

# Πρόλογος

Πρόλογος	13
Πώς χρησιμοποιείται αυτό το βιβλίο	17
<b>1 Η λογική σκέψη</b>	19
1.1 Τυπική λογική	20
1.1.1 Διερευνητικά προβλήματα	21
1.1.2 Σύνδεσμοι και προτάσεις	21
1.1.3 Οι πίνακες αλήθειας	23
1.1.4 Λογικές ισοδυναμίες	26
Ασκήσεις 1.1	29
1.2 Προτασιακή λογική	35
1.2.1 Ταυτολογίες και αντιφάσεις	35
1.2.2 Παραγωγικοί κανόνες	38
1.2.3 Αποδεικτικές ακολουθίες	40
1.2.4 Αμφίπλευρη αναζήτηση αποδείξεων	41
Ασκήσεις 1.2	43
1.3 Κατηγορηματική Λογική	48
1.3.1 Κατηγορήματα	49
1.3.2 Ποσοδείκτες	50
1.3.3 Μετάφρασηκατηγορηματική λογική	51
1.3.4 Άρνηση ισχυρισμών	53
1.3.5 Δύο Συνήθεις Φραστικές Κατασκευές	55
Ασκήσεις 1.3	56
1.4 Η λογική στα μαθηματικά	63
1.4.1 Ο ρόλος των ορισμών στα μαθηματικά	63
1.4.2 Άλλα είδη μαθηματικών ισχυρισμών	66
1.4.3 Αντιπαραδείγματα	67
1.4.4 Αξιωματικά συστήματα	68
Ασκήσεις 1.4	72
1.5 Αποδεικτικές μέθοδοι	77
1.5.1 Άμεσες αποδείξεις	77
1.5.2 Αποδείξεις με αντιθετοαντιστροφή	80
1.5.3 Αποδείξεις με απαγωγή σε άτοπο	82
Ασκήσεις 1.5	84

<b>2</b>	<b>Οι σχεσιακοί συλλογισμοί</b>	89
2.1	Γραφήματα	90
2.1.1	Ακμές και κορυφές	91
2.1.2	Ορολογία	92
2.1.3	Αναπαράσταση συσχετίσεων μέσω γραφημάτων	94
	Ασκήσεις 2.1	100
2.2	Σύνολα	106
2.2.1	«Ανήκειν και περιέχεται»	107
2.2.2	Νέα σύνολα από προηγούμενα	109
2.2.3	Ταυτότητες	112
	Ασκήσεις 2.2	114
2.3	Συναρτήσεις	119
2.3.1	Ορισμοί και παραδείγματα	119
2.3.2	Ένα-προς-ένα και επί συναρτήσεις	123
2.3.3	Η κατασκευή νέων συναρτήσεων από παλαιότερες	127
	Ασκήσεις 2.3	129
2.4	Σχέσεις και ισοδυναμίες	134
2.4.1	Ορισμοί και παραδείγματα	135
2.4.2	Τα γραφήματα των σχέσεων	136
2.4.3	Σχέσεις έναντι συναρτήσεων	137
2.4.4	Σχέσεις ισοδυναμίας	138
2.4.5	Αριθμητική υπολοίπου	141
	Ασκήσεις 2.4	144
2.5	Μερικές διατάξεις	149
2.5.1	Ορισμοί και παραδείγματα	149
2.5.2	Διαγράμματα Hasse	150
2.5.3	Τοπολογική ταξινόμηση	152
2.5.4	Ισομορφισμοί	154
2.5.5	Άλγεβρες Boole	157
	Ασκήσεις 2.5	159
2.6	Θεωρία γραφημάτων	164
2.6.1	Γραφήματα: τυπικοί ορισμοί	165
2.6.2	Ισομορφισμοί γραφημάτων	166
2.6.3	Καταμέτρηση των βαθμών	168
2.6.4	Ίχνη και κυκλώματα Euler	169
2.6.5	Μονοπάτια και κύκλοι Hamilton	171
2.6.6	Δένδρα	173
	Ασκήσεις 2.6	177
<b>3</b>	<b>Οι αναδρομικοί συλλογισμοί</b>	183
3.1	Αναδρομικές σχέσεις	184
3.1.1	Ορισμοί και παραδείγματα	184

3.1.2 Η ακολουθία Fibonacci	186
3.1.3 Αναπαραστάσεις μέσω σχέσεων	188
Ασκήσεις 3.1	191
3.2 Λύσεις κλειστής μορφής και επαγωγή	196
3.2.1 Πώς μαντεύουμε μια λύση κλειστής μορφής	197
3.2.2 Πολυωνυμικές ακολουθίες: Χρήση των διαφορών $\nabla$	198
3.2.3 Επαγωγική επιβεβαίωση μιας λύσης	200
Ασκήσεις 3.2	205
3.3 Αναδρομικοί ορισμοί	208
3.3.1 Ορισμοί και παραδείγματα	209
3.3.2 Συγγραφή αναδρομικών ορισμών	213
3.3.3 Αναδρομική γεωμετρία	215
3.3.4 Αναδρομικά λογοπαίγνια	219
Ασκήσεις 3.3	219
3.4 Επαγωγικές αποδείξεις	225
3.4.1 Η αρχή της επαγωγής	226
3.4.2 Παραδείγματα	227
3.4.3 Ισχυρή επαγωγή	232
3.4.4 Δομική επαγωγή	236
Ασκήσεις 3.4	238
3.5 Αναδρομικές δομές δεδομένων	241
3.5.1 Αλυσίδες	242
3.5.2 Αποδοτικότητα	247
3.5.3 Μια επανεξέταση των δένδρων δυαδικής αναζήτησης	248
Ασκήσεις 3.5	250
<b>4 Ποσοτική σκέψη</b>	255
4.1 Βασικές τεχνικές αρίθμησης	256
4.1.1 Πρόσθεση	256
4.1.2 Πολλαπλασιασμός	258
4.1.3 Συνδυασμός πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού	262
Ασκήσεις 4.1	264
4.2 Επιλογές και διατάξεις	268
4.2.1 Μεταθέσεις: Η αρχή της διάταξης	269
4.2.2 Συνδυασμοί: Η αρχή της επιλογής	271
4.2.3 Το Διωνυμικό θεώρημα $\nabla$	275
Ασκήσεις 4.2	277
4.3 Αρίθμηση με συναρτήσεις	282
4.3.1 Ένα προς ένα αντιστοιχίες	283
4.3.2 Η αρχή του περιστερώνα	286
4.3.3 Η γενικευμένη αρχή του περιστερώνα	287
4.3.4 Θεώρημα Ramsey $\nabla$	289
Ασκήσεις 4.3	290

4.4 Διακριτή πιθανότητα	296
4.4.1 Ορισμοί και παραδείγματα	297
4.4.2 Εφαρμογές	299
4.4.3 Αναμενόμενη τιμή	302
Ασκήσεις 4.4	303
4.5 Αρίθμηση στοιχειωδών πράξεων σε αλγόριθμους	308
4.5.1 Αλγόριθμοι	309
4.5.2 Ψευδοκώδικας	309
4.5.3 Αλληλουχίες πράξεων	311
4.5.4 Βρόχοι	312
4.5.5 Πίνακες	315
4.5.6 Ταξινόμηση	317
Ασκήσεις 4.5	318
4.6 Εκτίμηση	324
4.6.1 Ρυθμός αύξησης των συναρτήσεων	325
4.6.2 Στόχοι εκτίμησης	330
4.6.3 Ιδιότητες του συμβολισμού $\Theta$	331
Ασκήσεις 4.6	332
<b>5 Αναλυτική σκέψη</b>	337
5.1 Αλγόριθμοι	338
5.1.1 Περισσότερος ψευδοκώδικας	338
5.1.2 Προσυνθήκες και μετασυνθήκες	340
5.1.3 Επαναληπτικοί αλγόριθμοι	342
5.1.4 Συναρτήσεις και αναδρομικοί αλγόριθμοι	343
Ασκήσεις 5.1	347
5.2 Τρεις κοινοί τύποι αλγόριθμων	352
5.2.1 Αλγόριθμοι διάνυσης	353
5.2.2 Άπληστοι αλγόριθμοι	356
5.2.3 Αλγόριθμοι διαίρει-και-βασίλευε	360
Ασκήσεις 5.2	363
5.3 Πολυπλοκότητα αλγορίθμων	368
5.3.1 Ο καλός, ο κακός και ο μέσος	369
5.3.2 Προσεγγιστικοί υπολογισμοί πολυπλοκότητας	374
Ασκήσεις 5.3	378
5.4 Φράγματα στην πολυπλοκότητα	384
5.4.1 Αλγόριθμοι ως αποφάσεις	385
5.4.2 Ένα κάτω φράγμα	388
5.4.3 Αναζήτηση σε πίνακα	389
5.4.4 Ταξινόμηση	390
5.4.5 P έναντι NP	391
Ασκήσεις 5.4	392

5.5	Επαλήθευση προγράμματος	397
5.5.1	Επαλήθευση έναντι δοκιμής	397
5.5.2	Επαλήθευση αναδρομικών αλγορίθμων	398
5.5.3	Αναζήτηση και ταξινόμηση	400
5.5.4	Πύργοι του Ανόι	403
	Ασκήσεις 5.5	405
5.6	Αναλλοίωτες συνθήκες βρόχων	410
5.6.1	Επαλήθευση επαναληπτικών αλγορίθμων	410
5.6.2	Αναζήτηση και ταξινόμηση	414
5.6.3	Χρήση αναλλοίωτων συνθηκών για σχεδίαση αλγορίθμων	417
	Ασκήσεις 5.6	419
<b>6</b>	<b>Μελέτη εφαρμογών</b>	<b>425</b>
6.1	Μοτίβα στο DNA	426
6.1.1	Μεταλλάξεις και φυλογενετική απόσταση	427
6.1.2	Φυλογενετικά δένδρα	428
6.1.3	UPGMA	430
	Ασκήσεις 6.1	434
6.2	Κοινωνικά δίκτυα	436
6.2.1	Ορισμοί και ορολογία	437
6.2.2	Έννοιες ισοδυναμίας	439
6.2.3	Ιεραρχική συσταδοποίηση	443
6.2.4	Προσημασμένα γραφήματα και ισορροπία	446
	Ασκήσεις 6.2	449
6.3	Η δομή των γλωσσών	452
6.3.1	Ορολογία	453
6.3.2	Μηχανές Πεπερασμένων Καταστάσεων	454
6.3.3	Αναδρομή	458
6.3.4	Άλλα προβλήματα στη γλωσσολογία	461
	Ασκήσεις 6.3	463
6.4	Μοντέλα πληθυσμών διακριτού χρόνου	465
6.4.1	Αναδρομικά μοντέλα για την αύξηση πληθυσμού	466
6.4.2	Σταθερά σημεία, ισορροπία και χάος	468
6.4.3	Συστήματα θηρευτή-θηράματος	470
6.4.4	Το μοντέλο SIR	473
	Ασκήσεις 6.4	475
6.5	Δωδεκαφθογγισμός	478
6.5.1	Σύνθεση δωδεκαφθογγισμού	479
6.5.2	Εμφάνιση Όλων των Μεταθέσεων	479
6.5.3	Μετασχηματισμοί Τονικών Σειρών	481
6.5.4	Κλάσεις ισοδυναμίας και συμμετρία	482
	Ασκήσεις 6.5	485

<b>Υποδείξεις, απαντήσεις, και λύσεις σε επιλεγμένες ασκήσεις</b>	489
1.1 Τυπική λογική	489
1.2 Προτασιακή λογική	492
1.3 Κατηγορική λογική	494
1.4 Η λογική στα μαθηματικά	495
1.5 Αποδεικτικές μέθοδοι	496
2.1 Γραφήματα	499
2.2 Σύνολα	500
2.3 Συναρτήσεις	502
2.4 Σχέσεις και ισοδυναμίες	504
2.5 Μερικές διατάξεις	506
2.6 Θεωρία γραφημάτων	509
3.1 Αναδρομικές σχέσεις	510
3.2 Λύσεις κλειστής μορφής και επαγωγή	511
3.3 Αναδρομικοί ορισμοί	514
3.4 Επαγωγικές αποδείξεις	515
3.5 Αναδρομικές δομές δεδομένων	517
4.1 Βασικές τεχνικές αρίθμησης	519
4.2 Επιλογές και διατάξεις	520
4.3 Αρίθμηση με συναρτήσεις	521
4.4 Διακριτή πιθανότητα	522
4.5 Αρίθμηση στοιχειωδών πράξεων σε αλγόριθμους	523
4.6 Εκτίμηση	525
5.1 Αλγόριθμοι	526
5.2 Τρεις κοινοί τύποι αλγορίθμων	528
5.3 Πολυπλοκότητα αλγορίθμων	530
5.4 Φράγματα στην πολυπλοκότητα	531
5.5 Επαλήθευση προγράμματος	532
5.6 Αναλλοίωτες συνθήκες βρόχων	533
<b>Βιβλιογραφία</b>	537