήθειας του S. Προς τούτο, προχωρούμε σταδιακά, αρχίζοντας από τα μέρη του S στις εσώτερες παρενθέσεις και συνεχίζοντας προς τις εξώτερες.

α/α γραμμής	p	q	r	$p \to q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	S
1	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
2	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
3	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
4	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
5	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
6	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
7	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
8	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α

Θα ήταν καλό να ελέγξετε ότι η τελευταία στήλη όντως παράγεται από τη σύζευξη («και») των στηλών $p \to q$ και $(p \wedge q) \to r$.

Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι οι πιθανές τιμές αλήθειας του ισχυρισμού *p*. Μας δίνεται ότι ο *S* αληθεύει, άρα μπορούμε να αγνοήσουμε τις γραμμές 2, 3 και 4, διότι σε αυτές ο *S* είναι ψευδής. Έχουμε επιπλέον την υπόθεση ότι η τάξη δεν πλήττει, επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε επίσης τις γραμμές όπου το *r* είναι αληθές (εδώ: τις γραμμές με περιττό αύξοντα αριθμό). Στις γραμμές που απομένουν, θα περιέχονται οι μόνοι επιτρεπτοί συνδυασμοί τιμών αλήθειας των *p*, *q*, *r* – και αυτές οι γραμμές είναι οι 6 και 8. Η λογική μεταβλητή *p* έχει τιμή αλήθειας«Ψ» και στις δύο αυτές γραμμές. Και αυτό σημαίνει, τελικά, ότι ο Ααρών δεν έχει αργήσει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1

1. Έστω οι εξής ισχυρισμοί:

   p = Υπάρχει νερό στους κυλίνδρους.
   q = Η φλάντζα έχει φθαρεί.
   r = Ο κινητήρας τίθεται σε λειτουργία.

   (α) Μεταγράψτε τον εξής ισχυρισμό σε συμβολική έκφραση της τυπικής λογικής.

   Αν η φλάντζα έχει φθαρεί και υπάρχει νερό στους κυλίνδρους, τότε ο κινητήρας δεν τίθεται σε λειτουργία.

   (β) Αποδώστε τον εξής τυπικό ισχυρισμό στα καθημερινά μας ελληνικά.

   $$r \to \neg(q \vee p)$$

2. Έστω οι εξής ισχυρισμοί:

   p = Βρίσκεσαι στη Σεούλ.
   q = Βρίσκεσαι στην Κουαντζού.
   r = Βρίσκεσαι στη Νότια Κορέα.

   (α) Μεταγράψτε την εξής φράση σε ισχυρισμό της τυπικής λογικής:

   Αν δεν είσαι στην Νότια Κορέα τότε δεν είσαι ούτε στην Σεούλ, ούτε στην Κουαντζού.

   (β) Αποδώστε τον εξής τυπικό ισχυρισμό στα καθημερινά μας ελληνικά:

   $$q \to (r \wedge \neg p)$$

3. Έστω οι εξής ισχυρισμοί:

   p = Έχεις δικαίωμα ψήφου.
   q = Η ηλικία σου είναι κάτω των 18 ετών.
   r = Η καταγωγή σου είναι από τον πλανήτη Άρη.

(α) Μεταγράψτε την εξής φράση σε ισχυρισμό της τυπικής λογικής:

Αν είσαι κάτω των 18 ετών ή αν έχεις αρειανή καταγωγή, τότε δεν έχεις δικαίωμα ψήφου.

(β) Δώστε τον αντιθετοαντίστροφο του παραπάνω ισχυρισμού (σε συμβολική μορφή της τυπικής λογικής).

(γ) Αποδώστε τον αντιθετοαντίστροφο ισχυρισμό σε καθημερινά ελληνικά.

4. Έστω *s* ο εξής ισχυρισμός:

Αν μελετάς πολύ, τότε ξενυχτάς.

(α) Δώστε τον αντίστροφο ισχυρισμό του *s*.

(β) Δώστε τον αντιθετοαντίστροφο ισχυρισμό του *s*.

5. Έστω *s* ο εξής ισχυρισμός:

Αν βρέχει, τότε το έδαφος είναι υγρό.

(α) Δώστε τον αντίστροφο ισχυρισμό του *s*.

(β) Δώστε τον αντιθετοαντίστροφο ισχυρισμό του *s*.

6. Δώστε ένα αντιπαράδειγμα τετραπλεύρου το οποίο να αποδεικνύει ότι ο *αντίστροφος* του παρακάτω ισχυρισμού είναι ψευδής:

Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο παράλληλες πλευρές, τότε έχει δύο παραπληρωματικές γωνίες.

7. Αποκαλούμε δύο διατεταγμένα ζεύγη (a, b) και (c, d) *ίσα*, αν $a = c$ και $b = d$. Έστω *s* ο εξής ισχυρισμός:

Αν $(a, b) = (c, d)$ τότε $a = c$.

(α) Αληθεύει ο παραπάνω ισχυρισμός *s*;

(β) Γράψτε τον αντίστροφο του *s*.

(γ) Αληθεύει ο αντίστροφος του *s*; Εξηγήστε.

8. Δώστε παράδειγμα ενός ισχυρισμού της μορφής «αν…τότε», τέτοιου ώστε να αληθεύουν τόσο αυτός όσο και ο αντίστροφός του.

9. Δείξτε, με τη χρήση πινάκων αλήθειας, ότι οι τυπικοί ισχυρισμοί $p \leftrightarrow q$ και $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ είναι λογικά ισοδύναμοι.

10. Χρησιμοποιώντας πίνακες αλήθειας, να δείξετε τις εξής λογικές ισοδυναμίες:

(α) Ο $\neg(p \vee q)$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $\neg p \wedge \neg q$.

(β) Ο $\neg(p \wedge q)$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $\neg p \vee \neg q$.

Οι παραπάνω ισοδυναμίες έχουν μείνει γνωστές ως «οι νόμοι του *De Morgan*», από το όνομα του επιστήμονα της λογικής του 19ου αιώνα, Augustus De Morgan.

11. Είναι οι ισχυρισμοί $\neg(p \rightarrow q)$ και $\neg p \rightarrow \neg q$ λογικά ισοδύναμοι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας πίνακες αλήθειας.

12. Χρησιμοποιήστε πίνακες αλήθειας για να δείξετε ότι ο $(a \vee b) \wedge (\neg(a \wedge b))$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $(a \leftrightarrow \neg b)$. (Αυτός ο σχηματισμός των τιμών Α/Ψ αποκαλείται μερικές φορές η *αποκλειστική διάζευξη* των a και b.)

13. Χρησιμοποιήστε πίνακες αλήθειας για να δείξετε ότι ο ισχυρισμός:

$$[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q$$

αληθεύει πάντοτε, ανεξάρτητα από τις τιμές αλήθειας των p και q.

14. Έστω οι εξής ισχυρισμοί:

p = Ο Αλέξης πεινάει.
q = Το ψυγείο είναι άδειο.
r = Ο Αλέξης είναι εκνευρισμένος.

(α) Χρησιμοποιήστε λογικούς συνδέσμους για να μεταγράψετε την εξής φράση σε ισχυρισμό της τυπικής λογικής:

Αν ο Αλέξης πεινάει και το ψυγείο είναι άδειο, τότε ο Αλέξης είναι εκνευρισμένος.

(β) Συμπληρώστε τον πίνακα αλήθειας για τον ισχυρισμό του (α).

(γ) Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός του (α) είναι αληθής, ότι ο Αλέξης δεν είναι εκνευρισμένος και ότι το ψυγείο είναι άδειο. Πεινάει ο Αλέξης ή όχι; Εξηγήστε την απάντησή σας αξιοποιώντας τον πίνακα αλήθειας.

15. Έστω A ο ισχυρισμός $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$, και B ο ισχυρισμός $q \leftrightarrow r$.

(α) Κατασκευάστε τους πίνακες αλήθειας για τους ισχυρισμούς A και B.

(β) Ας υποθέσουμε ότι τόσο ο ισχυρισμός A όσο και ο ισχυρισμός B αληθεύουν. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τον ισχυρισμό p; Εξηγήστε την απάντησή σας με βάση τον πίνακα αλήθειας.

16. Χρησιμοποιήστε πίνακες αλήθειας για να αποδείξετε τις εξής *επιμεριστικές ιδιότητες* για την προτασιακή λογική.

(α) Ο $p \wedge (q \vee r)$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(β) Ο $p \vee (q \wedge r)$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

17. Χρησιμοποιήστε πίνακες αλήθειας για να αποδείξετε τις εξής *προσεταιριστικές ιδιότητες* για την προτασιακή λογική.

(α) Ο $p \vee (q \vee r)$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $(p \vee q) \vee r$.

(β) Ο $p \wedge (q \wedge r)$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον $(p \wedge q) \wedge r$.