1

Συναρτήσεις

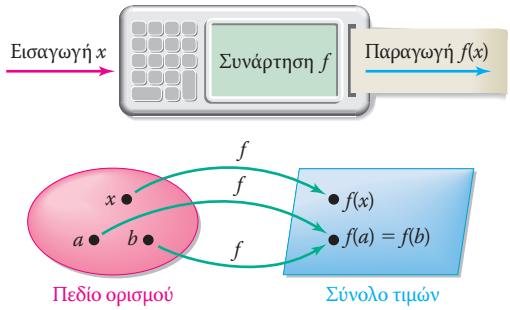
Προεπισκόπηση κεφαλαίου Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα με συγκεκριμένο λεξιλόγιο και πολλούς κανόνες. Πριν ξεκινήσετε το ταξίδι σας στον Απειροστικό Λογισμό, θα πρέπει να έχετε εξοικειωθεί με τα στοιχεία αυτής της γλώσσας. Μεταξύ αυτών των στοιχείων είναι οι δεξιότητες στην άλγεβρα, ο συμβολισμός και η ορολογία στα διάφορα σύνολα των πραγματικών αριθμών και οι περιγραφές των καμπυλών, των κύκλων και άλλων βασικών συνόλων στο επίπεδο συντεταγμένων. Στο Παράρτημα Α γίνεται επισκόπηση αυτού του υλικού. Το Κεφάλαιο 1 αρχίζει με τη θεμελιώδη έννοια της συνάρτησης και στη συνέχεια παρουσιάζει μερικές από τις συναρτήσεις που είναι απαραίτητες στον Απειροστικό Λογισμό: πολυώνυμα, ρητές συναρτήσεις, αλγεβρικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις. (Οι λογαριθμικές, εκθετικές και αντίστροφες συναρτήσεις εισάγονται στο Κεφάλαιο 7.) Πριν ξεκινήσετε τη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού, είναι σημαντικό να κατέχετε τις έννοιες αυτού του κεφαλαίου.

1.1 Ανασκόπηση των συναρτήσεων

Παντού γύρω μας βλέπουμε τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων ή **μεταβλητών**. Για παράδειγμα, ο δείκτης τιμών καταναλωτή αλλάζει με τον χρόνο και η θερμοκρασία του ωκεανού ποικίλλει ανάλογα με το γεωγραφικό πλάτος. Οι σχέσεις αυτές μπορούν συχνά να εκφράζονται με μαθηματικές έννοιες που ονομάζονται *συναρτήσεις*. Ο Απειροστικός Λογισμός είναι η μελέτη των συναρτήσεων, και επειδή χρησιμοποιούμε συναρτήσεις για να περιγράψουμε τον κόσμο γύρω μας, ο Απειροστικός Λογισμός είναι μια παγκόσμια γλώσσα για την ανθρώπινη έρευνα.

ΟΡΙΣΜΟΣ Συνάρτηση

Συνάρτηση f είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε τιμή x ενός συνόλου D μια *μοναδική* τιμή που συμβολίζεται $f(x)$. Το σύνολο D είναι το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης. Το **σύνολο τιμών** είναι το σύνολο όλων των τιμών $f(x)$ που παράγονται όταν το x μεταβάλλεται σε όλο το πεδίο ορισμού (Σχήμα 1.1).



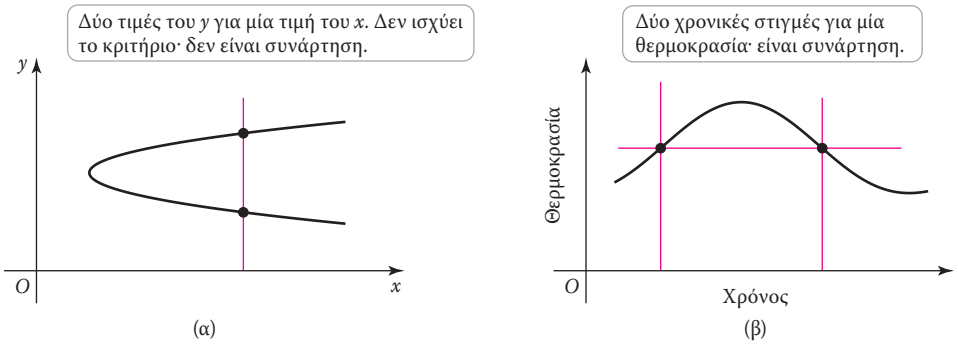
Σχήμα 1.1

➤ Εάν το πεδίο ορισμού δεν έχει καθοριστεί, θεωρούμε ότι είναι το σύνολο όλων των τιμών του x για τις οποίες ορίζεται η f. Θα δούμε σύντομα ότι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης μπορούν να περιορίζονται από το περιεχόμενο του προβλήματος.

Η **ανεξάρτητη μεταβλητή** είναι η μεταβλητή που σχετίζεται με το πεδίο ορισμού. Η **εξαρτημένη μεταβλητή** ανήκει στο σύνολο τιμών. Η **γραφική παράσταση (γράφημα)** μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των σημείων (x, y) στο επίπεδο xy που ικανοποιεί την εξίσωση $y = f(x)$. Το **όρισμα** μιας συνάρτησης είναι η έκφραση στην οποία η συνάρτηση είναι λειτουργική. Για παράδειγμα, το x είναι το όρισμα όταν γράφουμε $f(x)$. Ομοίως, το 2 είναι το όρισμα στην $f(2)$ και το $x^2 + 4$ είναι το όρισμα στην $f(x^2 + 4)$.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Εάν $f(x) = x^2 - 2x$, βρείτε τα $f(-1)$, $f(x^2)$, $f(t)$, και $f(p - 1)$. ◀

Η απαίτηση ότι μια συνάρτηση αντιστοιχίζει μια *μοναδική* τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής σε κάθε τιμή του πεδίου ορισμού εκφράζεται με το Κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας (Σχήμα 1.2α). Για παράδειγμα, η εξωτερική θερμοκρασία καθώς ποικίλλει στη διάρκεια μιας ημέρας είναι μια συνάρτηση του χρόνου (Σχήμα 1.2β).



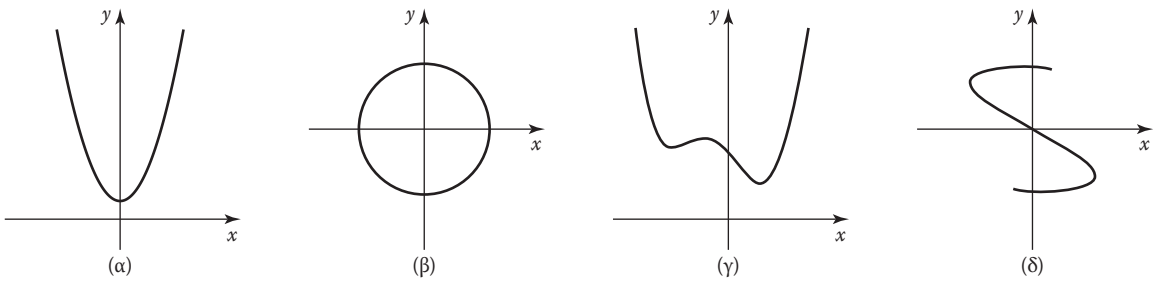
Σχήμα 1.2

Κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας

Μια γραφική παράσταση παριστάνει μια συνάρτηση αν και μόνο αν ικανοποιεί το **Κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας**: κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση το πολύ σε ένα σημείο. Εάν δεν ικανοποιείται αυτή η απαίτηση, δεν μπορούμε να μιλάμε για συναρτήσεις.

➤ Γενικότερα, ένα σύνολο σημείων μιας γραφικής παράστασης που *δεν* αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση παριστάνει μια **σχέση** μεταξύ των μεταβλητών. Όλες οι συναρτήσεις είναι σχέσεις, αλλά όλες οι σχέσεις δεν είναι συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Αναγνώριση συναρτήσεων** Περιγράψτε εάν κάθε γραφική παράσταση στο Σχήμα 1.3 παριστάνει μια συνάρτηση.



Σχήμα 1.3

ΛΥΣΗ Το Κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας δείχνει ότι μόνο τα γραφήματα (α) και (γ) παριστάνουν συναρτήσεις. Στα γραφήματα (β) και (δ) υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν τη γραφική παράσταση περισσότερες από μία φορές. Δηλαδή, υπάρχουν τιμές του x που αντιστοιχούν σε περισσότερες από μία τιμές του y. Συνεπώς, τα γραφήματα (β) και (δ) δεν ικανοποιούν το Κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας, και άρα δεν παριστάνουν συναρτήσεις.

Σχετικές ασκήσεις 11–12 ◀

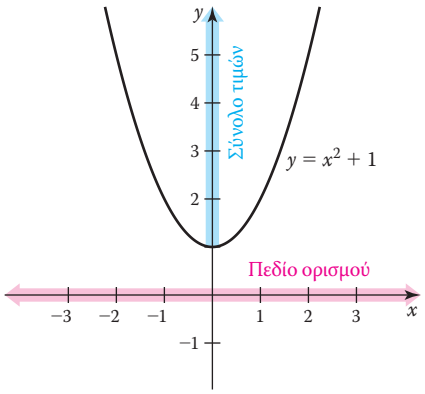
➤ Παράθυρο του $[a, b] \times [c, d]$ σημαίνει $a \le x \le b$ και $c \le y \le d$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών** Σχεδιάστε κάθε συνάρτηση με κάποια εφαρμογή γραφικών (graphing utility) στο δεδομένο πλαίσιο. Στη συνέχεια ορίστε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

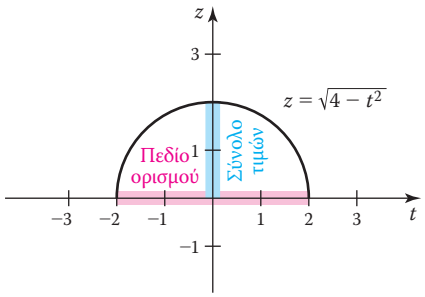
α. $y = f(x) = x^2 + 1$· $[-3, 3] \times [-1, 5]$

β. $z = g(t) = \sqrt{4 - t^2}$· $[-3, 3] \times [-1, 3]$

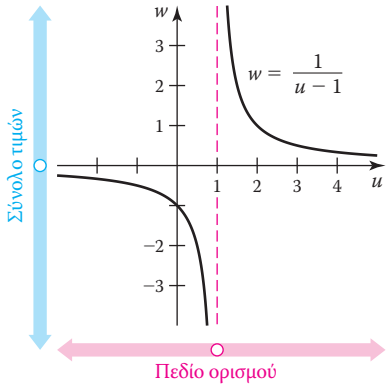
γ. $w = h(u) = \dfrac{1}{u - 1}$· $[-3, 5] \times [-4, 4]$



Σχήμα 1.4



Σχήμα 1.5



Σχήμα 1.6

ΛΥΣΗ

α. Το Σχήμα 1.4 δίνει το γράφημα της $f(x) = x^2 + 1$. Επειδή η f ορίζεται για όλες τις τιμές του x, το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, και συμβολίζεται $(-\infty, \infty)$ ή $\mathbb{R}$. Επειδή $x^2 \geq 0$ για κάθε x, έπεται ότι $x^2 + 1 \geq 1$ και το σύνολο τιμών της f είναι το $[1, \infty)$.

β. Όταν ο n είναι άρτιος, συναρτήσεις που περιέχουν n-οστές ρίζες ορίζονται υπό την προϋπόθεση ότι η ποσότητα κάτω από τη ρίζα είναι μη αρνητική (μπορεί επίσης να υπάρχουν και επιπλέον περιορισμοί). Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση g ορίζεται υπό την προϋπόθεση $4 - t^2 \geq 0$, που σημαίνει $t^2 \leq 4$, ή $-2 \leq t \leq 2$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της g είναι το $[-2, 2]$. Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, το σύνολο τιμών αποτελείται από μη αρνητικούς αριθμούς. Όταν $t = 0$, το z παίρνει τη μέγιστη τιμή του $g(0) = \sqrt{4} = 2$, και όταν $t = \pm 2$, το z παίρνει την ελάχιστη τιμή του $g(\pm 2) = 0$. Συνεπώς, το σύνολο τιμών είναι το $[0, 2]$ (Σχήμα 1.5).

γ. Η συνάρτηση h δεν ορίζεται στο $u = 1$. Οπότε, το πεδίο ορισμού της είναι $\{u: u \neq 1\}$, και το γράφημά της δεν έχει σημείο που αντιστοιχεί στο $u = 1$. Παρατηρούμε ότι το w παίρνει όλες τις τιμές εκτός από το 0. Ως εκ τούτου, το σύνολο τιμών είναι $\{w: w \neq 0\}$. Μια εφαρμογή γραφικών *δεν* παριστάνει αυτήν τη συνάρτηση με ακρίβεια εάν δείχνει την κατακόρυφη ευθεία $u = 1$ ως μέρος του γραφήματος (Σχήμα 1.6).

Σχετικές ασκήσεις 13–20 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 **Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών υπό συνθήκη** Τη χρονική στιγμή $t = 0$, μια πέτρα ρίχνεται κατακόρυφα από το έδαφος προς τα πάνω με ταχύτητα 30 m/s. Το ύψος της πάνω από το έδαφος σε μέτρα (αγνοώντας την αντίσταση του αέρα) προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $h = f(t) = 30t - 5t^2$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα. Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f στις συνθήκες του συγκεκριμένου προβλήματος.

ΛΥΣΗ Αν και η f ορίζεται για όλες τις τιμές του t, οι μόνοι συναφείς χρόνοι είναι μεταξύ της χρονικής στιγμής που η πέτρα ρίχνεται ($t = 0$) και της χρονικής στιγμής που βρίσκει το έδαφος, όταν $h = f(t) = 0$. Λύνοντας την εξίσωση $h = 30t - 5t^2 = 0$, βρίσκουμε ότι

$$30t - 5t^2 = 0$$

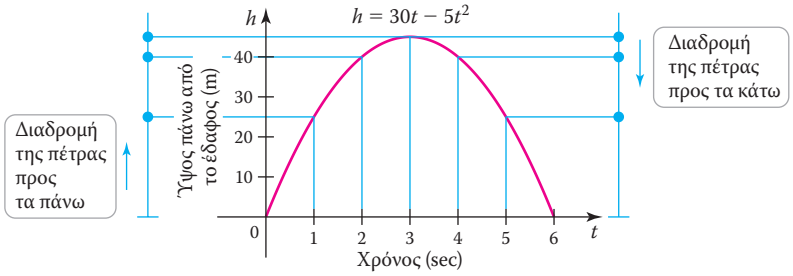
$$5t(6 - t) = 0 \qquad \text{Παραγοντοποίηση}$$

$$5t = 0 \quad \text{ή} \quad 6 - t = 0 \qquad \text{Εξίσωση κάθε παράγοντα με το 0}$$

$$t = 0 \quad \text{ή} \quad t = 6. \qquad \text{Λύση}$$

Συνεπώς, η πέτρα αφήνει το έδαφος όταν $t = 0$ και επιστρέφει στο έδαφος όταν $t = 6$. Ένα κατάλληλο πεδίο ορισμού που ταιριάζει με το πλαίσιο αυτού του προβλήματος είναι $\{t: 0 \leq t \leq 6\}$. Το σύνολο τιμών αποτελείται από όλες τις τιμές του $h = 30t - 5t^2$ όταν το t κινείται στο $[0, 6]$. Η μεγαλύτερη τιμή του h προκύπτει όταν η πέτρα φτάνει στο ψηλότερο σημείο της, όταν $t = 3$ (στα μισά της διαδρομής που διανύει), το οποίο είναι $h = f(3) = 45$. Συνεπώς, το σύνολο τιμών είναι $[0, 45]$. Οι παρατηρήσεις αυτές επιβεβαιώνονται από το γράφημα της συνάρτησης του ύψους (Σχήμα 1.7). Σημειώστε ότι αυτό το γράφημα *δεν* είναι η τροχιά της πέτρας, η οποία κινείται κατακόρυφα.

➤ Η διακεκομμένη κατακόρυφη γραμμή $u = 1$ στο Σχήμα 1.6 δείχνει ότι το γράφημα του $w = h(u)$ πλησιάζει μια *κατακόρυφη ασύμπτωτη*, καθώς το u πλησιάζει το 1 και το w γίνεται μεγάλο σε μέγεθος για τιμές του u κοντά στο 1.



Σχήμα 1.7

Σχετικές ασκήσεις 21–24 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Δώστε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$. ◄

Σύνθετες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις μπορούν να συνδυαστούν με αθροίσματα $(f + g)$, διαφορές $(f - g)$, γινόμενα (fg) ή πηλίκα (f/g). Η διαδικασία, που ονομάζεται *σύνθεση*, παράγει επίσης νέες συναρτήσεις.

➤ Στη σύνθεση $y = f(g(x))$, η f είναι η *εξωτερική* συνάρτηση και η g είναι η *εσωτερική* συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ Σύνθετες συναρτήσεις

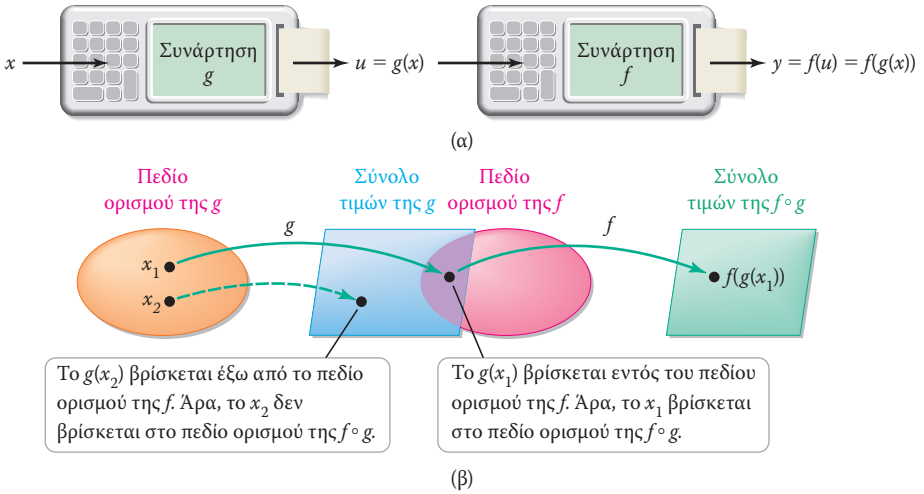
Δεδομένων δύο συναρτήσεων f και g, η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται με $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Υπολογίζεται σε δύο στάδια: $y = f(u)$, όπου $u = g(x)$. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από όλα τα x του πεδίου ορισμού της g για τα οποία τα $u = g(x)$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f (Σχήμα 1.8).

➤ Έχετε συναντήσει τρεις διαφορετικούς συμβολισμούς για τα διαστήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών, οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν σε όλο το βιβλίο:

- $[-2, 3)$, παράδειγμα με σημειογραφία διαστήματος,
- $-2 \le x < 3$, παράδειγμα με σημειογραφία ανισότητας,

και

- $\{x: -2 \le x < 3\}$, παράδειγμα με σημειογραφία συνόλου.



Σχήμα 1.8

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Σύνθετες συναρτήσεις και συμβολισμός Έστω οι $f(x) = 3x^2 - x$ και $g(x) = 1/x$. Απλοποιήστε τις ακόλουθες εκφράσεις.

α. $f(5p + 1)$ **β.** $g(1/x)$ **γ.** $f(g(x))$ **δ.** $g(f(x))$

ΛΥΣΗ Σε κάθε περίπτωση οι συναρτήσεις ενεργούν στο όρισμά τους.

α. Το όρισμα της f είναι $5p + 1$, και άρα

$$f(5p + 1) = 3(5p + 1)^2 - (5p + 1) = 75p^2 + 25p + 2.$$

β. Επειδή η g απαιτεί να πάρουμε το αντίστροφο του ορίσματος, παίρνουμε το αντίστροφο του $1/x$ και βρίσκουμε ότι $g(1/x) = 1/(1/x) = x$.

γ. Το όρισμα της f είναι $g(x)$, και άρα

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3 - x}{x^2}.$$

➤ Τα Παραδείγματα 4γ και 4δ αποδεικνύουν ότι, γενικώς,

$$f(g(x)) \neq g(f(x)).$$

δ. Το όρισμα της g είναι $f(x)$, και άρα

$$g(f(x)) = g(3x^2 - x) = \frac{1}{3x^2 - x}.$$

Σχετικές ασκήσεις 25–36 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Δουλεύοντας με σύνθετες συναρτήσεις Εντοπίστε πιθανές επιλογές για τις εσωτερικές και τις εξωτερικές συναρτήσεις στις ακόλουθες σύνθετες συναρτήσεις. Δώστε το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης.

α. $h(x) = \sqrt{9x - x^2}$ **β.** $h(x) = \dfrac{2}{(x^2 - 1)^3}$

ΛΥΣΗ

➤ Τεχνικές επίλυσης ανισοτήτων αναφέρονται στο Παράρτημα Α.

α. Μια προφανής εξωτερική συνάρτηση είναι η $f(x) = \sqrt{x}$, η οποία ενεργεί στην εσωτερική συνάρτηση $g(x) = 9x - x^2$. Ως εκ τούτου, η h μπορεί να εκφραστεί ως $h = f \circ g$ ή $h(x) = f(g(x))$. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από όλες τις τιμές του x έτσι ώστε $9x - x^2 \ge 0$. Η επίλυση αυτής της ανισότητας δίνει το $\{x: 0 \le x \le 9\}$ ως πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

β. Μια καλή επιλογή για εξωτερική συνάρτηση είναι η $f(x) = 2/x^3 = 2x^{-3}$, η οποία ενεργεί στην εσωτερική συνάρτηση $g(x) = x^2 - 1$. Συνεπώς, η h μπορεί να εκφραστεί ως $h = f \circ g$ ή $h(x) = f(g(x))$. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από όλες τις τιμές των $g(x)$ για τις οποίες $g(x) \neq 0$, δηλαδή $\{x: x \neq \pm 1\}$.

Σχετικές ασκήσεις 37–40 ◀

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 **Πιο σύνθετες συναρτήσεις** Αν $f(x) = \sqrt[3]{x}$ και $g(x) = x^2 - x - 6$, βρείτε τις (α) $g \circ f$ και (β) $g \circ g$, και τα πεδία ορισμού τους.

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = (\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{f(x)})^2 - \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{f(x)} - 6 = x^{2/3} - x^{1/3} - 6.$$

Επειδή τα πεδία ορισμού των f και g είναι $(-\infty, \infty)$, το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι επίσης $(-\infty, \infty)$.

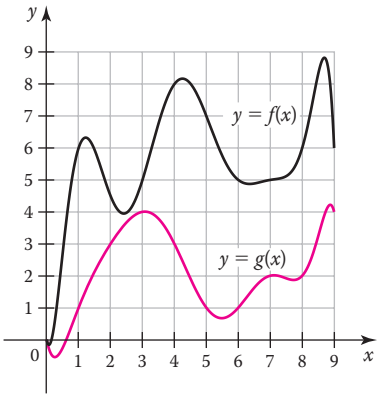
β. Εδώ έχουμε τη σύνθεση δύο πολυωνύμων:

$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x^2 - x - 6) \\ &= (\underbrace{x^2 - x - 6}_{g(x)})^2 - (\underbrace{x^2 - x - 6}_{g(x)}) - 6 \\ &= x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 13x + 36.\end{aligned}$$

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης των δύο πολυωνύμων είναι $(-\infty, \infty)$.

Σχετικές ασκήσεις 41–54 ◀

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Αν $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x^2$, βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$. ◀



Σχήμα 1.9

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 **Χρήση γραφημάτων για την εύρεση σύνθετων συναρτήσεων** Μέσω των γραφημάτων των f και g στο Σχήμα 1.9 βρείτε τις ακόλουθες τιμές.

α. $f(g(3))$ **β.** $g(f(3))$ **γ.** $f(f(4))$ **δ.** $f(g(f(8)))$

ΛΥΣΗ

α. Τα γραφήματα δείχνουν ότι $g(3) = 4$ και $f(4) = 8$. Άρα, $f(g(3)) = f(4) = 8$.

β. Παρατηρούμε ότι $g(f(3)) = g(5) = 1$. Σημειώστε ότι $f(g(3)) \neq g(f(3))$.

γ. Εδώ έχουμε $f(\underbrace{f(4)}_{8}) = f(8) = 6$.

δ. Αρχίζοντας από μέσα,

$$f(g(\underbrace{f(8)}_{6})) = f(\underbrace{g(6)}_{1}) = f(1) = 6.$$

Σχετικές ασκήσεις 55–56 ◀

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 **Χρήση πίνακα για την εύρεση σύνθετων συναρτήσεων** Βρείτε τις τιμές της συνάρτησης στον πίνακα, για να υπολογίσετε τις ακόλουθες σύνθετες συναρτήσεις.

α. $(f \circ g)(0)$ **β.** $g(f(-1))$ **γ.** $f(g(g(-1)))$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	3	4	2
$g(x)$	-1	0	-2	-3	-4

ΛΥΣΗ

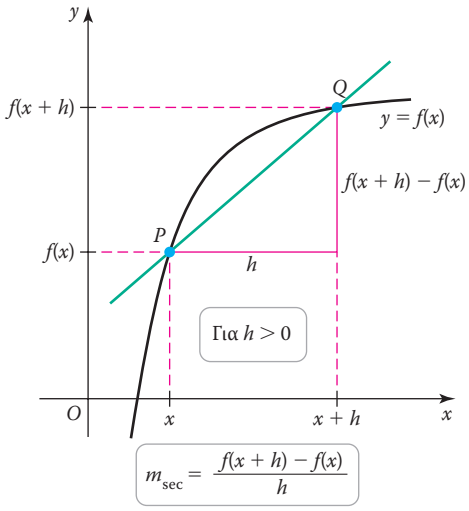
α. Μέσω του πίνακα βλέπουμε ότι $g(0) = -2$ και $f(-2) = 0$. Άρα, $(f \circ g)(0) = 0$.

β. Επειδή $f(-1) = 1$ και $g(1) = -3$, έπεται ότι $g(f(-1)) = -3$.

γ. Αρχίζοντας από την εσωτερική συνάρτηση,

$$f(g(\underbrace{g(-1)}_{0})) = f(\underbrace{g(0)}_{-2}) = f(-2) = 0.$$

Σχετικές ασκήσεις 55–56 ◄



Σχήμα 1.10

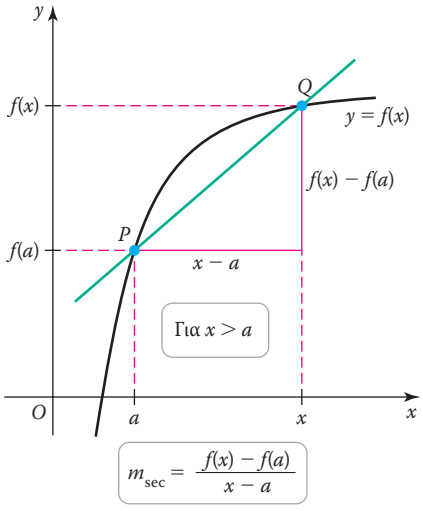
Τέμνουσες ευθείες και πηλίκο διαφορών

Όπως θα δείτε σύντομα, οι κλίσεις των ευθειών και των καμπυλών διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο στον Απειροστικό Λογισμό. Το Σχήμα 1.10 δείχνει δύο σημεία $P(x, f(x))$ και $Q(x + h, f(x + h))$ στη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ όταν $h > 0$. Μια ευθεία που διέρχεται από δύο οποιαδήποτε σημεία μιας καμπύλης ονομάζεται **τέμνουσα ευθεία**. Η σημασία της στη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού εξηγείται στα Κεφάλαια 2 και 3. Προς το παρόν, έχουμε επικεντρωθεί στην κλίση της τέμνουσας ευθείας που διέρχεται από τα P και Q, η οποία συμβολίζεται με m_{sec} και δίνεται από τον τύπο

$$m_{sec} = \frac{\text{αλλαγή σε } y}{\text{αλλαγή σε } x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ο τύπος της κλίσης $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ είναι επίσης γνωστός ως **πηλίκο διαφορών** και μπορεί να εκφραστεί με διάφορες μορφές ανάλογα με τον τρόπο που δίνονται οι συντεταγμένες των P και Q. Για παράδειγμα, για τις συντεταγμένες $P(a, f(a))$ και $Q(x, f(x))$ (Σχήμα 1.11), το πηλίκο διαφορών είναι

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



Σχήμα 1.11

Ερμηνεύουμε την κλίση της τέμνουσας ευθείας σε αυτήν τη μορφή ως τον **μέσο ρυθμό μεταβολής** της f στο διάστημα $[a, x]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 **Δουλεύοντας με πηλίκα διαφορών**

α. Απλοποιήστε το πηλίκο διαφορών $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, για $f(x) = 3x^2 - x$.

β. Απλοποιήστε το πηλίκο διαφορών $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, για $f(x) = x^3$.

ΛΥΣΗ

α. Αρχικά βλέπουμε ότι $f(x + h) = 3(x + h)^2 - (x + h)$. Αντικαθιστούμε αυτήν την έκφραση στο πηλίκο διαφορών και απλοποιούμε:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\overbrace{3(x+h)^2 - (x+h)}^{f(x+h)} - \overbrace{(3x^2 - x)}^{f(x)}}{h} \\
&= \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - (x+h) - (3x^2 - x)}{h} && \text{Ανάπτυγμα του } (x+h)^2 \\
&= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - x - h - 3x^2 + x}{h} && \text{Πράξεις} \\
&= \frac{6xh + 3h^2 - h}{h} && \text{Αναγωγές} \\
&= \frac{h(6x + 3h - 1)}{h} = 6x + 3h - 1. && \text{Παραγοντοποίηση και απλοποίηση}
\end{aligned}$$

➤ Αντιμετωπίστε το $f(x + h)$ ως τη σύνθεση $f(g(x))$, όπου το $x + h$ παίζει τον ρόλο του $g(x)$. Αυτό μπορεί να σας βοηθήσει να δημιουργήσετε ένα πρότυπο στο μυαλό σας πριν από την εύρεση του $f(x + h)$. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του Παραδείγματος 9α, έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 - x \\
f(12) &= 3 \cdot 12^2 - 12 \\
f(b) &= 3b^2 - b \\
f(\text{math}) &= 3 \cdot \text{math}^2 - \text{math}.
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$f(x + h) = 3(x + h)^2 - (x + h).$$

➤ Μερικοί χρήσιμοι τύποι παραγοντοποίησης:

1. Διαφορά τετραγώνων:
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$
2. Το άθροισμα τετραγώνων: $x^2 + y^2$ δεν παραγοντοποιείται στους πραγματικούς αριθμούς.
3. Διαφορά κύβων:
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$
4. Άθροισμα κύβων:
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

β. Χρειάζεται ο τύπος της παραγοντοποίησης διαφοράς κύβων:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{x^3 - a^3}{x - a}\\ &= \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} && \text{Παραγοντοποίηση}\\ &= x^2 + ax + a^2. && \text{Απλοποίηση}\end{aligned}$$

Σχετικές ασκήσεις 57–66 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 **Ερμηνεία της κλίσης της τέμνουσας ευθείας** Η ένταση ήχου I, μετρημένη σε βατ ανά τετραγωνικό μέτρο ($\mathrm{W/m^2}$), σε ένα σημείο r μέτρα από μια πηγή ήχου με ακουστική ισχύ P δίνεται από $I(r) = \dfrac{P}{4\pi r^2}$.

α. Βρείτε την ένταση του ήχου σε δύο σημεία $r_1 = 10$ m και $r_2 = 15$ m από μια πηγή ήχου με ισχύ $P = 100$ W. Στη συνέχεια, βρείτε την κλίση της τέμνουσας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(10, I(10))$ και $(15, I(15))$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης έντασης και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

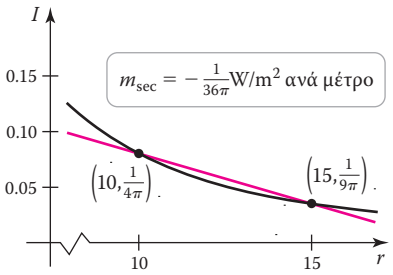
β. Βρείτε την κλίση της τέμνουσας ευθείας που διέρχεται από δύο οποιαδήποτε σημεία $(r_1, I(r_1))$ και $(r_2, I(r_2))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης έντασης με ακουστική ισχύ P.

ΛΥΣΗ

α. Ο ήχος έντασης 10 m από την πηγή είναι $I(10) = \dfrac{100\text{ W}}{4\pi(10\text{ m})^2} = \dfrac{1}{4\pi}\text{ W/m}^2$.

Σε 15 m η ένταση είναι $I(15) = \dfrac{100\text{ W}}{4\pi(15\text{ m})^2} = \dfrac{1}{9\pi}\text{ W/m}^2$. Για να βρούμε την κλίση της τέμνουσας ευθείας (Σχήμα 1.12), υπολογίζουμε τη μεταβολή της έντασης διαιρώντας με τη μεταβολή της απόστασης:

$$m_{\text{sec}} = \frac{I(15) - I(10)}{15 - 10} = \frac{\dfrac{1}{9\pi} - \dfrac{1}{4\pi}}{5} = -\frac{1}{36\pi} \approx -0.0088\text{ W/m}^2 \text{ ανά μέτρο.}$$



Σχήμα 1.12

Οι μονάδες παρέχουν μια ένδειξη για τη φυσική έννοια της κλίσης: μετρούν τον μέσο ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η ένταση όταν κάποιος μετακινείται από 10 m σε 15 m μακριά από την πηγή του ήχου. Στην περίπτωση αυτή, επειδή η κλίση της τέμνουσας ευθείας είναι αρνητική, η ένταση *μειώνεται* (αργά) με μέσο ρυθμό $1/(36\pi)\text{ W/m}^2$ ανά μέτρο.

β.

$$\begin{aligned}m_{\text{sec}} = \frac{I(r_2) - I(r_1)}{r_2 - r_1} &= \frac{\dfrac{P}{4\pi r_2^2} - \dfrac{P}{4\pi r_1^2}}{r_2 - r_1} && \text{Υπολογισμός των } I(r_2) \text{ και } I(r_1)\\ &= \frac{\dfrac{P}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r_2^2} - \dfrac{1}{r_1^2}\right)}{r_2 - r_1} && \text{Παραγοντοποίηση}\\ &= \frac{P}{4\pi}\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 r_2^2}\right)\frac{1}{r_2 - r_1} && \text{Απλοποίηση}\\ &= \frac{P}{4\pi}\cdot\frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1^2 r_2^2}\cdot\frac{1}{-(r_1 - r_2)} && \text{Παραγοντοποίηση}\\ &= -\frac{P(r_1 + r_2)}{4\pi r_1^2 r_2^2} && \text{Απλοποίηση}\end{aligned}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι ο μέσος ρυθμός με τον οποίο η ένταση του ήχου μεταβάλλεται σε ένα διάστημα $[r_1, r_2]$. Επειδή $r_1 > 0$ και $r_2 > 0$, βλέπουμε ότι η m_{sec} είναι πάντα αρνητική. Ως εκ τούτου, η ένταση του ήχου $I(r)$ μειώνεται καθώς η r αυξάνεται, για $r > 0$.

Σχετικές ασκήσεις 67–70 ◄

Συμμετρία

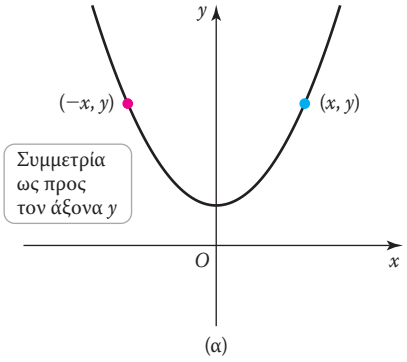
Η λέξη *συμμετρία* έχει πολλές σημασίες στα μαθηματικά. Εδώ θεωρούμε συμμετρίες των γραφικών παραστάσεων και τις σχέσεις που αυτές συμβολίζουν. Το πλεονέκτημα της συμμετρίας συχνά εξοικονομεί χρόνο και καθοδηγεί τη σκέψη μας.

ΟΡΙΣΜΟΣ Συμμετρία στις γραφικές παραστάσεις

Ένα γράφημα είναι **συμμετρικό ως προς τον άξονα *y*** εάν, για κάθε σημείο (x, y) του γραφήματος, το σημείο $(-x, y)$ ανήκει επίσης στο γράφημα. Αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι το γράφημα παραμένει αμετάβλητο όταν ανακλάται καθέτως στον άξονα y (Σχήμα 1.13α).

Ένα γράφημα είναι **συμμετρικό ως προς τον άξονα *x*** εάν, για κάθε σημείο (x, y) του γραφήματος, το σημείο $(x, -y)$ ανήκει επίσης στο γράφημα. Αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι το γράφημα παραμένει αμετάβλητο όταν ανακλάται καθέτως στον άξονα x (Σχήμα 1.13β).

Ένα γράφημα **είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων** εάν, για κάθε σημείο (x, y) του γραφήματος, το σημείο $(-x, -y)$ ανήκει επίσης στο γράφημα. Η συμμετρία ως προς τον άξονα x και ως προς τον άξονα y συνεπάγεται συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων, αλλά όχι το αντίστροφο. (Σχήμα 1.13γ).



Σχήμα 1.13

ΟΡΙΣΜΟΣ Συμμετρία στις συναρτήσεις

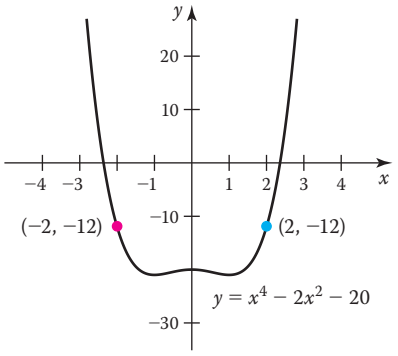
Μια **άρτια συνάρτηση** f έχει την ιδιότητα $f(-x) = f(x)$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y.

Μια **περιττή συνάρτηση** f έχει την ιδιότητα $f(-x) = -f(x)$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της. Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Πολυώνυμα που περιέχουν μόνο άρτιες δυνάμεις της μεταβλητής (της μορφής x^{2n}, όπου n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος) είναι άρτιες συναρτήσεις. Πολυώνυμα που περιέχουν μόνο περιττές δυνάμεις της μεταβλητής (της μορφής x^{2n+1}, όπου n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος) είναι περιττές συναρτήσεις.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4 Εξηγήστε γιατί η γραφική παράσταση μιας μη μηδενικής συνάρτησης δεν είναι ποτέ συμμετρική ως προς τον άξονα x. ◄

Άρτια συνάρτηση: εάν το (x, y) ανήκει στο γράφημα, τότε το $(-x, y)$ ανήκει στο γράφημα.



Σχήμα 1.14

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11 Προσδιορισμός συμμετρίας στις συναρτήσεις Προσδιορίστε τη συμμετρία, αν υπάρχει, στις ακόλουθες συναρτήσεις.

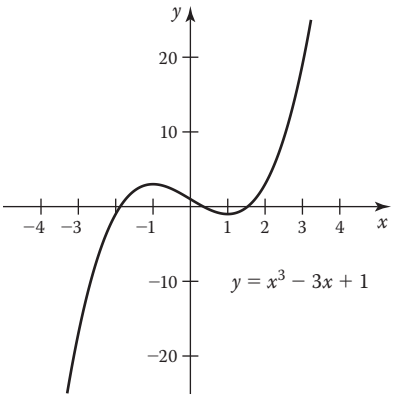
α. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 20$ **β.** $g(x) = x^3 - 3x + 1$ **γ.** $h(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$

ΛΥΣΗ

α. Η συνάρτηση f αποτελείται μόνο από άρτιες δυνάμεις του x ($20 = 20 \cdot 1 = 20x^0$ και το x^0 θεωρείται άρτια δύναμη). Συνεπώς, η f είναι μια άρτια συνάρτηση (Σχήμα 1.14). Το γεγονός αυτό επαληθεύεται δείχνοντας ότι $f(-x) = f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 20 = x^4 - 2x^2 - 20 = f(x).$$

Δεν υπάρχει συμμετρία: η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.



Σχήμα 1.15

➤ Η συμμετρία της σύνθεσης άρτιων και περιττών συναρτήσεων εξετάζεται στις Ασκήσεις 95-101.

β. Η συνάρτηση g αποτελείται από δύο περιττές δυνάμεις και μία άρτια (και εδώ το $1 = x^0$ θεωρείται άρτια δύναμη). Συνεπώς, αναμένουμε ότι η g δεν έχει καμία συμμετρία για τον άξονα y ή την αρχή των αξόνων (Σχήμα 1.15). Σημειώστε ότι

$$g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 1 = -x^3 + 3x + 1.$$

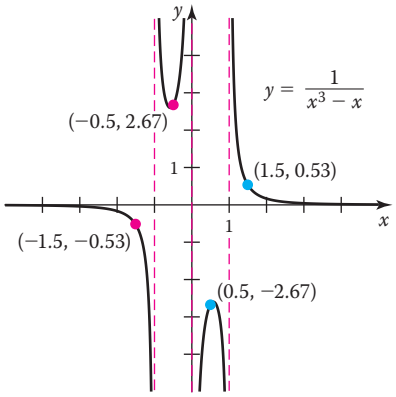
Άρα, το $g(-x)$ δεν ισούται ούτε με το $g(x)$, ούτε με το $-g(x)$. Ως εκ τούτου, η g δεν έχει κάποια συμμετρία.

γ. Σε αυτήν την περίπτωση, η h είναι μια σύνθεση της περιττής συνάρτησης $f(x) = 1/x$ με την περιττή συνάρτηση $g(x) = x^3 - x$. Σημειώστε ότι

$$h(-x) = \frac{1}{(-x)^3 - (-x)} = -\frac{1}{x^3 - x} = -h(x).$$

Επειδή $h(-x) = -h(x)$, η h είναι μια περιττή συνάρτηση (Σχήμα 1.16).

Περιττή συνάρτηση: αν το (x, y) ανήκει στο γράφημα, τότε και το $(-x, -y)$ ανήκει στο γράφημα.



Σχήμα 1.16

Σχετικές ασκήσεις 71–80 ◄

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Χρησιμοποιήστε τους όρους *πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, ανεξάρτητη μεταβλητή* και *εξαρτημένη μεταβλητή*, για να εξηγήσετε πώς μια συνάρτηση συσχετίζει μια μεταβλητή με μια άλλη μεταβλητή.

2. Σχετίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή μιας συνάρτησης με το πεδίο ορισμού ή το σύνολο τιμών; Σχετίζεται η εξαρτημένη μεταβλητή με το πεδίο ορισμού ή το σύνολο τιμών;

3. Εξηγήστε πώς το Κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας χρησιμοποιείται για την αναγνώριση συναρτήσεων.

4. Εάν $f(x) = 1/(x^3 + 1)$, ποιο είναι το $f(2)$; Ποιο είναι το $f(y^2)$;

5. Ποια δήλωση σχετικά με μια συνάρτηση είναι αληθής;
(i) Για κάθε τιμή του x στο πεδίο ορισμού, αντιστοιχεί μία μοναδική τιμή του y στο σύνολο τιμών.
(ii) Για κάθε τιμή του y στο σύνολο τιμών, αντιστοιχεί μία μοναδική τιμή του x στο πεδίο ορισμού. Εξηγήστε.

6. Εάν $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^3 - 2$, βρείτε τις συνθέσεις $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ και $g \circ g$.

7. Ας υποθέσουμε ότι οι f και g είναι άρτιες συναρτήσεις με $f(2) = 2$ και $g(2) = -2$. Βρείτε τα $f(g(2))$ και $g(f(-2))$.

8. Εξηγήστε πώς θα βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αν γνωρίζετε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των f και g.

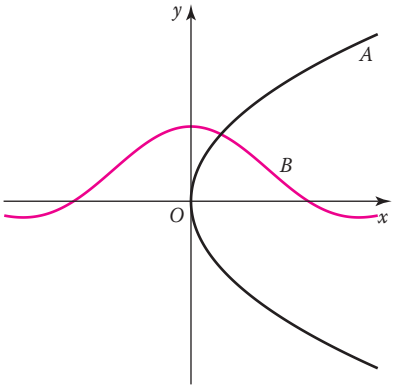
9. Σχεδιάστε ένα γράφημα μιας άρτιας συνάρτησης f και εξηγήστε πώς σχετίζονται τα $f(x)$ και $f(-x)$.

10. Σχεδιάστε ένα γράφημα μιας περιττής συνάρτησης f και εξηγήστε πώς σχετίζονται τα $f(x)$ και $f(-x)$.

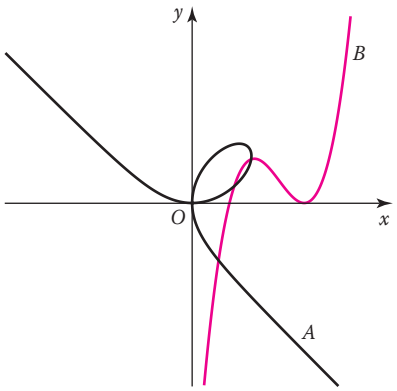
Βασικές δεξιότητες

11–12. Κριτήριο κατακόρυφης ευθείας *Εξετάστε εάν γραφικές παραστάσεις των A, B ή και των δύο παριστάνουν συναρτήσεις.*

11.



12.



T **13–20. Πεδία ορισμού και σύνολα τιμών** *Σχεδιάστε κάθε συνάρτηση με μια εφαρμογή γραφικών χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο πλαίσιο. Στη συνέχεια, δηλώστε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών.*

13. $f(x) = 3x^4 - 10$· $[-2, 2] \times [-10, 15]$

14. $g(y) = \dfrac{y+1}{(y+2)(y-3)}$· $[-4, 6] \times [-3, 3]$

15. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$· $[-4, 4] \times [-4, 4]$

16. $F(w) = \sqrt[4]{2 - w}$· $[-3, 2] \times [0, 2]$

17. $h(u) = \sqrt[3]{u - 1}$· $[-7, 9] \times [-2, 2]$

18. $g(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x + 5}$· $[-5, 5] \times [-10, 50]$

19. $f(x) = (9 - x^2)^{3/2}$· $[-4, 4] \times [0, 30]$

20. $g(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$· $[-7, 7] \times [0, 1.5]$

21–24. Πεδίο ορισμού υπό συνθήκη *Προσδιορίστε ένα κατάλληλο πεδίο ορισμού για κάθε συνάρτηση. Διακρίνετε τις ανεξάρτητες και τις εξαρτημένες μεταβλητές.*

21. Μια πέτρα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω από το έδαφος με ταχύτητα 40 m/s τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η απόσταση της d (σε μέτρα) πάνω από το έδαφος (αγνοώντας την αντίσταση του αέρα) προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $f(t) = 40t - 5t^2$.

22. Μια πέτρα ρίχνεται από μια γέφυρα ύψους 20 m πάνω από ένα ποτάμι. Αν το t παριστάνει τον χρόνο που παρήλθε (σε δευτερόλεπτα) από τη στιγμή που αφέθηκε η πέτρα, τότε η απόσταση της d (σε μέτρα) πάνω από το ποτάμι προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $f(t) = 20 - 5t^2$.

23. Μια κυλινδρική δεξαμενή νερού με ακτίνα 10 m και ύψος 50 m γεμίζεται σε ύψος h. Ο όγκος V του νερού (σε κυβικά μέτρα) δίνεται από τη συνάρτηση $g(h) = 100\pi h$.

24. Ο όγκος V ενός μπαλονιού ακτίνας r (σε μέτρα) γεμάτο ήλιο δίνεται από τη συνάρτηση $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Υποθέστε ότι το μπαλόνι μπορεί να κρατήσει έως και 1 m^3 ηλίου.

25–36. Σύνθετες συναρτήσεις και συμβολισμός *Αν* $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^3$ *και* $F(x) = 1/(x - 3)$, *απλοποιήστε ή βρείτε τις ακόλουθες εκφράσεις.*

25. $f(10)$ **26.** $f(p^2)$ **27.** $g(1/z)$

28. $F(y^4)$ **29.** $F(g(y))$ **30.** $f(g(w))$

31. $g(f(u))$ **32.** $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ **33.** $F(F(x))$

34. $g(F(f(x)))$ **35.** $f(\sqrt{x+4})$ **36.** $F\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)$

37–40. Δουλεύοντας με σύνθετες συναρτήσεις *Βρείτε τις δυνατές επιλογές για τις εξωτερικές και τις εσωτερικές συναρτήσεις f και g, έτσι ώστε η δεδομένη συνάρτηση h να ισούται με $f \circ g$. Δώστε το πεδίο ορισμού της h.*

37. $h(x) = (x^3 - 5)^{10}$

38. $h(x) = \dfrac{2}{(x^6 + x^2 + 1)^2}$

39. $h(x) = \sqrt{x^4 + 2}$

40. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$

41–48. Πιο σύνθετες συναρτήσεις *Έστω* $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 4$, $F(x) = \sqrt{x}$ *και* $G(x) = 1/(x - 2)$. *Βρείτε τις ακόλουθες σύνθετες συναρτήσεις και δώστε τα πεδία ορισμού τους.*

41. $f \circ g$ **42.** $g \circ f$ **43.** $f \circ G$

44. $f \circ g \circ G$ **45.** $G \circ g \circ f$ **46.** $F \circ g \circ g$

47. $g \circ g$ **48.** $G \circ G$

49–54. Συνάρτηση που λείπει *Έστω* $g(x) = x^2 + 3$. *Βρείτε μια συνάρτηση f η οποία να παράγει τη δεδομένη σύνθεση.*

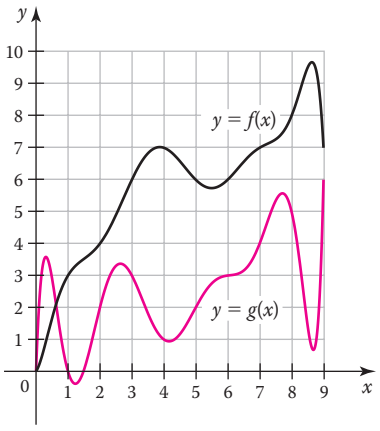
49. $(f \circ g)(x) = x^2$ **50.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

51. $(f \circ g)(x) = x^4 + 6x^2 + 9$ **52.** $(f \circ g)(x) = x^4 + 6x^2 + 20$

53. $(g \circ f)(x) = x^4 + 3$ **54.** $(g \circ f)(x) = x^{2/3} + 3$

55. Σύνθετες συναρτήσεις από γραφήματα Χρησιμοποιήστε τις γραφικές παραστάσεις των f και g στο σχήμα, για να προσδιορίσετε τις ακόλουθες τιμές των συναρτήσεων.

α. $(f \circ g)(2)$ **β.** $g(f(2))$ **γ.** $f(g(4))$
δ. $g(f(5))$ **ε.** $f(f(8))$ **στ.** $g(f(g(5)))$



56. Σύνθετες συναρτήσεις από πίνακες Χρησιμοποιήστε τον πίνακα, για να υπολογίσετε τις σύνθετες συναρτήσεις.

x	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	1	0	−1	−3	−1
$g(x)$	−1	0	2	3	4	5
$h(x)$	0	−1	0	3	0	4

α. $h(g(0))$ **β.** $g(f(4))$ **γ.** $h(h(0))$
δ. $g(h(f(4)))$ **ε.** $f(f(f(1)))$ **στ.** $h(h(h(0)))$
ζ. $f(h(g(2)))$ **η.** $g(f(h(4)))$ **θ.** $g(g(g(1)))$
ι. $f(f(h(3)))$

57–61. Δουλεύοντας με πηλίκα διαφοράς *Βρείτε τα πηλίκα διαφοράς* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *των ακόλουθων συναρτήσεων.*

57. $f(x) = x^2$

58. $f(x) = 4x - 3$

59. $f(x) = 2/x$

60. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

61. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

62–66. Δουλεύοντας με πηλίκα διαφοράς *Βρείτε τα πηλίκα διαφοράς* $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *των ακόλουθων συναρτήσεων.*

62. $f(x) = x^4$

63. $f(x) = x^3 - 2x$

64. $f(x) = 4 - 4x - x^2$

65. $f(x) = -\dfrac{4}{x^2}$

66. $f(x) = \dfrac{1}{x} - x^2$

67–70. Ερμηνεία της κλίσης της τέμνουσας ευθείας *Σε κάθε άσκηση δίνονται μια συνάρτηση και ένα διάστημα για την ανεξάρτητη μεταβλητή της. Τα άκρα του διαστήματος δίνονται με τα σημεία P και Q στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.*

α. *Σχεδιάστε ένα γράφημα της συνάρτησης και την τέμνουσα ευθεία από τα P και Q.*

β. *Βρείτε την κλίση της τέμνουσας του (α) και δώστε την απάντησή σας με βάση τον μέσο ρυθμό μεταβολής στο διάστημα. Περιλάβετε μονάδες στην απάντησή σας.*

67. Ύστερα από t δευτερόλεπτα, ένα αντικείμενο πέφτει διανύοντας μια απόσταση $d = 16t^2$, όπου το d μετριέται σε πόδια και $2 \le t \le 5$.

68. Ύστερα από t δευτερόλεπτα, ο μεγάλος δείκτης ενός ρολογιού κινείται δημιουργώντας γωνία $D = 6t$, όπου το D μετριέται σε μοίρες και $5 \le t \le 20$.

69. Ο όγκος V ενός ιδανικού αερίου σε κυβικά εκατοστά δίνεται από $V = 2/p$, όπου p είναι η πίεση σε ατμόσφαιρες και $0.5 \le p \le 2$.

70. Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου πριν από μια απότομη πέδηση (φρενάρισμα) μπορεί να εκτιμηθεί από το μήκος του ίχνους ολίσθησης. Σε ένα μοντέλο θεωρείται ότι η ταχύτητα S σε mi/hr είναι $S = \sqrt{30\ell}$, όπου ℓ είναι το μήκος του ίχνους ολίσθησης σε πόδια και $50 \le \ell \le 150$.

T **71–78. Συμμετρία** *Προσδιορίστε αν τα γραφήματα των ακόλουθων εξισώσεων και συναρτήσεων είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x, y ή την αρχή των αξόνων. Ελέγξτε τα αποτελέσματά σας γραφικά.*

71. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 12$

72. $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - x$

73. $f(x) = x^5 - x^3 - 2$

74. $f(x) = 2|x|$

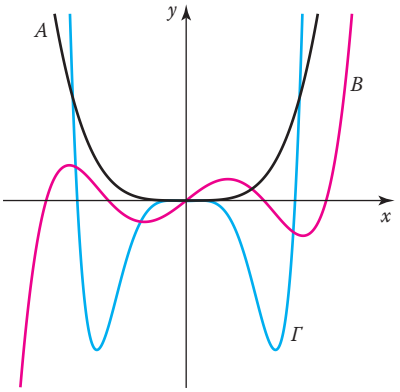
75. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

76. $x^3 - y^5 = 0$

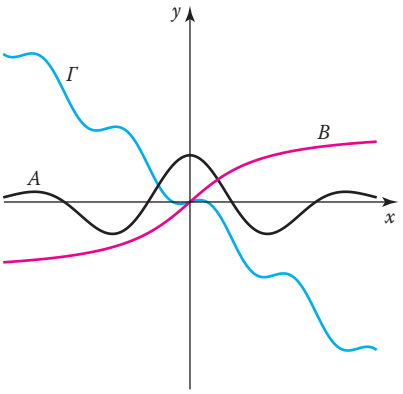
77. $f(x) = x|x|$

78. $|x| + |y| = 1$

79. Συμμετρία σε γραφήματα Δείξτε εάν οι συναρτήσεις που παριστάνονται στις γραφικές παραστάσεις A, B και Γ στο σχήμα είναι άρτιες, περιττές ή τίποτε από τα δύο.



80. Συμμετρία σε γραφήματα Δείξτε εάν οι συναρτήσεις που παριστάνονται στις γραφικές παραστάσεις A, B και Γ στο σχήμα είναι άρτιες, περιττές ή τίποτε από τα δύο.



Περαιτέρω διερευνήσεις

81. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Διερευνήστε εάν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια εξήγηση ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Το σύνολο τιμών της $f(x) = 2x - 38$ είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

β. Η σχέση $y = x^6 + 1$ *δεν* είναι συνάρτηση, επειδή $y = 2$ για αμφότερα τα $x = -1$ και $x = 1$.

γ. Εάν $f(x) = x^{-1}$, τότε η $f(1/x) = 1/f(x)$.

δ. Γενικώς, ισχύει $f(f(x)) = (f(x))^2$.

ε. Γενικώς, ισχύει $f(g(x)) = g(f(x))$.

στ. Εξ ορισμού, ισχύει $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

ζ. Εάν $f(x)$ είναι μια άρτια συνάρτηση, τότε η $c\,f(ax)$ είναι μια άρτια συνάρτηση, όπου a και c είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.

η. Εάν $f(x)$ είναι μια περιττή συνάρτηση, τότε η $f(x) + d$ είναι μια περιττή συνάρτηση, όπου d είναι ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

θ. Εάν η f είναι άρτια *και* περιττή, τότε $f(x) = 0$ για όλα τα x.

82. Σύνολο τιμών συναρτήσεων μορφής $f(x) = x^n$ Χρησιμοποιώντας μαθηματικά επιχειρήματα και σχήματα, εξηγήστε γιατί το σύνολο τιμών της $f(x) = x^n$, όπου n ένας θετικός περιττός ακέραιος, είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Εξηγήστε γιατί το σύνολο τιμών της $g(x) = x^n$, όπου n ένας θετικός άρτιος ακέραιος, είναι όλοι οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.

T **83. Γράφημα απόλυτης τιμής** Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της απόλυτης τιμής (βλ. Παράρτημα Α), για να σχεδιάσετε το γράφημα της εξίσωσης $|x| - |y| = 1$. Χρησιμοποιήστε μια εφαρμογή γραφικών, για να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας.

84. Άρτιες και περιττές ως προς την αρχή των αξόνων

α. Εάν το $f(0)$ ορίζεται και η f είναι μια άρτια συνάρτηση, τότε κατ' ανάγκη $f(0) = 0$. Εξηγήστε.

β. Εάν το $f(0)$ ορίζεται και η f είναι μια περιττή συνάρτηση, τότε κατ' ανάγκη $f(0) = 0$. Εξηγήστε.

T **85–88. Εύρεση πολυωνύμων** *Βρείτε ένα πολυώνυμο f που να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες. (Υπόδειξη: Προσδιορίστε τον βαθμό του f. Μετά αντικαταστήστε ένα πολυώνυμο του ίδιου βαθμού και επιλύστε ως προς τους συντελεστές του.)*

85. $f(f(x)) = 9x - 8$ **86.** $(f(x))^2 = 9x^2 - 12x + 4$

87. $f(f(x)) = x^4 - 12x^2 + 30$ **88.** $(f(x))^2 = x^4 - 12x^2 + 36$

89–92. Πηλίκα διαφορών *Απλοποιήστε τα πηλίκα διαφορών* $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *και* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *παραγοντοποιώντας τον αριθμητή.*

89. $f(x) = \sqrt{x}$ **90.** $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

91. $f(x) = -\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ **92.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Εφαρμογές

T **93. Εκτόξευση πυραύλου** Ένας μικρός πύραυλος εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από το χείλος ενός γκρεμού 80 ft πάνω από το έδαφος με ταχύτητα 96 ft/s. Το ύψος του (σε πόδια) πάνω από το έδαφος δίνεται από $h(t) = -16t^2 + 96t + 80$, όπου t είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

α. Υποθέτοντας ότι ο πύραυλος εκτοξεύεται σε $t = 0$, ποιο είναι το κατάλληλο πεδίο ορισμού για το h;

β. Σχεδιάστε το γράφημα του h και προσδιορίστε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο πύραυλος φτάνει στο ψηλότερο σημείο. Ποιο είναι το ύψος του εκείνη τη στιγμή;

94. Αποστράγγιση (άδειασμα) μιας δεξαμενής (νόμος του Torricelli) Ένα κυλινδρικό δοχείο με εμβαδόν διατομής 100 cm^2 γεμίζεται σε βάθος 100 cm με νερό. Σε $t = 0$, ανοίγει μια διαρροή στον πυθμένα της δεξαμενής με εμβαδόν 10 cm^2, επιτρέποντας στο νερό να ρέει έξω από τη δεξαμενή. Το βάθος του νερού στη δεξαμενή σε χρόνο $t \geq 0$ είναι $d(t) = (10 - 2.2t)^2$.

α. Δείξτε ότι $d(0) = 100$, όπως ορίζεται.

β. Σε ποια χρονική στιγμή αδειάζει η δεξαμενή;

γ. Ποιο είναι το κατάλληλο πεδίο ορισμού για την d;

Πρόσθετες ασκήσεις

95–101. Συνδυασμός άρτιων και περιττών συναρτήσεων *Έστω E είναι μια άρτια συνάρτηση και O είναι μια περιττή συνάρτηση. Καθορίστε τη συμμετρία, αν υπάρχει, των ακόλουθων συναρτήσεων.*

95. $E + O$ **96.** $E \cdot O$ **97.** E/O **98.** $E \circ O$

99. $E \circ E$ **100.** $O \circ O$ **101.** $O \circ E$

102. Σύνθεση άρτιων και περιττών συναρτήσεων από πίνακες Έστω f μια άρτια συνάρτηση και g μια περιττή συνάρτηση. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα, για να υπολογίσετε τις συνθέσεις.

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	−1	3	−4
$g(x)$	−3	−1	−4	−2

α. $f(g(-1))$ **β.** $g(f(-4))$ **γ.** $f(g(-3))$

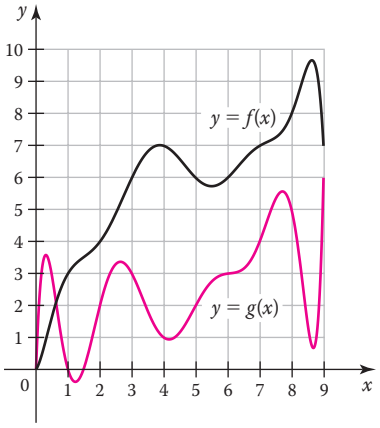
δ. $f(g(-2))$ **ε.** $g(g(-1))$ **στ.** $f(g(0) - 1)$

ζ. $f(g(g(-2)))$ **η.** $g(f(f(-4)))$ **θ.** $g(g(g(-1)))$

103. Σύνθεση άρτιων και περιττών συναρτήσεων από γραφήματα Έστω f είναι μια άρτια και g μια περιττή συνάρτηση. Χρησιμοποιήστε τα (ημιτελή) γραφήματα των f και g στο σχήμα, για να προσδιορίσετε τις ακόλουθες τιμές των συναρτήσεων.

α. $f(g(-2))$ **β.** $g(f(-2))$ **γ.** $f(g(-4))$

δ. $g(f(5) - 8)$ **ε.** $g(g(-7))$ **στ.** $f(1 - f(8))$



ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

1. $3, x^4 - 2x^2, t^2 - 2t, p^2 - 4p + 3$ **2.** Το πεδίο ορισμού είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Το σύνολο τιμών είναι $\{y: 0 < y \leq 1\}$. **3.** $(f \circ g)(x) = x^4 + 1$ και $(g \circ f)(x) = (x^2 + 1)^2$ **4.** Εάν το γράφημα ήταν συμμετρικό ως προς τον άξονα x, δεν θα ικανοποιούσε το Κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας. ◄

1.2 Παράσταση συναρτήσεων

Διαθέτουμε τέσσερις τρόπους για τον προσδιορισμό και την παράσταση συναρτήσεων: τύπους, γραφήματα, πίνακες και διατυπώσεις.

Χρήση τύπων

Η ακόλουθη καταγραφή είναι ένας σύντομος κατάλογος των οικογενειών των συναρτήσεων που μελετώνται συστηματικά σε αυτό το βιβλίο. Όλες ορίζονται από *τύπους*.

► Σύμφωνα με μια εκδοχή του Θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας, ένα μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού n έχει ακριβώς n (ενδεχομένως μιγαδικές) ρίζες, μετρώντας κάθε ρίζα με την πολλαπλότητά της.

1. Τα **πολυώνυμα** είναι συναρτήσεις της μορφής

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

όπου οι **συντελεστές** $a_0, a_1, \ldots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $a_n \neq 0$ και ο μη αρνητικός ακέραιος n είναι ο **βαθμός** του πολυωνύμου. Το πεδίο ορισμού κάθε πολυωνύμου είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Ένα πολυώνυμο n-στού βαθμού μπορεί να έχει το πολύ n πραγματικές **ρίζες** ή **λύσεις**, δηλαδή τιμές του x για τις οποίες $p(x) = 0$. Οι ρίζες είναι σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της p τέμνει τον άξονα x.

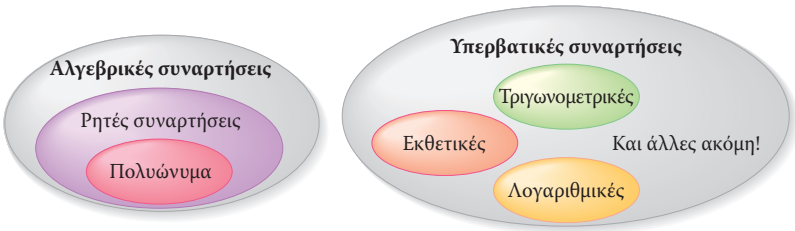
2. Οι **ρητές συναρτήσεις** είναι λόγοι της μορφής $f(x) = p(x)/q(x)$, όπου p και q είναι πολυώνυμα. Επειδή η διαίρεση με το μηδέν απαγορεύεται, το πεδίο ορισμού της ρητής συνάρτησης είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, εκτός από εκείνους για τους οποίους ο παρονομαστής είναι μηδέν.
3. Οι **αλγεβρικές συναρτήσεις** κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας τις πράξεις της άλγεβρας: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, και ριζικά. Παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων: $f(x) = \sqrt{2x^3 + 4}$ και $g(x) = x^{1/4}(x^3 + 2)$. Γενικά, εάν εμφανίζεται ένα άρτιο ριζικό (τετραγωνική ρίζα, τέταρτη ρίζα, κ.ο.κ.), τότε το πεδίο ορισμού δεν περιέχει σημεία για τα οποία η ποσότητα κάτω από το ριζικό είναι αρνητική (ίσως και άλλα σημεία).

➤ Οι εκθετικές και οι λογαριθμικές συναρτήσεις, μαζί με τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 7.

4. Οι **εκθετικές συναρτήσεις** έχουν τη μορφή $f(x) = b^x$, όπου η βάση $b \neq 1$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Στενά συνδεδεμένες με τις εκθετικές συναρτήσεις είναι οι **λογαριθμικές συναρτήσεις** της μορφής $f(x) = \log_b x$, όπου $b > 0$ και $b \neq 1$. Οι εκθετικές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού που αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Οι λογαριθμικές συναρτήσεις ορίζονται για θετικούς πραγματικούς αριθμούς.

   Η **φυσική εκθετική συνάρτηση** είναι $f(x) = e^x$, με βάση $b = e$, όπου $e \approx 2.71828\ldots$ είναι μία από τις θεμελιώδεις σταθερές των μαθηματικών. Σχετική με τη φυσική εκθετική συνάρτηση είναι η **φυσική λογαριθμική συνάρτηση** $f(x) = \ln x$, η οποία έχει επίσης βάση $b = e$.
5. Οι **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** είναι $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ και $\csc x$. Είναι θεμελιώδους σημασίας για τα μαθηματικά και έχουν πολλούς τομείς εφαρμογής. Επίσης σημαντικές είναι οι συγγενικές προς αυτές, οι **αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις**.
6. Οι **τριγωνομετρικές, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις** είναι μερικά παραδείγματα μιας μεγάλης οικογένειας που ονομάζεται **υπερβατικές συναρτήσεις**. Το Σχήμα 1.17 δείχνει την οργάνωση αυτών των συναρτήσεων, οι οποίες διερευνώνται λεπτομερώς στα επόμενα κεφάλαια.

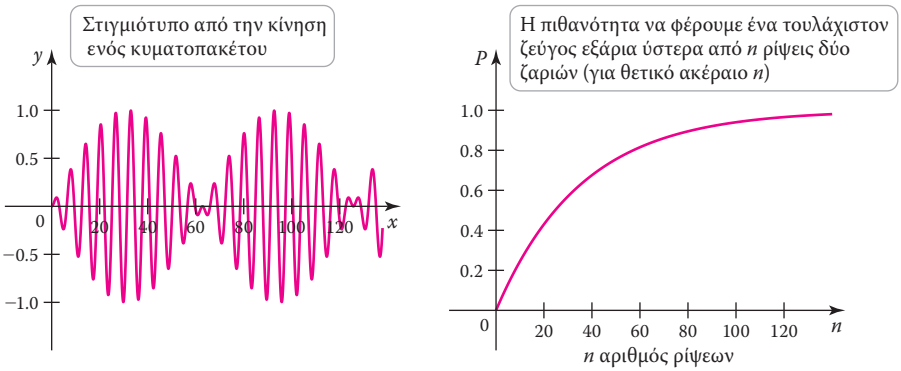
ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Είναι όλα τα πολυώνυμα ρητές συναρτήσεις; Είναι όλες οι αλγεβρικές συναρτήσεις πολυώνυμα; ➤



Σχήμα 1.17

Χρήση γραφημάτων

Παρότι οι τύποι είναι ο πιο πλήρης τρόπος για να παρασταθούν πολλές συναρτήσεις, τα γραφήματα συχνά παρέχουν τις πιο διαφωτιστικές παραστάσεις. Δύο από τα αμέτρητα παραδείγματα συναρτήσεων και τα γραφήματά τους φαίνονται στο Σχήμα 1.18. Μεγάλο μέρος αυτού του βιβλίου είναι αφιερωμένο στη δημιουργία και την ανάλυση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.

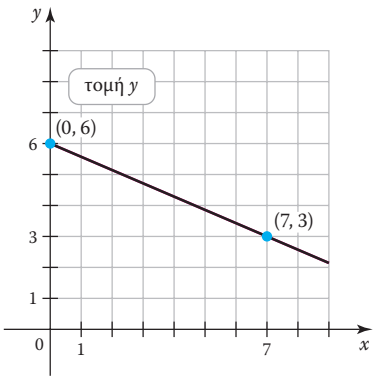


Σχήμα 1.18

Υπάρχουν δύο τρόποι να σχεδιάσουμε γραφήματα συναρτήσεων.

- Οι αριθμομηχανές γραφικών παραστάσεων (graphic calculator), οι ταμπλέτες, και το αντίστοιχο λογισμικό είναι εύκολοι στη χρήση και ισχυροί. Μια τέτοια **τεχνολογία** παράγει εύκολα τα διαγράμματα για τις περισσότερες συναρτήσεις που συναντώνται σε αυτό το βιβλίο. Υποθέτουμε ότι γνωρίζετε να χρησιμοποιείτε μια εφαρμογή γραφικών.
- Οι εφαρμογές γραφικών, ωστόσο, δεν είναι αλάνθαστες. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να προσπαθήσετε επίσης να κατακτήσετε τις **αναλυτικές μεθόδους** (μολύβι και χαρτί), προκειμένου να αναλύσετε τις συναρτήσεις και να σχεδιάσετε ακριβή γραφήματα με το χέρι. Οι αναλυτικές μέθοδοι βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στον Απειροστικό Λογισμό και παρουσιάζονται σε όλο το βιβλίο.

Το σημαντικό μήνυμα είναι το εξής: Τόσο η τεχνολογία όσο και οι αναλυτικές μέθοδοι είναι απαραίτητες και πρέπει να χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με έναν ενοποιημένο τρόπο, για να παράγουν ακριβή γραφήματα.



Σχήμα 1.19

Γραμμικές συναρτήσεις Ένας τύπος της εξίσωσης μιας ευθείας (βλ. Παράρτημα Α) είναι ο $y = mx + b$, όπου m και b είναι σταθερές. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση $f(x) = mx + b$ έχει γράφημα μια ευθεία γραμμή και ονομάζεται **γραμμική συνάρτηση**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Γραμμικές συναρτήσεις και οι γραφικές παραστάσεις τους
Προσδιορίστε τη συνάρτηση που παριστάνεται από την ευθεία στο Σχήμα 1.19.

ΛΥΣΗ Από το γράφημα, βλέπουμε ότι η τομή με τον άξονα y είναι $(0, 6)$. Χρησιμοποιώντας τα $(0, 6)$ και $(7, 3)$, η κλίση της ευθείας είναι

$$m = \frac{3 - 6}{7 - 0} = -\frac{3}{7}.$$

Συνεπώς, η ευθεία παριστάνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -3x/7 + 6$.

Σχετικές ασκήσεις 11–14 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Συνάρτηση ζήτησης για πίτσες Ύστερα από μελέτες πωλήσεων για αρκετούς μήνες, ο ιδιοκτήτης μιας αλυσίδας πιτσαρίας παρατηρεί ότι ο αριθμός των δύο κορυφαίων ειδών πίτσας που πωλούνται σε μια εβδομάδα (που ονομάζεται *ζήτηση*) μειώνεται όσο αυξάνεται η τιμή. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία δείχνουν ότι στην τιμή των \$14 ανά πίτσα, πωλούνται κάθε εβδομάδα κατά μέσο όρο 400 πίτσες, ενώ στην τιμή των \$17 ανά πίτσα, πωλούνται κάθε εβδομάδα κατά μέσο όρο 250 πίτσες. Ας υποθέσουμε ότι η ζήτηση d είναι μια *γραμμική* συνάρτηση της τιμής p.

α. Βρείτε τις σταθερές m και b στη συνάρτηση ζήτησης $d = f(p) = mp + b$. Στη συνέχεια, σχεδιάστε το γράφημα της f.

β. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, πόσες πίτσες (κατά μέσο όρο) πωλούνται κάθε εβδομάδα στην τιμή των \$20;

ΛΥΣΗ

α. Είναι δεδομένα τα εξής δύο σημεία στο γράφημα της συνάρτησης ζήτησης: $(p, d) = (14, 400)$ και $(17, 250)$. Ως εκ τούτου, η κλίση της ευθείας ζήτησης είναι

$$m = \frac{400 - 250}{14 - 17} = -50 \text{ πίτσες ανά δολάριο.}$$

Επομένως, η εξίσωση της γραμμικής συνάρτησης ζήτησης είναι

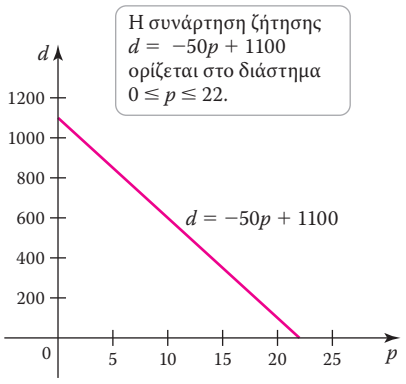
$$d - 250 = -50(p - 17).$$

Εκφράζοντας το d ως συνάρτηση του p, έχουμε $d = f(p) = -50p + 1100$ (Σχήμα 1.20).

β. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ζήτησης με τιμή \$ 20, ο μέσος αριθμός πίτσες που θα μπορούσαν να πωληθούν κάθε εβδομάδα είναι $f(20) = 100$.

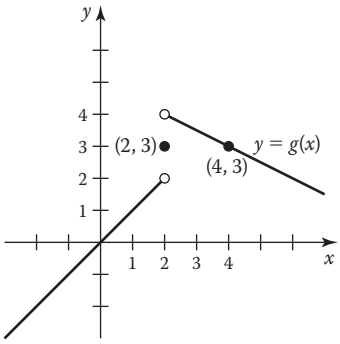
Σχετικές ασκήσεις 15–18 ◄

➤ Οι μονάδες της κλίσης έχουν νόημα: για κάθε δολάριο, η τιμή μειώνεται, και μπορούν να πωληθούν 50 ακόμη πίτσες κατά μέσο όρο.



Σχήμα 1.20

Κλαδικές συναρτήσεις Μια συνάρτηση μπορεί να έχει διαφορετικούς ορισμούς σε διάφορα μέρη του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα, ο φόρος εισοδήματος επιβάλλεται στα φορολογικά κλιμάκια που έχουν διαφορετικούς φορολογικούς συντελεστές. Οι συναρτήσεις που έχουν διαφορετικούς ορισμούς σε διάφορα μέρη του πεδίου ορισμού τους ονομάζονται **κλαδικές**. Εάν όλα τα μέρη είναι γραμμικές συναρτήσεις, η συνάρτηση είναι **κατά τμήματα γραμμική**. Εδώ παραθέτουμε μερικά παραδείγματα.



Σχήμα 1.21

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Προσδιορισμός μιας κλαδικής συνάρτησης

Η γραφική παράσταση μιας κατά τμήματα γραμμικής συνάρτησης g παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.21. Βρείτε έναν τύπο της συνάρτησης.

ΛΥΣΗ Για $x < 2$, η γραφική παράσταση είναι γραμμική με κλίση 1 και τέμνει τον άξονα y στο $(0, 0)$. Η εξίσωση είναι $y = x$. Για $x > 2$, η κλίση της ευθείας είναι $-\frac{1}{2}$ και διέρχεται από το $(4, 3)$. Έτσι, μια εξίσωση αυτού του τμήματος της συνάρτησης είναι

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4) \quad \text{ή} \quad y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Για $x = 2$, έχουμε $g(2) = 3$. Οπότε,

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{εάν } x < 2 \\ 3 & \text{εάν } x = 2 \\ -\frac{1}{2}x + 5 & \text{εάν } x > 2. \end{cases}$$

Σχετικές ασκήσεις 19–22 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Γραφική παράσταση κλαδικής συνάρτησης

α. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & \text{εάν } x \neq 2 \\ 1 & \text{εάν } x = 2 \end{cases}$

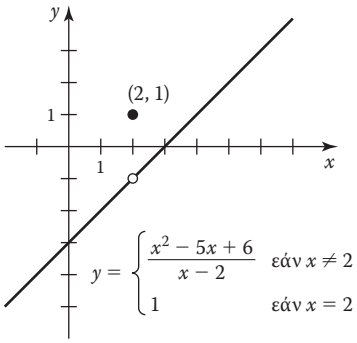
β. $f(x) = |x|$, η **συνάρτηση απόλυτης τιμής**

ΛΥΣΗ

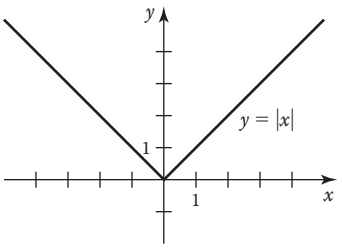
α. Η συνάρτηση f απλοποιείται με παραγοντοποίηση και ύστερα με απλοποίηση του $x - 2$, υποθέτοντας ότι $x \neq 2$:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3.$$

Συνεπώς, η γραφική παράσταση της f ταυτίζεται με το γράφημα της ευθείας $y = x - 3$ όταν $x \neq 2$. Μας δίνεται ότι $f(2) = 1$ (Σχήμα 1.22).



Σχήμα 1.22



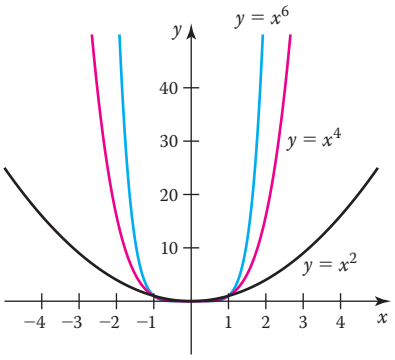
Σχήμα 1.23

β. Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού ορίζεται ως

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{εάν } x \geq 0 \\ -x & \text{εάν } x < 0. \end{cases}$$

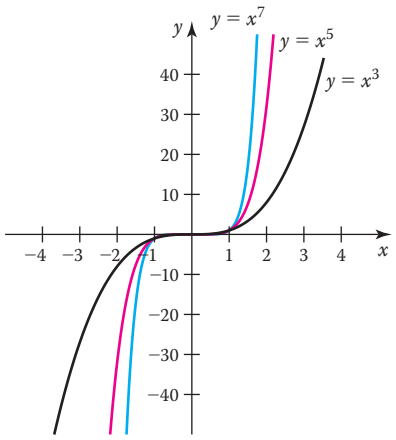
Από το γράφημα του $y = -x$, για $x < 0$, και του $y = x$, για $x \geq 0$, προκύπτει το γράφημα στο Σχήμα 1.23.

Σχετικές ασκήσεις 23–28 ◄



Σχήμα 1.24

Συναρτήσεις δυνάμεων Οι συναρτήσεις δυνάμεων αποτελούν μια ειδική περίπτωση πολυωνύμων. Έχουν τη μορφή $f(x) = x^n$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος. Όταν ο n είναι ένας άρτιος ακέραιος, οι τιμές της συνάρτησης είναι μη αρνητικές και το γράφημα διέρχεται από την αρχή των αξόνων, με άνοιγμα προς τα πάνω (Σχήμα 1.24). Για περιττούς ακέραιους, η συνάρτηση $f(x) = x^n$ έχει θετικές τιμές όταν ο x είναι θετικός και αρνητικές όταν ο x είναι αρνητικός (Σχήμα 1.25).



Σχήμα 1.25

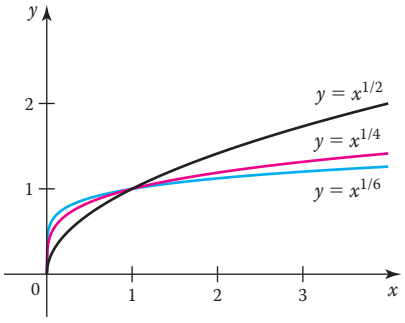
ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Ποιο είναι το σύνολο τιμών της $f(x) = x^7$; Ποιο είναι το σύνολο τιμών της $f(x) = x^8$; ◄

Άρρητες συναρτήσεις Οι άρρητες συναρτήσεις είναι μια ειδική περίπτωση αλγεβρικών συναρτήσεων. Έχουν τύπο της μορφής $f(x) = x^{1/n}$, όπου $n > 1$ είναι θετικός ακέραιος. Παρατηρήστε ότι, όταν το n είναι άρτιος (τετραγωνικές ρίζες, τέταρτες ρίζες, κ.ο.κ.), το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών αποτελούνται από μη αρνητικούς αριθμούς. Οι γραφικές παραστάσεις τους αρχίζουν απότομα και «ισιώνουν» καθώς το x αυξάνεται (Σχήμα 1.26).

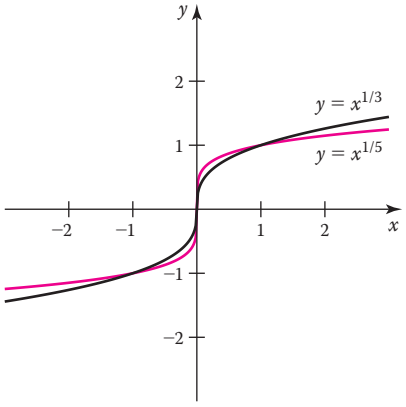
Αντίθετα, οι άρρητες συναρτήσεις περιττής τάξης (κυβικές ρίζες, πέμπτες ρίζες, κ.ο.κ.) ορίζονται για όλες τις πραγματικές τιμές του x και το σύνολο τιμών τους είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Οι γραφικές παραστάσεις τους διέρχονται από την αρχή των αξόνων, ανοίγουν προς τα πάνω για $x < 0$ και προς τα κάτω για $x > 0$, ενώ «ισιώνουν» καθώς το x αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή (Σχήμα 1.27).

➤ Θυμηθείτε ότι, εάν ο n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε το $x^{1/n}$ είναι η n-οστή ρίζα του x, δηλαδή $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x) = x^{1/7}$; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x) = x^{1/10}$; ◄



Σχήμα 1.26



Σχήμα 1.27

Ρητές συναρτήσεις Οι ρητές συναρτήσεις εμφανίζονται συχνά σε αυτό το βιβλίο, και πολλά αναφέρονται αργότερα για τα γραφήματα των ρητών συναρτήσεων. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει πώς συνεργάζεται η ανάλυση με την τεχνολογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 **Τεχνολογία και ανάλυση** Έστω η ρητή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x^3 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - 6}.$$

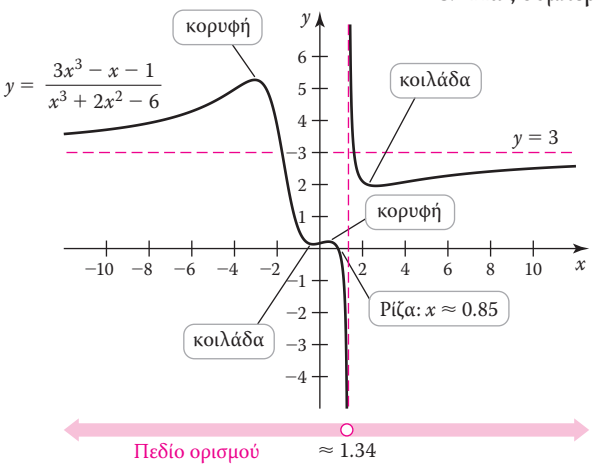
α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

β. Βρείτε τις ρίζες (λύσεις) της f.

γ. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης χρησιμοποιώντας μια εφαρμογή γραφικών.

δ. Σε ποια σημεία η συνάρτηση έχει κορυφές και κοιλάδες;

ε. Πώς συμπεριφέρεται η f καθώς το x αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή;



Σχήμα 1.28

ΛΥΣΗ

α. Το πεδίο ορισμού αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από εκείνους για τους οποίους ο παρονομαστής είναι μηδέν. Μια εφαρμογή γραφικών δείχνει ότι ο παρονομαστής έχει μία πραγματική ρίζα αν $x \approx 1.34$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της f είναι $\{x: x \neq 1.34\}$.

β. Οι ρίζες μιας ρητής συνάρτησης είναι οι ρίζες του αριθμητή, υπό την προϋπόθεση ότι δεν είναι και ρίζες του παρονομαστή. Χρησιμοποιώντας μια εφαρμογή γραφικών, η μόνη πραγματική ρίζα του αριθμητή είναι $x \approx 0.85$.

γ. Πειραματιζόμενοι στο πλαίσιο του γραφήματος, παίρνουμε ένα ικανοποιητικό διάγραμμα της f (Σχήμα 1.28). Στο σημείο $x \approx 1.34$, όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής, η συνάρτηση αυξάνεται πάρα πολύ κατ' απόλυτη τιμή και η f έχει μια κατακόρυφη *ασύμπτωτη*.

➤ Στο Κεφάλαιο 4, δείχνουμε πώς χρησιμοποιείται ο Απειροστικός Λογισμός για να εντοπιστούν το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης.

δ. Η συνάρτηση έχει δύο κορυφές (που σε λίγο θα ονομάζονται *τοπικά μέγιστα*), μία κοντά στο $x = -3.0$ και μία κοντά στο $x = 0.4$. Η συνάρτηση έχει επίσης δύο κοιλάδες (που σε λίγο θα ονομάζονται *τοπικά ελάχιστα*), μία κοντά στο $x = -0.3$ και μία κοντά στο $x = 2.6$.

ε. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται προς τη θετική κατεύθυνση, το γράφημα προσεγγίζει την *οριζόντια ασύμπτωτη* $y = 3$ από κάτω, ενώ καθώς το x αυξάνεται προς την αρνητική κατεύθυνση, το γράφημα προσεγγίζει την $y = 3$ από πάνω.

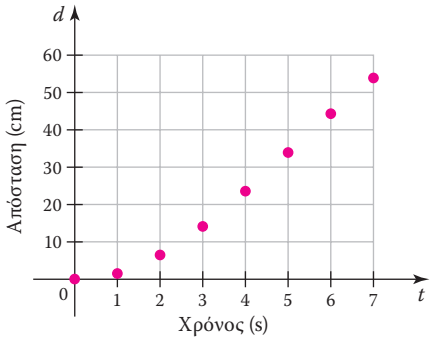
Σχετικές ασκήσεις 29–34 ◄

Χρήση πινάκων

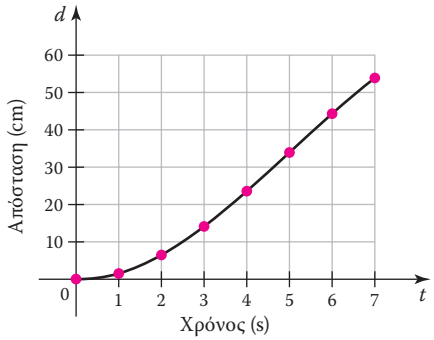
Μερικές φορές οι συναρτήσεις δεν προέρχονται από τύπους ή γραφήματα. Μπορούν να εμφανιστούν ως αριθμοί ή δεδομένα. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι κάνετε ένα πείραμα στο οποίο ένας βόλος ρίχνεται σε έναν κύλινδρο γεμάτο παχύρρευστο λάδι και αφήνεται να πέσει ελεύθερα. Μετράτε τη συνολική απόσταση d, σε εκατοστά, όπου πέφτει ο βόλος σε χρόνους $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ και 7 δευτερόλεπτα μετά τη ρίψη (Πίνακας 1.1). Το πρώτο βήμα θα πρέπει να είναι η σχεδίαση των σημείων των δεδομένων (Σχήμα 1.29).

Πίνακας 1.1

t (s)	d (cm)
0	0
1	2
2	6
3	14
4	24
5	34
6	44
7	54



Σχήμα 1.29

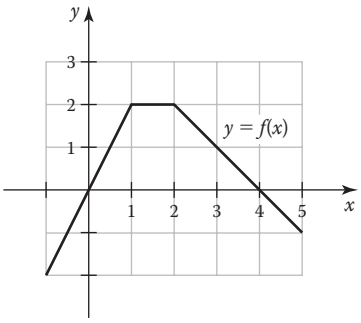


Σχήμα 1.30

Τα σημεία των δεδομένων υποδηλώνουν ότι υπάρχει μια συνάρτηση $d = f(t)$, η οποία δίνει την απόσταση όπου πέφτει ο βόλος σε *όλους* τους χρόνους που μας ενδιαφέρουν. Επειδή ο βόλος πέφτει μέσα στο λάδι χωρίς απότομες αλλαγές, είναι αρκετά λογική μια ομαλή γραφική παράσταση που διέρχεται από τα σημεία των δεδομένων (Σχήμα 1.30). Η εύρεση της πιο κατάλληλης συνάρτησης που ταιριάζει στα δεδομένα είναι ένα ακόμη πιο δύσκολο πρόβλημα, το οποίο θα συζητήσουμε αργότερα στο βιβλίο.

Χρήση λέξεων

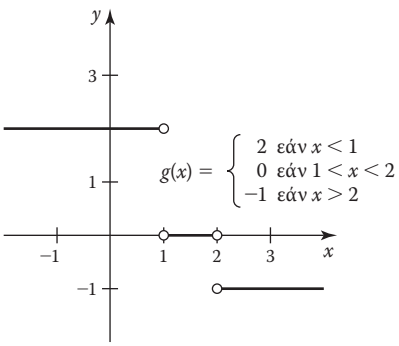
Η χρήση λέξεων μπορεί να είναι ο λιγότερο μαθηματικός τρόπος να ορίσουμε τις συναρτήσεις, αλλά είναι συχνά ο τρόπος με τον οποίο προέρχονται οι συναρτήσεις. Όταν μια συνάρτηση ορίζεται με λέξεις, μπορεί συχνά να πινακοποιηθεί, να παρασταθεί γραφικά ή να εκφραστεί με τύπο.



Σχήμα 1.31

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 **Μια συνάρτηση κλίσης** Έστω g είναι η συνάρτηση κλίσης για μια δεδομένη συνάρτηση f. Με λέξεις, αυτό σημαίνει ότι η $g(x)$ είναι η κλίση της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(x, f(x))$. Βρείτε και σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης κλίσης για τη συνάρτηση f στο Σχήμα 1.31.

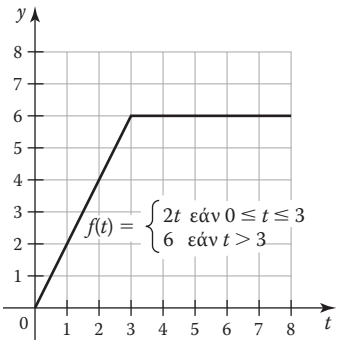
ΛΥΣΗ Για $x < 1$, η κλίση της $y = f(x)$ είναι 2. Η κλίση είναι 0, για $1 < x < 2$, και η κλίση είναι -1, για $x > 2$. Στα $x = 1$ και $x = 2$, η γραφική παράσταση της f έχει μια γωνία, έτσι ώστε η κλίση να είναι απροσδιόριστη σε αυτά τα σημεία. Ως εκ τούτου, το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, εκτός από τους $x = 1$ και $x = 2$, και η συνάρτηση κλίσης (Σχήμα 1.32) ορίζεται από την κλαδική συνάρτηση



Σχήμα 1.32

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{εάν } x < 1 \\ 0 & \text{εάν } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{εάν } x > 2. \end{cases}$$

Σχετικές ασκήσεις 35–38 ◄



Σχήμα 1.33

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 **Μια συνάρτηση εμβαδού** Έστω μια συνάρτηση εμβαδού για μια θετική συνάρτηση f. Με λέξεις, αυτό σημαίνει ότι η $A(x)$ είναι το εμβαδόν της περιοχής που οριοθετείται από τη γραφική παράσταση f και τον άξονα t, από $t = 0$ έως $t = x$. Θεωρήστε τη συνάρτηση (Σχήμα 1.33)

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{εάν } 0 \le t \le 3 \\ 6 & \text{εάν } t > 3. \end{cases}$$

α. Βρείτε τα $A(2)$ και $A(5)$.

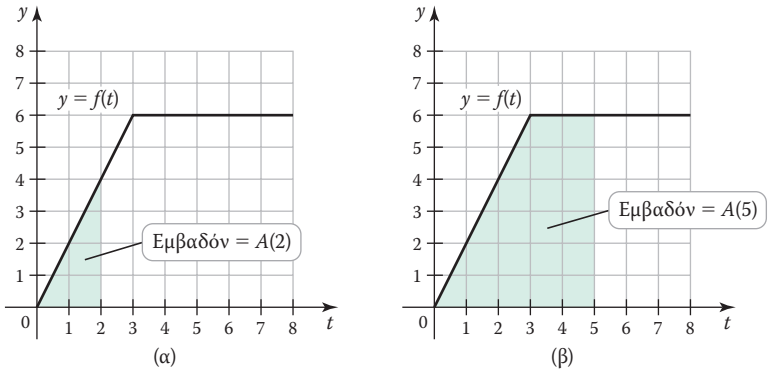
β. Βρείτε έναν τύπο κλαδικής συνάρτησης για τη συνάρτηση εμβαδού f.

ΛΥΣΗ

α. Η τιμή του $A(2)$ είναι το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα t, από $t = 0$ έως $t = 2$ (Σχήμα 1.34α). Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου,

$$A(2) = \frac{1}{2}(2)(4) = 4.$$

➤ Οι συναρτήσεις κλίσης και οι συναρτήσεις εμβαδού εμφανίζονται ξανά στα επόμενα κεφάλαια και παίζουν ουσιαστικό ρόλο στον Απειροστικό Λογισμό.



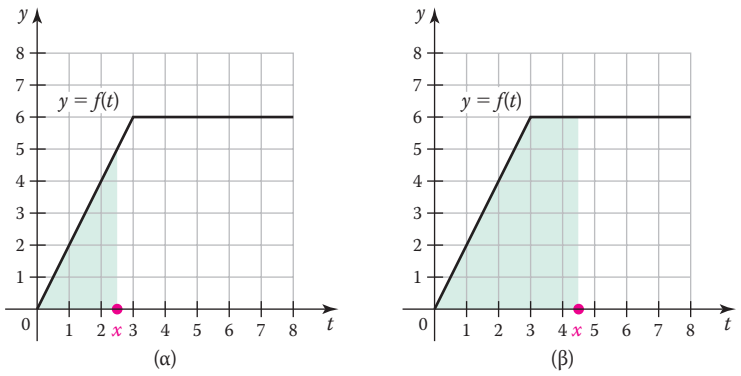
Σχήμα 1.34

Η τιμή $A(5)$ είναι το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα t, στο διάστημα $[0, 5]$ (Σχήμα 1.34β). Αυτό το εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου του οποίου η βάση είναι το διάστημα $[0, 3]$ συν το εμβαδόν του ορθογωνίου του οποίου η βάση είναι το διάστημα $[3, 5]$:

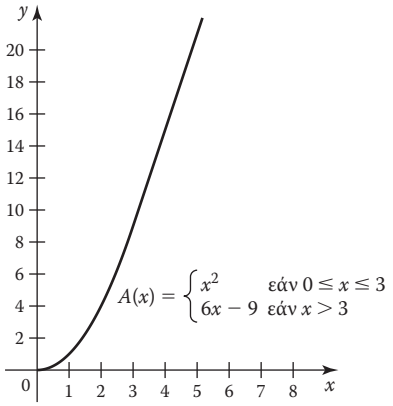
$$A(5) = \overbrace{\frac{1}{2}(3)(6)}^{\text{εμβαδόν του τριγώνου}} + \overbrace{(2)(6)}^{\text{εμβαδόν του ορθογωνίου}} = 21.$$

β. Για $0 \le x \le 3$ (Σχήμα 1.35α), το $A(x)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου του οποίου η βάση είναι το διάστημα $[0, x]$. Επειδή το ύψος του τριγώνου σε $t = x$ είναι $f(x)$,

$$A(x) = \frac{1}{2}xf(x) = \frac{1}{2}x\underbrace{(2x)}_{f(x)} = x^2.$$



Σχήμα 1.35



Σχήμα 1.36

Για $x > 3$ (Σχήμα 1.35β), το $A(x)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου στο διάστημα $[0, 3]$ συν το εμβαδόν του ορθογωνίου στο διάστημα $[3, x]$:

$$A(x) = \overbrace{\frac{1}{2}(3)(6)}^{\text{εμβαδόν του τριγώνου}} + \overbrace{(x - 3)(6)}^{\text{εμβαδόν του ορθογωνίου}} = 6x - 9.$$

Ως εκ τούτου, η συνάρτηση εμβαδού A (Σχήμα 1.36) ορίζεται με την κλαδική μορφή

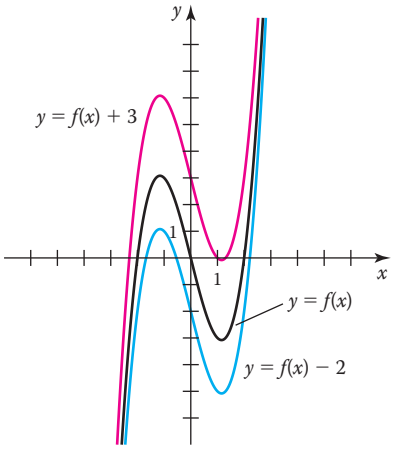
$$y = A(x) = \begin{cases} x^2 & \text{εάν } 0 \le x \le 3 \\ 6x - 9 & \text{εάν } x > 3. \end{cases}$$

Σχετικές ασκήσεις 39–42 ➤

Μετασχηματισμοί συναρτήσεων και γραφημάτων

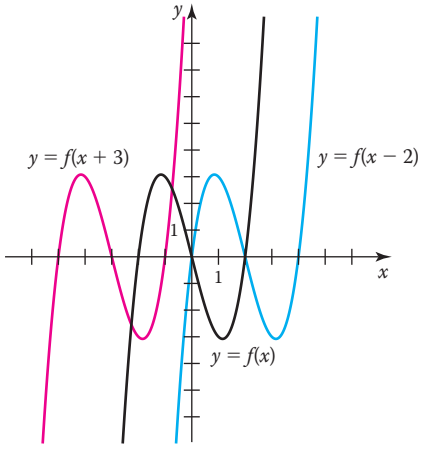
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να μετασχηματιστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ώστε να παραχθούν γραφήματα νέων συναρτήσεων. Τέσσερις είναι οι κοινοί μετασχηματισμοί: *παράλληλες μετατοπίσεις* στις κατευθύνσεις των x και y και *κλιμακώσεις* στις κατευθύνσεις των x και y. Αυτοί οι μετασχηματισμοί, που συνοψίζονται στα Σχήματα 1.37–1.42, μπορούν να εξοικονομήσουν χρόνο στη σχεδίαση γραφημάτων και στην απεικόνιση συναρτήσεων.

Η γραφική παράσταση της $y = f(x) + d$ είναι η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ μετατοπισμένη κατακόρυφα κατά d μονάδες (πάνω εάν $d > 0$ και κάτω εάν $d < 0$).



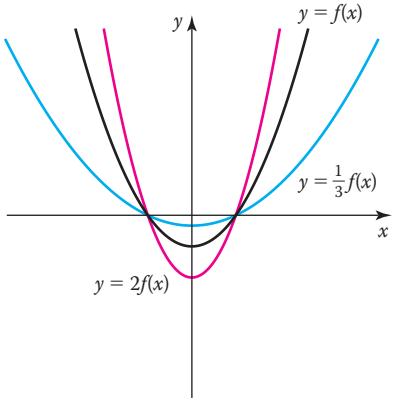
Σχήμα 1.37

Η γραφική παράσταση της $y = f(x - b)$ είναι η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ μετατοπισμένη οριζόντια κατά b μονάδες (δεξιά εάν $b > 0$ και αριστερά εάν $b < 0$).



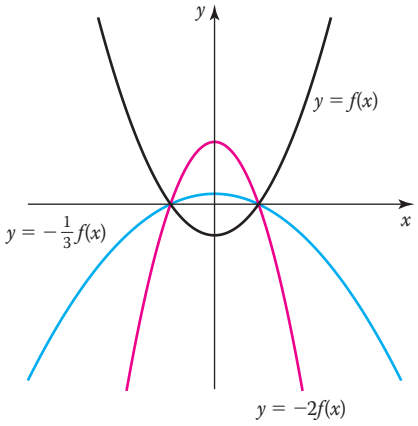
Σχήμα 1.38

Για $c > 0$, η γραφική παράσταση της $y = cf(x)$ είναι το γράφημα της $y = f(x)$ από την κλιμάκωσή της κατακόρυφα κατά έναν παράγοντα c (ευρύτερη εάν $0 < c < 1$ και στενότερη εάν $c > 1$).



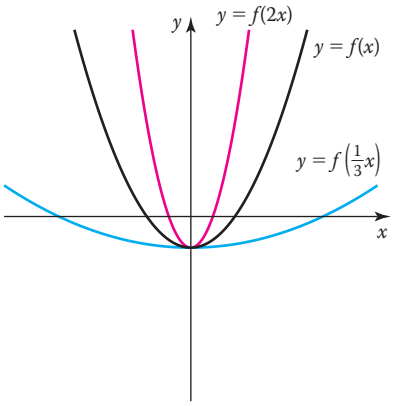
Σχήμα 1.39

Για $c < 0$, η γραφική παράσταση της $y = cf(x)$ είναι η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ από την κλιμάκωσή της κατακόρυφα κατά έναν παράγοντα $|c|$ και ανακλώμενη στον άξονα x (ευρύτερη εάν $-1 < c < 0$ και στενότερη εάν $c < -1$).



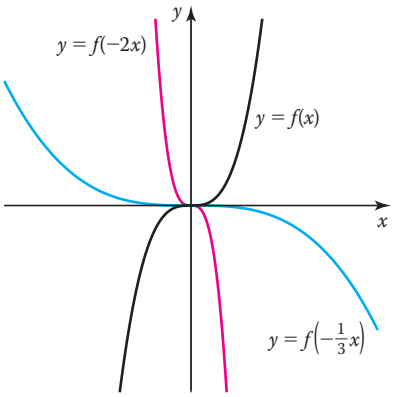
Σχήμα 1.40

Για $a > 0$, η γραφική παράσταση της $y = f(ax)$ είναι η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ από την κλιμάκωσή της οριζόντια κατά έναν παράγοντα a (ευρύτερη αν $0 < a < 1$ και στενότερη εάν $a > 1$).

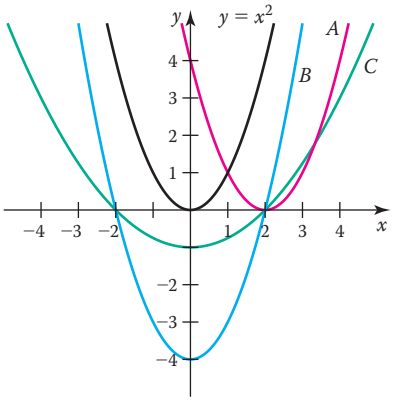


Σχήμα 1.41

Για $a < 0$, η γραφική παράσταση της $y = f(ax)$ είναι η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ από την κλιμάκωσή της οριζόντια κατά έναν παράγοντα $|a|$ και ανακλώμενη στον άξονα y (ευρύτερη εάν $-1 < a < 0$ και στενότερη εάν $a < -1$).



Σχήμα 1.42



Σχήμα 1.43

➤ Πρέπει να διαπιστώσετε ότι η γραφική παράσταση C αντιστοιχεί σε μια οριζόντια κλιμάκωση και σε μια κατακόρυφη μετατόπιση. Έχει την εξίσωση $y = f(ax) - 1$, όπου $a = \frac{1}{2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 **Μετατόπιση παραβολών** Τα γραφήματα A, B και Γ στο Σχήμα 1.43 προέρχονται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ χρησιμοποιώντας μετατοπίσεις και κλιμακώσεις. Βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει κάθε γράφημα.

ΛΥΣΗ

α. Το γράφημα A είναι η γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες. Παριστάνει τη συνάρτηση

$$f(x - 2) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

β. Το γράφημα B είναι η γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη προς τα κάτω κατά 4 μονάδες. Παριστάνει τη συνάρτηση

$$f(x) - 4 = x^2 - 4.$$

γ. Το γράφημα Γ αποτελεί μια ευρύτερη εκδοχή της γραφικής παράστασης της f μετατοπισμένη προς τα κάτω κατά 1 μονάδα. Ως εκ τούτου, παριστάνει την $cf(x) - 1 = cx^2 - 1$, για κάποια τιμή του c, με $0 < c < 1$ (επειδή το γράφημα διευρύνεται). Αξιοποιώντας το γεγονός ότι το γράφημα C διέρχεται από τα σημεία $(\pm 2, 0)$, βρίσκουμε ότι $c = \frac{1}{4}$. Συνεπώς, η γραφική παράσταση παριστάνει την

$$y = \frac{1}{4} f(x) - 1 = \frac{1}{4} x^2 - 1.$$

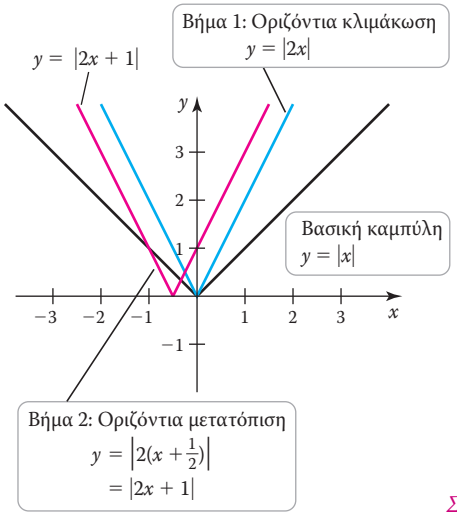
Σχετικές ασκήσεις 43–54 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 4 Πώς θα τροποποιήσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 1/x$, για να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $g(x) = 1/(x + 4)$; ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 **Κλιμάκωση και μετατόπιση** Σχεδιάστε το γράφημα της $g(x) = |2x + 1|$.

ΛΥΣΗ Γράφουμε τη συνάρτηση ως $g(x) = \left| 2(x + \frac{1}{2}) \right|$. Αν θέσουμε $f(x) = |x|$, έχουμε $g(x) = f(2(x + \frac{1}{2}))$. Επομένως, η γραφική παράσταση της g προέρχεται από την κλιμάκωση (με μεγάλη κλίση) της γραφικής παράστασης της f οριζόντια και η μετατόπιση είναι $\frac{1}{2}$ μονάδες προς τα αριστερά (Σχήμα 1.44).

➤ Σημειώστε ότι μπορούμε επίσης να γράψουμε $g(x) = 2\left|x + \frac{1}{2}\right|$, το οποίο σημαίνει ότι το γράφημα της g μπορεί επίσης να ληφθεί από μια κατακόρυφη κλιμάκωση και από μια οριζόντια μετατόπιση.



Σχήμα 1.44

Σχετικές ασκήσεις 43–54 ◄

ΠΕΡΙΛΗΨΗ Μετασχηματισμοί

Δεδομένων των πραγματικών αριθμών a, b, c και d και της συνάρτησης f, η γραφική παράσταση της $y = cf(a(x - b)) + d$ μπορεί να ληφθεί από τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ με τα ακόλουθα βήματα.

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{από έναν παράγοντα } |a|]{\text{οριζόντια κλιμάκωση}} y = f(ax)$$

$$\xrightarrow[\text{κατά } b \text{ μονάδες}]{\text{οριζόντια μετατόπιση}} y = f(a(x - b))$$

$$\xrightarrow[\text{από έναν παράγοντα } |c|]{\text{κατακόρυφη κλιμάκωση}} y = cf(a(x - b))$$

$$\xrightarrow[\text{κατά } d \text{ μονάδες}]{\text{κατακόρυφη μετατόπιση}} y = cf(a(x - b)) + d$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Δώστε τέσσερις τρόπους με τους οποίους οι συναρτήσεις μπορούν να οριστούν και να παρασταθούν γραφικά.

2. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού ενός πολυωνύμου;

3. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού μιας ρητής συνάρτησης;

4. Περιγράψτε τι σημαίνει μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση.

5. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $y = x^5$.

6. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $y = x^{1/5}$.

7. Πώς μπορείτε να πάρετε το γράφημα της $y = f(x + 2)$ από το γράφημα της $y = f(x)$;

8. Πώς μπορείτε να πάρετε το γράφημα της $y = -3f(x)$ από τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$;

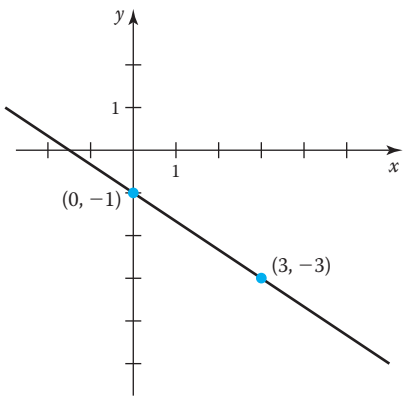
9. Πώς μπορείτε να πάρετε το γράφημα της $y = f(3x)$ από τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$;

10. Πώς μπορείτε να πάρετε το γράφημα της $y = 4(x + 3)^2 + 6$ από τη γραφική παράσταση της $y = x^2$;

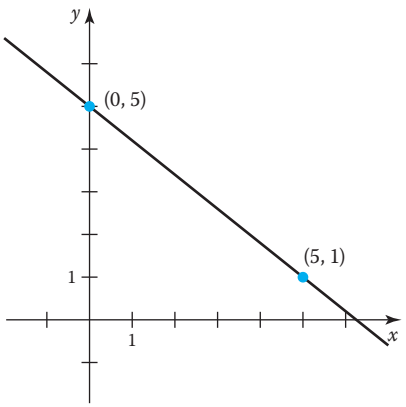
Βασικές δεξιότητες

11–12. Γραφήματα συναρτήσεων *Βρείτε τις γραμμικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στα ακόλουθα διαγράμματα.*

11.



12.



13. Γραφική παράσταση μιας γραμμικής συνάρτησης Βρείτε και σχεδιάστε τη γραμμική συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία $(1, 3)$ και $(2, 5)$.

14. Γραφική παράσταση μιας γραμμικής συνάρτησης Βρείτε και σχεδιάστε τη γραμμική συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία $(2, -3)$ και $(5, 0)$.

15. Συνάρτηση ζήτησης Αρχεία πωλήσεων δείχνουν ότι, εάν οι συσκευές αναπαραγωγής Blu-ray τιμώνται \$250, τότε ένα μεγάλο κατάστημα πουλάει κατά μέσο όρο 12 μονάδες τη μέρα. Εάν τιμώνται \$200, τότε το κατάστημα πουλάει κατά μέσο όρο 15 μονάδες τη μέρα. Βρείτε και σχεδιάστε τη γραμμική συνάρτηση ζήτησης για τις πωλήσεις συσκευών Blu-ray. Για ποιες τιμές ορίζεται η συνάρτηση ζήτησης;

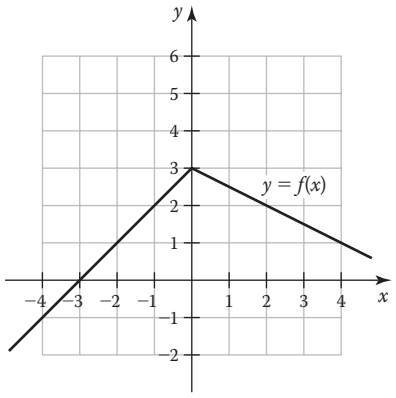
16. Έρανος Η Λέσχη Βιολογίας σχεδιάζει να κάνει μια γιορτή για φιλανθρωπικούς σκοπούς με τιμή εισιτηρίου \$8. Το κόστος της ενοικίασης χώρου και αγοράς αναψυκτικών είναι \$175. Βρείτε και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $p = f(n)$ που δίνει το κέρδος από τη γιορτή εάν πουληθούν n εισιτήρια. Σημειώστε ότι $f(0) = -\$175$, δηλαδή το κόστος της ενοικίασης χώρου και αγοράς αναψυκτικών που πρέπει να καταβληθεί ανεξάρτητα από τον αριθμό των εισιτηρίων που θα πουληθούν. Πόσα εισιτήρια πρέπει να πουληθούν, για να ισοσκελιστεί το έξοδο (μηδενικό κέρδος);

17. **Συνάρτηση πληθυσμού** Ο πληθυσμός μιας μικρής πόλης ήταν 500 άτομα το 2015 και αυξάνεται με ρυθμό 24 ατόμων κάθε χρόνο. Βρείτε και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $p(t)$ γραμμικής συνάρτησης του πληθυσμού που δίνει τον πληθυσμό της πόλης σε t έτη μετά το 2015. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε αυτό το μοντέλο για να προβλέψετε τον πληθυσμό το 2030.

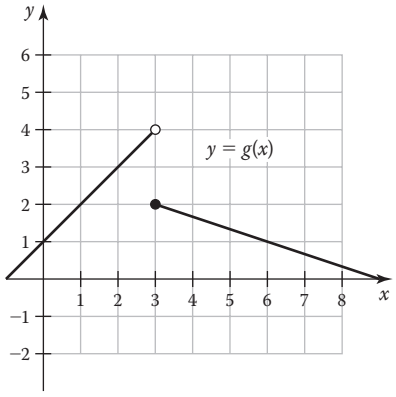
18. **Τέλη ταξί** Μια διαδρομή με ταξί κοστίζει \$3.50 συν \$2.50 ανά μίλι. Έστω m η απόσταση (σε μίλια) από το αεροδρόμιο προς ένα ξενοδοχείο. Βρείτε και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $c(m)$ που παριστάνει το κόστος της διαδρομής με ταξί από το αεροδρόμιο προς το ξενοδοχείο. Επίσης, καθορίστε πόσο κοστίζει, εάν το ξενοδοχείο απέχει 9 μίλια από το αεροδρόμιο.

19–20. Γραφήματα των κλαδικών συναρτήσεων *Διατυπώστε τον ορισμό των συναρτήσεων των οποίων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις.*

19.



20.



21. **Τέλη στάθμευσης** Υποθέστε ότι, για να παρκάρετε στο αεροδρόμιο, σας κοστίζει 5¢ ανά λεπτό, με το κόστος να μειώνεται σε 3¢ ανά λεπτό μετά τις 9 μ.μ. Βρείτε και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης κόστους $c(t)$ για τιμές του t που ικανοποιούν την $0 \le t \le 120$. Υποθέστε ότι t είναι ο αριθμός των λεπτών μετά τις 8 μ.μ.

22. **Τέλη ταξί** Μια διαδρομή με ταξί κοστίζει \$3.50 συν \$2.50 ανά μίλι για τα πρώτα 5 μίλια, με το κόστος να μειώνεται σε \$1.50 ανά μίλι μετά το πέμπτο μίλι. Εάν m είναι η απόσταση (σε μίλια) από το αεροδρόμιο προς ένα ξενοδοχείο, βρείτε και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της κατά τμήματα γραμμικής συνάρτησης $c(m)$, που παριστάνει το κόστος της διαδρομής με ταξί από το αεροδρόμιο σε ένα ξενοδοχείο που βρίσκεται m μίλια μακριά.

23–28. Κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις *Σχεδιάστε τα γραφήματα των ακόλουθων συναρτήσεων.*

23. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1} & \text{εάν } x \neq 1 \\ 2 & \text{εάν } x = 1 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{εάν } x \neq 2 \\ 4 & \text{εάν } x = 2 \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{εάν } x \le 0 \\ -2x + 1 & \text{εάν } x > 0 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{εάν } x < 1 \\ x + 1 & \text{εάν } x \ge 1 \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{εάν } x < -1 \\ 1 & \text{εάν } -1 \le x \le 1 \\ 2x - 1 & \text{εάν } x > 1 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{εάν } x < 0 \\ x + 2 & \text{εάν } 0 \le x \le 2 \\ 3 - x/2 & \text{εάν } x > 2 \end{cases}$

T 29–34. Γραφήματα συναρτήσεων

α. *Χρησιμοποιήστε μια εφαρμογή γραφικών για να σχεδιάσετε ένα γράφημα της δοθείσας συνάρτησης. Πειραματιστείτε σε διαφορετικά πλαίσια, για να δείτε πώς το γράφημα αλλάζει σε διαφορετικές κλίμακες. Σχεδιάστε ένα ακριβές γράφημα με το χέρι μετά τη χρήση της εφαρμογής γραφικών.*

β. *Δώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.*

γ. *Αναζητήστε τα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά της συνάρτησης, όπως κορυφές, κοιλάδες και σημεία τομής με τους άξονες (όπως στο Παράδειγμα 5).*

29. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6$

30. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 8}$

31. $g(x) = \left|\dfrac{x^2 - 4}{x + 3}\right|$

32. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2 - 12}}{x + 1}$

33. $f(x) = 3 - |2x - 1|$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 1|}{x - 1} & \text{εάν } x \neq 1 \\ 0 & \text{εάν } x = 1 \end{cases}$

35–38. Συναρτήσεις κλίσης *Προσδιορίστε τη συνάρτηση κλίσης για τις ακόλουθες συναρτήσεις.*

35. $f(x) = 2x + 1$

36. $f(x) = |x|$

37. Χρησιμοποιήστε το σχήμα της Άσκησης 19.

38. Χρησιμοποιήστε το σχήμα της Άσκησης 20.

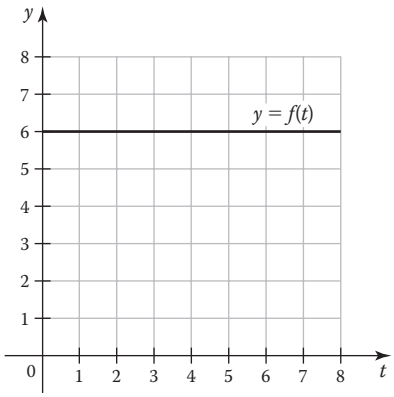
39–42. Συναρτήσεις εμβαδού *$A(x)$ είναι το εμβαδόν της περιοχής που οριοθετείται από τον άξονα t και τη γραφική παράσταση της $y = f(t)$, με $t = 0$ έως $t = x$. Εξετάστε τις ακόλουθες συναρτήσεις και τα γραφήματα.*

α. *Βρείτε το $A(2)$.*

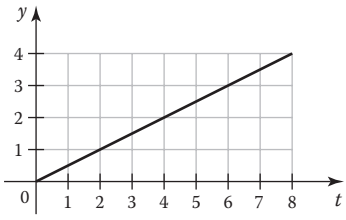
β. *Βρείτε $A(6)$.*

γ. *Βρείτε έναν τύπο για το $A(x)$.*

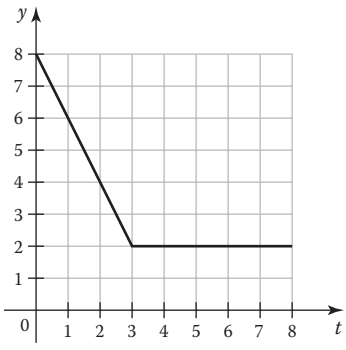
39. $f(t) = 6$



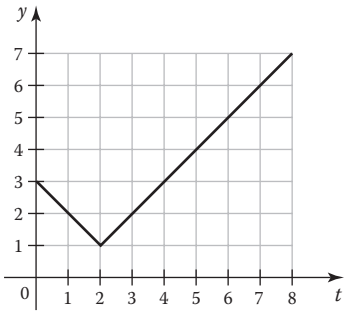
40. $f(t) = \dfrac{t}{2}$



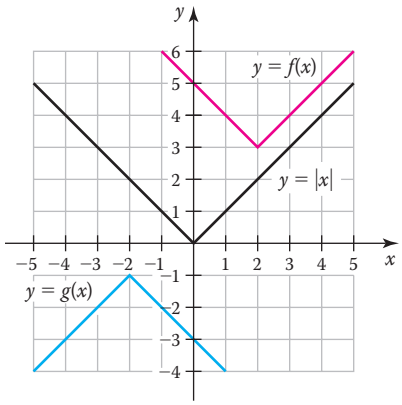
41. $f(t) = \begin{cases} -2t + 8 & \text{εάν } t \leq 3 \\ 2 & \text{εάν } t > 3 \end{cases}$



42. $f(t) = |t - 2| + 1$



43. **Μετασχηματισμοί της $y = |x|$** Οι συναρτήσεις f και g στο σχήμα εμφανίζονται με κάθετες και με οριζόντιες μετατοπίσεις και με κλιμάκωση της $y = |x|$. Βρείτε τύπους για τις f και g. Επιβεβαιώστε τις απαντήσεις σας με μια εφαρμογή γραφικών.

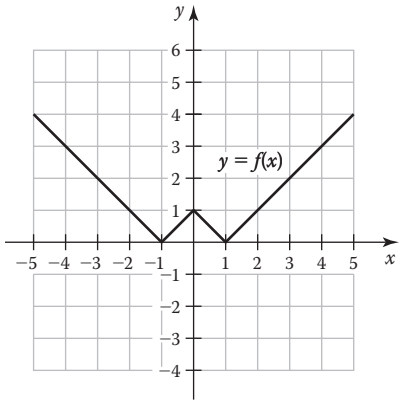


44. **Μετασχηματισμοί** Χρησιμοποιήστε το γράφημα της f στο σχήμα, για να σχεδιάσετε τις ακόλουθες συναρτήσεις.

α. $y = -f(x)$ **β.** $y = f(x + 2)$

γ. $y = f(x - 2)$ **δ.** $y = f(2x)$

ε. $y = f(x - 1) + 2$ **στ.** $y = 2f(x)$



45. **Μετασχηματισμοί της $f(x) = x^2$** Χρησιμοποιήστε μετατοπίσεις και κλιμακώσεις, για να μετασχηματίσετε το γράφημα της $f(x) = x^2$ στο γράφημα της g. Χρησιμοποιήστε μια εφαρμογή γραφικών, για να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας.

α. $g(x) = f(x - 3)$ **β.** $g(x) = f(2x - 4)$

γ. $g(x) = -3f(x - 2) + 4$ **δ.** $g(x) = 6f\left(\dfrac{x - 2}{3}\right) + 1$

46. **Μετασχηματισμοί της $f(x) = \sqrt{x}$** Χρησιμοποιήστε μετατοπίσεις και κλιμακώσεις, για να μετασχηματίσετε το γράφημα της $f(x) = \sqrt{x}$ στο γράφημα της g. Χρησιμοποιήστε μια εφαρμογή γραφικών, για να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας.

α. $g(x) = f(x + 4)$ **β.** $g(x) = 2f(2x - 1)$

γ. $g(x) = \sqrt{x - 1}$ **δ.** $g(x) = 3\sqrt{x - 1} - 5$

T **47–54. Μετατόπιση και κλιμάκωση** *Χρησιμοποιήστε μετατοπίσεις και κλιμακώσεις, για να σχεδιάσετε το γράφημα των δοσμένων συναρτήσεων. Στη συνέχεια, ελέγξτε την εργασία σας με εφαρμογή γραφικών. Βεβαιωθείτε ότι έχετε προσδιορίσει μια αρχική συνάρτηση στην οποία εφαρμόζονται μετατοπίσεις και κλιμακώσεις.*

47. $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

48. $f(x) = x^2 - 2x + 3$
(*Υπόδειξη:* Συμπληρώστε πρώτα το τετράγωνο.)

49. $g(x) = -3x^2$

50. $g(x) = 2x^3 - 1$

51. $g(x) = 2(x + 3)^2$

52. $p(x) = x^2 + 3x - 5$

53. $h(x) = -4x^2 - 4x + 12$

54. $h(x) = |3x - 6| + 1$

Περαιτέρω διερευνήσεις

55. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Διερευνήστε εάν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια εξήγηση ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Όλα τα πολυώνυμα είναι ρητές συναρτήσεις, αλλά όλες οι ρητές συναρτήσεις δεν είναι πολυώνυμα.

β. Εάν η f είναι μια γραμμική πολυωνυμική, τότε η $f \circ f$ είναι ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο.

γ. Εάν τα f και g είναι πολυώνυμα, τότε οι βαθμοί των $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσοι.

δ. Για να σχεδιάσετε το γράφημα της $g(x) = f(x + 2)$, μετατοπίστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f 2 μονάδες προς τα δεξιά.

56–57. Προβλήματα τομών *Χρησιμοποιήστε τις αναλυτικές μεθόδους, για να βρείτε τα σημεία τομής. Χρησιμοποιήστε μια εφαρμογή γραφικών, για να ελέγξετε τα συμπεράσματά σας.*

56. Βρείτε το σημείο ή τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2 + 2$ και της ευθείας $y = x + 4$.

57. Βρείτε το σημείο ή τα σημεία τομής των παραβολών $y = x^2$ και $y = -x^2 + 8x$.

58–59. Συναρτήσεις από πίνακες *Βρείτε μια απλή συνάρτηση που να ταιριάζει στα δεδομένα των πινάκων.*

58.

x	y
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

59.

x	y
0	-1
1	0
4	1
9	2
16	3

T **60–63. Συναρτήσεις από διατυπώσεις** *Βρείτε έναν τύπο για μια συνάρτηση που να περιγράφει τη δεδομένη κατάσταση. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και δώστε ένα πεδίο ορισμού που να έχει νόημα για το πρόβλημα. Υπενθυμίζουμε ότι κινούμενοι με σταθερή ταχύτητα, ισχύει απόσταση = ταχύτητα · χρόνος που έχει παρέλθει.*

60. Μια συνάρτηση $y = f(x)$, τέτοια ώστε το y να είναι κατά 1 μικρότερο από τον κύβο του x.

61. Δύο αυτοκίνητα έχουν αφήσει έναν κόμβο ταυτόχρονα, με το ένα να ταξιδεύει βόρεια με 30 mi/hr και το άλλο ανατολικά με 60 mi/hr. Η συνάρτηση $s(t)$ είναι η απόσταση μεταξύ των αυτοκινήτων σε t ώρες μετά την αναχώρησή τους από τον κόμβο.

62. Μια συνάρτηση $y = f(x)$, τέτοια ώστε, εάν οδηγήσετε ένα ποδήλατο για 50 μίλια με x μίλια ανά ώρα, θα φτάσετε στον προορισμό σας σε y ώρες.

63. Μια συνάρτηση $y = f(x)$, τέτοια ώστε, εάν το αυτοκίνητό σας καταναλώνει 32 mi/gal και το κόστος της βενζίνης είναι \$$x$/gal, τότε \$ 100 είναι το κόστος ενός ταξιδιού y-mi.

64. Συνάρτηση μέγιστου ακεραίου Η συνάρτηση μέγιστου ακεραίου $f(x) = \lfloor x \rfloor$ δίνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος από ή ίσος με x. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης μέγιστου ακεραίου, για $-3 \le x \le 3$.

65. Συνάρτηση ελάχιστου ακεραίου Η συνάρτηση ελάχιστου ακεραίου $f(x) = \lceil x \rceil$ δίνει τον μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με x. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ελάχιστου ακεραίου, για $-3 \le x \le 3$.

66. Πριονωτή κυματομορφή Σχεδιάστε το γράφημα της πριονωτής κυματομορφής που ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ x + 1 & \text{εάν } -1 \le x < 0 \\ x & \text{εάν } 0 \le x < 1 \\ x - 1 & \text{εάν } 1 \le x < 2 \\ x - 2 & \text{εάν } 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

67. Τετραγωνική κυματομορφή Σχεδιάστε το γράφημα της τετραγωνικής κυματομορφής που ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x < 0 \\ 1 & \text{εάν } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{εάν } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{εάν } 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

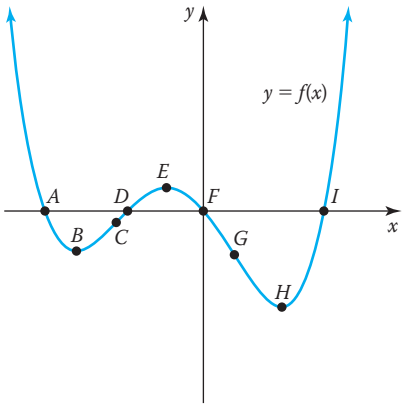
68–70. Ρίζες και δυνάμεις *Σχεδιάστε ένα γράφημα για τα δοσμένα ζεύγη συναρτήσεων. Βεβαιωθείτε ότι σχεδιάσατε τις γραφικές παραστάσεις με ακρίβεια μεταξύ τους.*

68. $y = x^4$ και $y = x^6$

69. $y = x^3$ και $y = x^7$

70. $y = x^{1/3}$ και $y = x^{1/5}$

71. Χαρακτηριστικά ενός γραφήματος Θεωρήστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που φαίνεται στο σχήμα. Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις για τα σημεία A–I.



α. Ποια σημεία αντιστοιχούν στις ρίζες (λύσεις) της f;

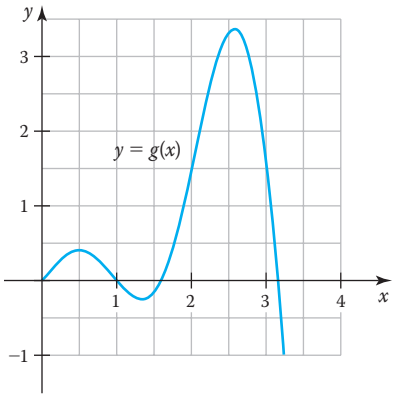
β. Ποια σημεία στο γράφημα αντιστοιχούν στα υψηλά σημεία ή κορυφές (που σύντομα θα ονομαστούν *τοπικά μέγιστα* της f);

γ. Ποια σημεία στο γράφημα αντιστοιχούν στα χαμηλά σημεία ή κοιλάδες (που σύντομα θα ονομαστούν *τοπικά ελάχιστα* της f);

δ. Καθώς κινείστε κατά μήκος της καμπύλης προς τη θετική κατεύθυνση του x, σε ποιο σημείο το γράφημα έχει ταχύτερη άνοδο;

ε. Καθώς κινείστε κατά μήκος της καμπύλης προς τη θετική κατεύθυνση του x, σε ποιο σημείο το γράφημα έχει ταχύτερη κάθοδο;

72. Χαρακτηριστικά ενός γραφήματος Θεωρήστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g που φαίνεται στο σχήμα.



α. Δώστε κατά προσέγγιση τις ρίζες (λύσεις) της g.
β. Δώστε κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες των υψηλών σημείων ή κορυφών (που σύντομα θα ονομαστούν *τοπικά μέγιστα* της f).
γ. Δώστε κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες των χαμηλών σημείων ή κοιλάδων (που σύντομα θα ονομαστούν *τοπικά ελάχιστα* της f).
δ. Θεωρήστε ότι κινείστε κατά μήκος της καμπύλης προς τη θετική κατεύθυνση του x στο διάστημα $[0, 3]$. Δώστε κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η γραφική παράσταση έχει ταχύτερη άνοδο.
ε. Θεωρήστε ότι κινείστε κατά μήκος της καμπύλης προς τη θετική κατεύθυνση του x στο διάστημα $[0, 3]$. Δώστε κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η γραφική παράσταση έχει ταχύτερη κάθοδο.

Εφαρμογές

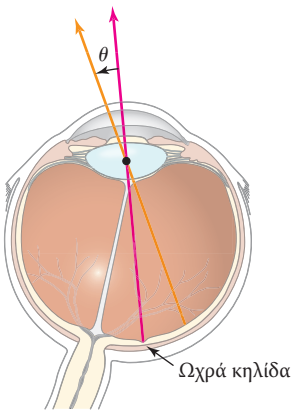
T **73. Σχετική οξύτητα του ανθρώπινου ματιού** Η **ωχρά κηλίδα** είναι υπεύθυνη για την οξεία κεντρική όραση που οι άνθρωποι χρησιμοποιούν για να διαβάζουν και για άλλες λεπτομέρειες προσανατολισμού της όρασης. Η σχετική οξύτητα του ανθρώπινου ματιού, η οποία μετρά την οξύτητα της όρασης, μοντελοποιείται από τη συνάρτηση

$$R(\theta) = \frac{0.568}{0.331|\theta| + 0.568},$$

όπου θ (σε μοίρες) είναι η γωνιακή απόκλιση της γραμμής της όρασης από το κέντρο της ωχράς κηλίδας (βλ. σχήμα).

α. Σχεδιάστε το γράφημα R, για $-15 \le \theta \le 15$.
β. Για ποια τιμή του θ μεγιστοποιείται το R; Τι σημαίνει αυτό το γεγονός για την όρασή μας;
γ. Για ποιες τιμές του θ διατηρούμε τουλάχιστον το 90% της μέγιστης σχετικής οξύτητάς μας;

(*Πηγή: The Journal of Experimental Biology*, 203, Δεκ. 2000)



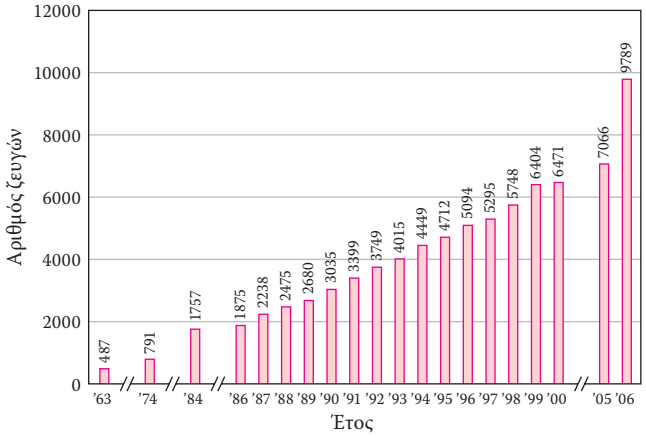
74. Πιθανότητες στο τένις Ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να κερδίσει πόντο ένας παίκτης που κάνει σερβίς σε έναν αγώνα τένις είναι μια σταθερά p, με $0 \le p \le 1$. Τότε η πιθανότητα να κερδίσει ένα παιχνίδι ο παίκτης που κάνει σερβίς, όταν χρειάζεται μόνο δύο πόντους για να κερδίσει το παιχνίδι, είναι

$$f(p) = \frac{p^2}{1 - 2p(1 - p)}.$$

α. Βρείτε το $f(0.75)$ και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.
β. Βρείτε το $f(0.25)$ και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.
(*Πηγή: The College Mathematics Journal* 38, 1, Ιαν. 2007)

75. Πληθυσμός θαλασσαετών Μετά την απαγόρευση του DDT και τον νόμο για τα απειλούμενα είδη που ψηφίστηκε το 1973, ο αριθμός των θαλασσαετών στις Ηνωμένες Πολιτείες αυξήθηκε δραματικά (βλ. σχήμα). Στις 48 ηπειρωτικές πολιτείες, ο αριθμός των αναπαραγωγικών ζευγών των θαλασσαετών αυξήθηκε με σχεδόν γραμμικό ρυθμό από τα 1875 ζεύγη το 1986 στα 6471 ζεύγη το 2000.

α. Χρησιμοποιήστε τα σημεία δεδομένων για τα έτη 1986 και 2000, για να βρείτε μια γραμμική συνάρτηση p που να μοντελοποιεί τον αριθμό των αναπαραγωγικών ζευγών από το 1986 έως το 2000 $(0 \le t \le 14)$.
β. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του (α), πόσα περίπου ζεύγη αναπαραγωγής υπήρχαν στις 48 ηπειρωτικές πολιτείες το 1995;



(*Πηγή:* U.S. Fish and Wildlife Service)

76. Κλίμακες θερμοκρασίας

α. Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση $C = f(F)$ που εμφανίζει την αντιστοίχιση της ένδειξης στην κλίμακα θερμοκρασίας Celsius με την ένδειξη στην κλίμακα θερμοκρασίας Fahrenheit. Πάρτε ως δεδομένο ότι $C = 0$ όταν $F = 32$ (σημείο πάγου) και $C = 100$ όταν $F = 212$ (σημείο βρασμού).
β. Σε ποια θερμοκρασία είναι ίσες οι ενδείξεις στις δύο κλίμακες;

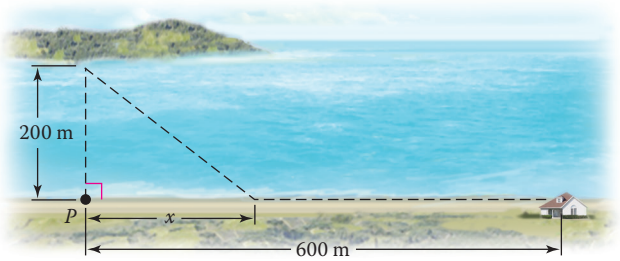
77. Αγορά ή μίσθωση αυτοκινήτου Ένας πωλητής αυτοκινήτων κάνει μια πρόταση αγοράς και μια πρόταση μίσθωσης (leasing) για όλα τα καινούρια αυτοκίνητα. Υποθέστε ότι ενδιαφέρεστε για ένα αυτοκίνητο που μπορεί να αγοραστεί και να εξοφληθεί για $25000 ή να μισθωθεί με προκαταβολή $1200 και με μηνιαίες δόσεις των $350.

α. Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση $y = f(m)$ που δίνει το ολικό ποσό το οποίο πρέπει να πληρώσετε στην περίπτωση της ενοικίασης ύστερα από m μήνες.
β. Στην περίπτωση της ενοικίασης, ύστερα από 48 μήνες (4 χρόνια), το αυτοκίνητο θα έχει μειωμένη αξία $10000, η οποία αντιστοιχεί στο ποσό που θα μπορούσατε να πληρώσετε για να το αγοράσετε. Εάν υποθέσετε ότι δεν υπάρχουν άλλες επιβαρύνσεις, σας συμφέρει να αγοράσετε ή να μισθώσετε;

78. Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $S = 4\pi r^2$. Βρείτε το r συναρτήσει του S και σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης της ακτίνας για $S \ge 0$.

T **79. Όγκος σφαιρικού κυπέλλου** Μια τομή μιας σφαίρας ακτίνας r με ένα επίπεδο παράγει ένα σφαιρικό *κύπελλο*. Εάν το πάχος του κυπέλλου είναι h, τότε ο όγκος του είναι $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$. Σχεδιάστε το γράφημα του όγκου ως συνάρτηση του h για μια σφαίρα ακτίνας 1. Για ποιες τιμές του h ορίζεται αυτή η συνάρτηση;

T **80. Πεζοπορία και κωπηλασία** Η Kelly επιστρέφει στο παραλιακό της σπίτι από μια εκδρομή σε ένα νησί που απέχει 200 m από την ακτή (βλ. σχήμα). Το σπίτι απέχει 600 m από το σημείο P της ακτής που είναι το πλησιέστερο στο νησί. Σχεδιάζει να κωπηλατήσει ως ένα σημείο της ακτής που απέχει x μέτρα από το P και στη συνέχεια να τρέξει κατά μήκος της ακτής ως το σπίτι.



α. Έστω $d(x)$ το ολικό μήκος της διαδρομής της ως συνάρτηση του x. Βρείτε τη συνάρτηση και σχεδιάστε το γράφημά της.

β. Υποθέστε ότι η Kelly μπορεί να κωπηλατεί 2 m/s και να τρέχει 4 m/s. Εάν $T(x)$ είναι ο ολικός χρόνος της διαδρομής της ως συνάρτηση του x, βρείτε τη συνάρτηση και σχεδιάστε το γράφημα της $y = T(x)$.

γ. Με βάση το γράφημα του (β), εκτιμήστε το σημείο της ακτής στο οποίο θα πρέπει να αποβιβαστεί η Kelly ώστε να ελαχιστοποιήσει τον συνολικό χρόνο της διαδρομής της. Ποιος θα είναι αυτός ο ελάχιστος χρόνος;

T **81. Ιδανικά κιβώτια** Θεωρήστε ένα κιβώτιο χωρίς καπάκι, με ύψος h και τετράγωνη βάση πλευράς x. Το κιβώτιο πρέπει να έχει όγκο 125 ft^3.

α. Βρείτε τη συνάρτηση $S(x)$ που εκφράζει την επιφάνεια του κιβωτίου, για όλες τις θετικές τιμές του x, και σχεδιάστε το γράφημά της.

β. Με βάση το γράφημα του (α), εκτιμήστε την τιμή του x για το κιβώτιο με τη μικρότερη επιφάνεια.

Πρόσθετες ασκήσεις

82. Σύνθεση πολυωνύμων Έστω f ένα πολυώνυμο n-οστού βαθμού και g ένα πολυώνυμο m-οστού βαθμού. Ποιος είναι ο βαθμός των ακόλουθων πολυωνύμων;

α. $f \cdot f$ **β.** $f \circ f$ **γ.** $f \cdot g$ **δ.** $f \circ g$

83. Ιδιότητα της κορυφής μιας παραβολής Αποδείξτε ότι αν μια παραβολή τέμνει τον άξονα x σε δύο σημεία, η τετμημένη της κορυφής της βρίσκεται στο μέσον της απόστασης των τετμημένων των σημείων τομής.

84. Ιδιότητες της παραβολής Θεωρήστε τη γενική μορφή της δευτεροβάθμιας συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, με $a \neq 0$.

α. Βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της συναρτήσει των a, b, c.

β. Βρείτε τη συνθήκη που ικανοποιούν τα a, b, c ώστε η γραφική παράσταση της f να τέμνει τον άξονα x σε δύο σημεία.

T **85. Παραγοντική συνάρτηση** Η παραγοντική συνάρτηση ορίζεται για θετικούς αριθμούς ως $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

α. Φτιάξτε έναν πίνακα της παραγοντικής συνάρτησης για $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

β. Σχεδιάστε το γράφημα αυτών των σημείων και στη συνέχεια συνδέστε τα με μια λεία καμπύλη.

γ. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του n για την οποία $n! > 10^6$;

T **86. Άθροισμα ακεραίων** Έστω $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$, όπου n ένας θετικός ακέραιος. Αποδεικνύεται ότι $S(n) = n(n+1)/2$.

α. Φτιάξτε έναν πίνακα της $S(n)$, για $n = 1, 2, \ldots, 10$.

β. Πώς θα περιγράφατε το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

γ. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του n για την οποία $S(n) > 1000$;

T **87. Άθροισμα τετραγώνων ακεραίων** Έστω $T(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, όπου n ένας θετικός ακέραιος. Αποδεικνύεται ότι $T(n) = n(n+1)(2n+1)/6$.

α. Φτιάξτε έναν πίνακα της $T(n)$, για $n = 1, 2, \ldots, 10$.

β. Πώς θα περιγράφατε το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

γ. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του n για την οποία $T(n) > 1000$;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΡΗΓΟΡΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

1. Ναι, όχι **2.** $(-\infty, \infty) \cdot [0, \infty)$ **3.** Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, \infty)$. Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών είναι το $[0, \infty)$. **4.** Μετατοπίστε το γράφημα της f οριζοντίως 4 μονάδες προς τα αριστερά. ◀

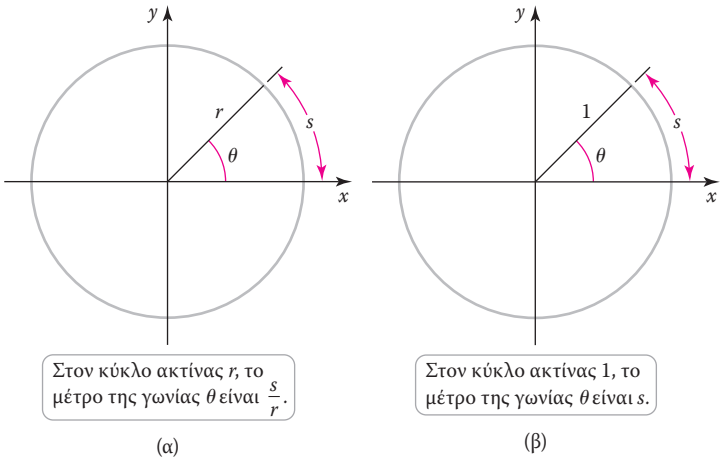
1.3 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αυτή η ενότητα αποτελεί μια επισκόπηση όσων πρέπει να γνωρίζετε για να μελετήσετε τον Απειροστικό Λογισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Μοίρες	Ακτίνια (rad)
0	0
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
120	$2\pi/3$
135	$3\pi/4$
150	$5\pi/6$
180	π

Μέτρηση ακτινίων

Ο Απειροστικός Λογισμός απαιτεί οι γωνίες να υπολογίζονται σε **ακτίνια** (rad). Σε έναν κύκλο με ακτίνα r, το μέτρο σε ακτίνια μιας γωνίας θ είναι το μήκος s του τόξου που αντιστοιχεί στη γωνία θ διά την ακτίνα του κύκλου (Σχήμα 1.45α). Εάν ο κύκλος είναι μοναδιαίος ($r = 1$), το μέτρο σε ακτίνια μιας γωνίας θ είναι το μήκος s του τόξου που αντιστοιχεί στη γωνία θ (Σχήμα 1.45β). Για παράδειγμα, το μήκος ενός πλήρους κύκλου είναι 2π. Οπότε, μια γωνία με μέτρο π αντιστοιχεί στο μισό ενός κύκλου ($\theta = 180°$) και μια γωνία με μέτρο $\pi/2$ αντιστοιχεί στο τέταρτο ενός κύκλου ($\theta = 90°$).

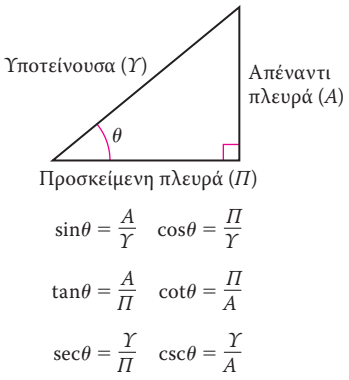


Σχήμα 1.45

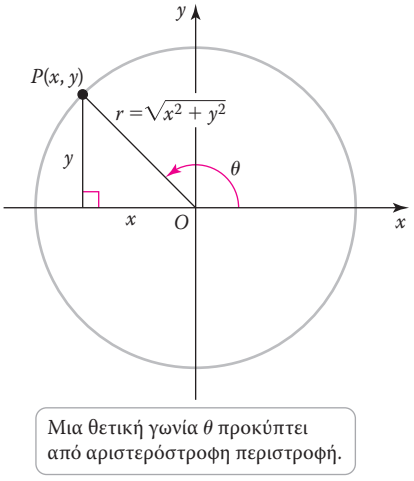
ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Ποιο είναι το μέτρο σε ακτίνια μιας γωνίας 270°; Ποιο είναι το μέτρο σε μοίρες μιας γωνίας $5\pi/4$-rad; ◄

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Για οξείες γωνίες, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται ως λόγοι των μηκών των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου (Σχήμα 1.46). Για να επεκτείνουμε αυτούς τους ορισμούς με σκοπό να συμπεριλάβουμε όλες τις γωνίες, εργαζόμαστε σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με έναν κύκλο που έχει ακτίνα r και κέντρο την αρχή των αξόνων. Έστω $P(x, y)$ ένα σημείο του κύκλου. Μια γωνία θ λέμε ότι βρίσκεται στην **αρχική θέση** εάν η αρχική της πλευρά βρίσκεται στον θετικό άξονα x και η τελική της πλευρά είναι το ευθύγραμμο τμήμα OP μεταξύ της αρχής των αξόνων και του P. Μια γωνία είναι θετική εάν δημιουργείται με αριστερόστροφη περιστροφή από τον θετικό ημιάξονα (Σχήμα 1.47). Εάν οι ορισμοί που αναφέρθηκαν στο ορθογώνιο τρίγωνο του Σχήματος 1.46 χρησιμοποιηθούν στο ορθογώνιο τρίγωνο του Σχήματος 1.47, τότε οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μπορούν να εκφραστούν ως προς x, y, και η ακτίνα του κύκλου να είναι $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Σχήμα 1.46



Σχήμα 1.47

➤ Όταν εργαζόμαστε στον μοναδιαίο κύκλο ($r = 1$), οι ορισμοί αυτοί γίνονται

$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{y}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

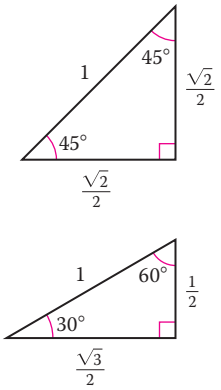
Εάν $P(x, y)$ είναι ένα σημείο ενός κύκλου με ακτίνα r και μια γωνία θ του κύκλου, τότε

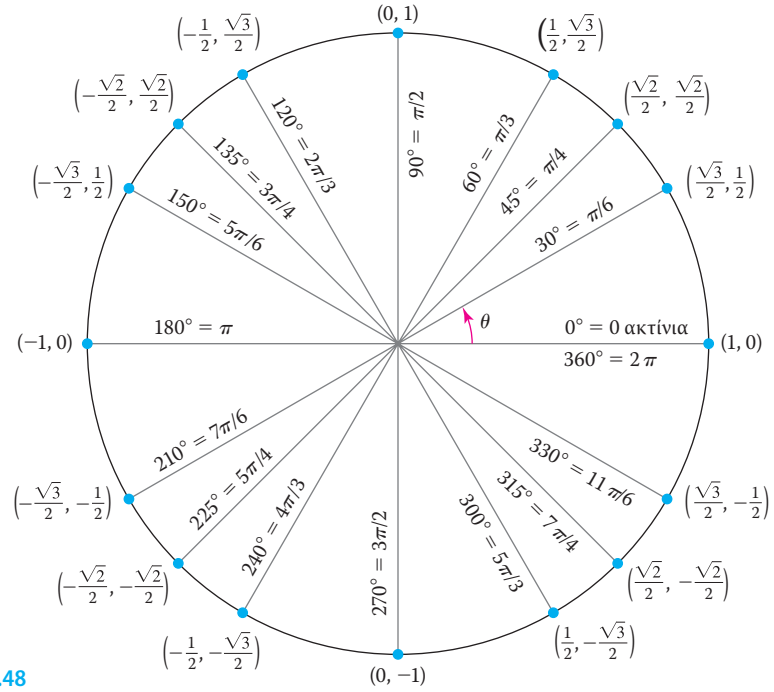
$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y}, \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}.$$

Για να βρούμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις των βασικών γωνιών (πολλαπλάσια των 30° και 45°), είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε το μέτρο σε ακτίνια αυτών των γωνιών και τις συντεταγμένες των αντίστοιχων σημείων στον μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 1.48).

➤ **Βασικά τρίγωνα**



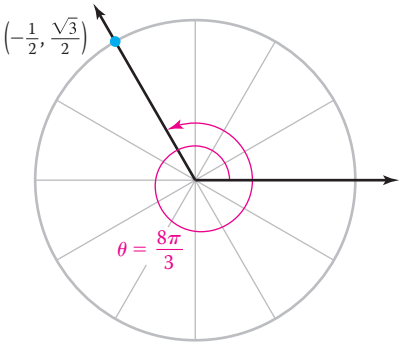


Σχήμα 1.48

Συνδυάζοντας τους ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τις συντεταγμένες που εμφανίζονται στο Σχήμα 1.48, μπορούμε να βρούμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις οποιασδήποτε βασικής γωνίας. Για παράδειγμα,

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \tan\frac{3\pi}{2} \text{ δεν ορίζεται,}$$

$$\cot\frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \sec\frac{7\pi}{4} = \sqrt{2}, \qquad \csc\frac{3\pi}{2} = -1, \qquad \sec\frac{\pi}{2} \text{ δεν ορίζεται.}$$



Σχήμα 1.49

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Υπολογισμός τριγωνομετρικών συναρτήσεων** Υπολογίστε τις ακόλουθες εκφράσεις.

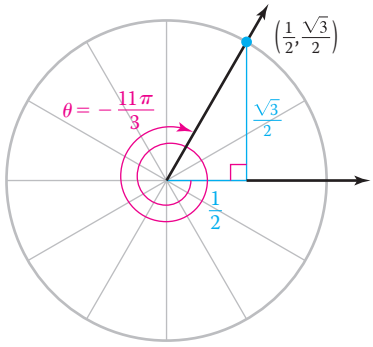
α. $\sin(8\pi/3)$ **β.** $\csc(-11\pi/3)$

ΛΥΣΗ

α. Η γωνία $8\pi/3 = 2\pi + 2\pi/3$ αντιστοιχεί σε μια *αριστερόστροφη περιστροφή*, κατά έναν κύκλο (2π rad) συν ακόμη $2\pi/3$ rad (Σχήμα 1.49). Ως εκ τούτου, αυτή η γωνία θα έχει την ίδια τελική πλευρά με την $2\pi/3$, και το αντίστοιχο σημείο στον μοναδιαίο κύκλο είναι $(-1/2, \sqrt{3}/2)$. Συνεπώς, $\sin(8\pi/3) = y = \sqrt{3}/2$.

β. Η γωνία $\theta = -11\pi/3 = -2\pi - 5\pi/3$ αντιστοιχεί σε μια *αριστερόστροφη περιστροφή*, κατά έναν κύκλο (2π rad) συν ακόμη $5\pi/3$ rad (Σχήμα 1.50). Ως εκ τούτου, αυτή η γωνία θα έχει την ίδια τελική πλευρά με την $\pi/3$. Το αντίστοιχο σημείο στον μοναδιαίο κύκλο είναι $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Συνεπώς, $\csc(-11\pi/3) = 1/y = 2/\sqrt{3}$.

Σχετικές ασκήσεις 9–22 ◄



Σχήμα 1.50

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Βρείτε τις $\cos(11\pi/6)$ και $\sin(5\pi/4)$. ◄

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν μια ποικιλία ιδιοτήτων που ονομάζονται ταυτότητες, οι οποίες αληθεύουν για όλες τις γωνίες του πεδίου ορισμού τους. Εδώ παρατίθενται μερικές ταυτότητες που χρησιμοποιούνται συχνά.

➤ Επιπροσθέτως, πρέπει να εξοικειωθείτε με τον νόμο των συνημιτόνων (Law of Cosines) και τον νόμο των ημιτόνων (Law of Sines). Βλ. Ασκήσεις 66 και 67.

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Αντίστροφες ταυτότητες

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Πυθαγόρειες ταυτότητες

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

Τύποι διπλάσιας γωνίας και μισής γωνίας

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Χρησιμοποιήστε τη $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, για να αποδείξετε ότι $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$. ◀

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων** Λύστε τις ακόλουθες εξισώσεις.

α. $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$ **β.** $\cos 2x = \sin 2x$, όπου $0 \le x < 2\pi$

ΛΥΣΗ

➤ Κάνοντας παραγοντοποίηση στον παρονομαστή, παρατηρούμε ότι $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

α. Λύνουμε αρχικά ως προς $\sin x = -1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}/2$. Από τον μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 1.48), βρίσκουμε ότι $\sin x = -\sqrt{2}/2$, εάν $x = 5\pi/4$ ή $x = 7\pi/4$. Προσθέτοντας ακέραια πολλαπλάσια του 2π, βρίσκουμε επιπλέον λύσεις. Συνεπώς, το σύνολο όλων των λύσεων είναι

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{και} \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi, \qquad \text{για } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

β. Διαιρούμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με $\cos 2x$ (υποθέτοντας ότι $\cos 2x \neq 0$) και παίρνουμε $\tan 2x = 1$. Θέτοντας $\theta = 2x$, έχουμε την ισοδύναμη εξίσωση $\tan\theta = 1$, που έχει λύσεις

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \ldots$$

➤ Σημειώστε ότι η υπόθεση $\cos 2x \neq 0$ ισχύει για αυτές τις τιμές του x.

Εάν διαιρέσουμε με το 2 και λάβουμε υπόψη μας τον περιορισμό $0 \le x < 2\pi$, έχουμε τις λύσεις

$$x = \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \text{και } \frac{13\pi}{8}.$$

Σχετικές ασκήσεις 23–40 ◀

Γραφική παράσταση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι παραδείγματα **περιοδικών συναρτήσεων**. Οι τιμές τους επαναλαμβάνονται σε κάθε διάστημα ενός καθορισμένου μήκους. Μια συνάρτηση f λέγεται περιοδική αν $f(x + P) = f(x)$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της, όπου η **περίοδος** P είναι ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός που έχει αυτήν την ιδιότητα.

Περίοδος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι συναρτήσεις $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$ και $\csc\theta$ έχουν περίοδο 2π:

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$
$$\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta \qquad \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta,$$

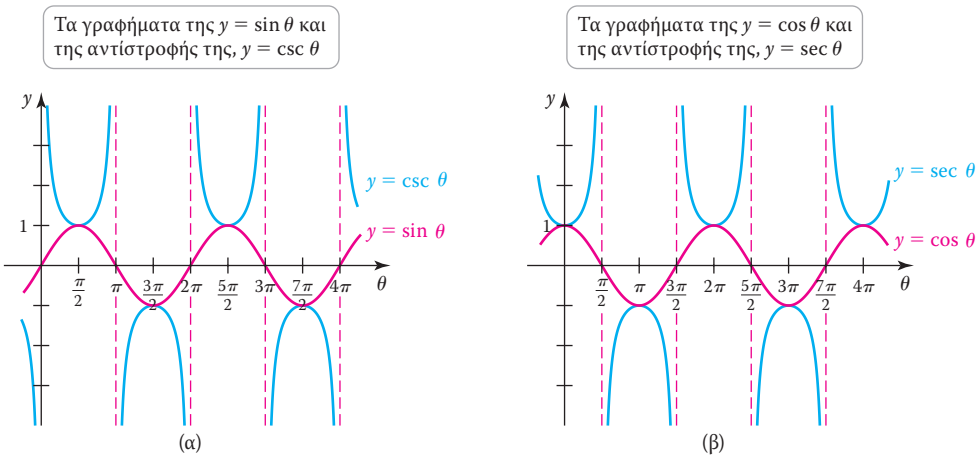
για όλα τα θ του πεδίου ορισμού.

Οι συναρτήσεις $\tan\theta$ και $\cot\theta$ έχουν περίοδο π:

$$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta \qquad \cot(\theta + \pi) = \cot\theta,$$

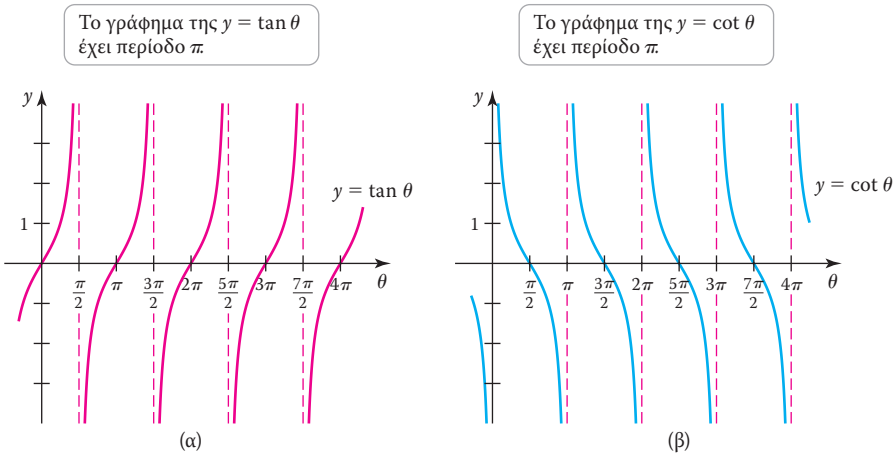
για όλα τα θ του πεδίου ορισμού.

Το γράφημα της $y = \sin\theta$ εμφανίζεται στο Σχήμα 1.51α. Επειδή $\csc\theta = 1/\sin\theta$, αυτές οι δύο συναρτήσεις είναι ομόσημες, αλλά η $y = \csc\theta$ δεν ορίζεται στα $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ έχοντας κατακόρυφες ασύμπτωτες. Παρόμοια σχέση έχουν οι συναρτήσεις $\cos\theta$ και $\sec\theta$ (Σχήμα 1.51β).



Σχήμα 1.51

Τα γραφήματα των $\tan\theta$ και $\cot\theta$ φαίνονται στο Σχήμα 1.52. Κάθε συνάρτηση έχει σημεία, που απέχουν π μονάδες, στα οποία δεν ορίζεται.



Σχήμα 1.52

Μετασχηματισμοί γραφημάτων

Πολλά φυσικά φαινόμενα, όπως η κίνηση των κυμάτων ή η ανατολή και η δύση του ήλιου, μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Ειδικότερα οι ημιτονοειδείς και οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις είναι πολύ χρήσιμες. Εφαρμόζοντας τις μεθόδους μετασχηματισμού που θέσαμε στην Ενότητα 1.2, μπορούμε να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις

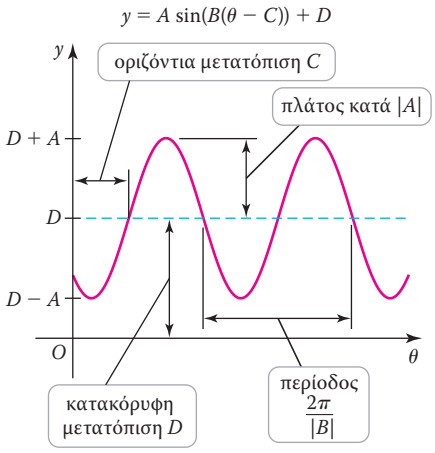
$$y = A\sin(B(\theta - C)) + D \quad \text{και} \quad y = A\cos(B(\theta - C)) + D,$$

συγκρινόμενες με τα γραφήματα των $y = \sin\theta$ και $y = \cos\theta$, έχουν υποστεί μια κατακόρυφη πλάτυνση (**πλάτος**) κατά $|A|$, περίοδο $2\pi/|B|$, μια οριζόντια μετατόπιση (ή **διαφορά φάσεως**) κατά C και μια **κατακόρυφη μετατόπιση** κατά D (Σχήμα 1.53).

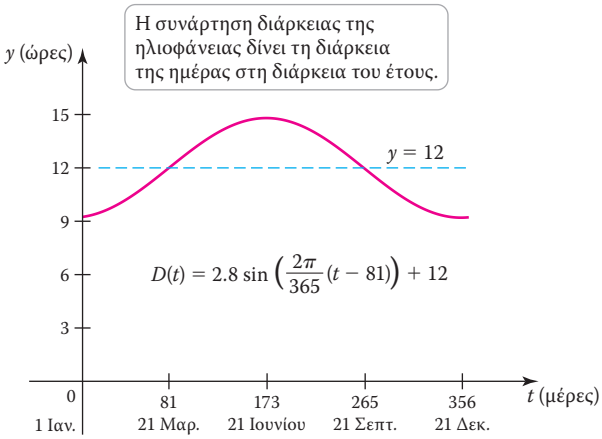
Για παράδειγμα, σε γεωγραφικό πλάτος 40° βόρεια (Πεκίνο, Μαδρίτη, Φιλαδέλφεια), η ηλιοφάνεια διαρκεί 12 ώρες το 24ωρο στις ισημερίες (περίπου 21 Μαρτίου και 21 Σεπτεμβρίου), με μέγιστο 14.8 ώρες ηλιοφάνεια στο θερινό ηλιοστάσιο (περίπου 21 Ιουνίου) και ελάχιστο 9.2 ώρες στο χειμερινό ηλιοστάσιο (περίπου 21 Δεκεμβρίου). Χρησιμοποιώντας αυτές τις πληροφορίες, μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$D(t) = 2.8\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 81)\right) + 12$$

εκφράζει τον αριθμό των ωρών ηλιοφάνειας το 24ωρο, t ημέρες μετά την 1η Ιανουαρίου (Σχήμα 1.54, Άσκηση 58). Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης προέρχεται από τη γραφική παράσταση της $y = \sin t$ με (1) μια οριζόντια κλιμάκωση από τον παράγοντα $2\pi/365$, (2) μια οριζόντια μετατόπιση κατά 81, (3) μια κατακόρυφη κλιμάκωση κατά έναν συντελεστή 2.8 και (4) μια κατακόρυφη μετατόπιση κατά 12.



Σχήμα 1.53



Σχήμα 1.54

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις επανάληψης

1. Ορίστε τις έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μέσω των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου.
2. Εξηγήστε πώς ένα σημείο $P(x, y)$ ορίζει σε έναν κύκλο ακτίνας r μια γωνία θ και τις τιμές των έξι τριγωνομετρικών συναρτήσεων της θ.
3. Πώς ορίζεται το μέτρο ακτινίου μιας γωνίας;
4. Εξηγήστε τι σημαίνει περίοδος μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης. Ποιες είναι οι περίοδοι των έξι τριγωνομετρικών συναρτήσεων;
5. Ποιες είναι οι τρεις Πυθαγόρειες ταυτότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων;
6. Πώς σχετίζονται οι συναρτήσεις sine και cosine με τις άλλες τέσσερις τριγωνομετρικές συναρτήσεις;
7. Σε ποια περίπτωση δεν ορίζεται η συνάρτηση εφαπτομένης;
8. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης τέμνουσας;

Βασικές δεξιότητες

9–16. Υπολογισμός τριγωνομετρικών συναρτήσεων *Υπολογίστε τις ακόλουθες εκφράσεις με τη βοήθεια του μοναδιαίου κύκλου. Ελέγξτε τα αποτελέσματα με μια αριθμομηχανή (calculator). Όλες οι γωνίες δίνονται σε ακτίνια.*

9. $\cos(2\pi/3)$ **10.** $\sin(2\pi/3)$ **11.** $\tan(-3\pi/4)$

12. $\tan(15\pi/4)$ **13.** $\cot(-13\pi/3)$ **14.** $\sec(7\pi/6)$

15. $\cot(-17\pi/3)$ **16.** $\sin(16\pi/3)$

17–22. Υπολογισμός τριγωνομετρικών συναρτήσεων *Υπολογίστε τις ακόλουθες εκφράσεις ή δηλώστε ότι δεν ορίζονται. Ελέγξτε τα αποτελέσματα με μια αριθμομηχανή.*

17. $\cos 0$ **18.** $\sin(-\pi/2)$ **19.** $\cos(-\pi)$

20. $\tan 3\pi$ **21.** $\sec(5\pi/2)$ **22.** $\cot\pi$

23–30. Τριγωνομετρικές ταυτότητες

23. Αποδείξτε ότι $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

24. Αποδείξτε ότι $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

25. Αποδείξτε ότι $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.

26. Αποδείξτε ότι $\dfrac{\sin\theta}{\csc\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$.

27. Αποδείξτε ότι $\sec(\pi/2 - \theta) = \csc\theta$.

28. Αποδείξτε ότι $\sec(x + \pi) = -\sec x$.

29. Βρείτε την τιμή της $\cos(\pi/12)$.

30. Βρείτε την τιμή της $\tan(3\pi/8)$.

31–40. Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων *Λύστε τις ακόλουθες εξισώσεις.*

31. $\tan x = 1$

32. $2\theta\cos\theta + \theta = 0$

33. $\sin^2\theta = \frac{1}{4}, 0 \le \theta < 2\pi$

34. $\cos^2\theta = \frac{1}{2}, 0 \le \theta < 2\pi$

35. $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

36. $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \le x < 2\pi$

37. $\cos 3x = \sin 3x, 0 \le x < 2\pi$

38. $\sin^2\theta - 1 = 0$

39. $\sin\theta\cos\theta = 0, 0 \le \theta < 2\pi$

40. $\tan^2 2\theta = 1, 0 \le \theta < \pi$

Περαιτέρω διερευνήσεις

41. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Διερευνήστε εάν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια εξήγηση ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$.
β. Η εξίσωση $\cos\theta = 2$ έχει πολλαπλές πραγματικές λύσεις.
γ. Η εξίσωση $\sin\theta = \frac{1}{2}$ έχει ακριβώς μία λύση.
δ. Η συνάρτηση $\sin(\pi x/12)$ έχει περίοδο 12.
ε. Από τις έξι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, μόνο η εφαπτομένη (tan) και η συνεφαπτομένη (cot) έχουν σύνολο τιμών $(-\infty, \infty)$.

42–45. Μια συνάρτηση δίνει τις έξι άλλες *Λαμβάνοντας υπόψη τα ακόλουθα στοιχεία για μια τριγωνομετρική συνάρτηση, υπολογίστε τις άλλες πέντε συναρτήσεις.*

42. $\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$ και $\pi < \theta < 3\pi/2$

43. $\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ και $0 < \theta < \pi/2$

44. $\sec\theta = \dfrac{5}{3}$ και $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

45. $\csc\theta = \dfrac{13}{12}$ και $0 < \theta < \pi/2$

46–49. Εύρος και περίοδος *Προσδιορίστε το εύρος και την περίοδο των ακόλουθων συναρτήσεων.*

46. $f(\theta) = 2\sin 2\theta$

47. $g(\theta) = 3\cos(\theta/3)$

48. $p(t) = 2.5\sin\left(\frac{1}{2}(t - 3)\right)$

49. $q(x) = 3.6\cos(\pi x/24)$

50–53. Γράφημα των συναρτήσεων ημιτόνου (sine) και συνημιτόνου (cosine) *Ξεκινώντας με τις γραφικές παραστάσεις της $y = \sin x$ ή της $y = \cos x$, χρησιμοποιήστε μετασχηματισμούς μετατόπισης και κλιμάκωσης, για να σχεδιάσετε το γράφημα των ακόλουθων συναρτήσεων. Χρησιμοποιήστε μια εφαρμογή γραφικών, για να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας.*

50. $f(x) = 3\sin 2x$

51. $g(x) = -2\cos(x/3)$

52. $p(x) = 3\sin(2x - \pi/3) + 1$

53. $q(x) = 3.6\cos(\pi x/24) + 2$

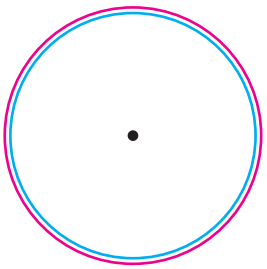
54–56. Σχεδιασμός συναρτήσεων *Σχεδιάστε μια ημιτονοειδή συνάρτηση με τις συγκεκριμένες ιδιότητες.*

54. Έχει μια περίοδο 12 ωρών με μια ελάχιστη τιμή -4 σε $t = 0$ hr και μια μέγιστη τιμή 4 σε $t = 6$ hr.

55. Έχει μια περίοδο 24 ωρών με μια ελάχιστη τιμή 10 σε $t = 3$ hr και μια μέγιστη τιμή 16 σε $t = 15$ hr.

T **56.** Έχει μια περίοδο 24 ωρών με μια μέγιστη τιμή 25 σε $t = 6$ hr και μια ελάχιστη τιμή 5 σε $t = 18$ hr.

T **57. Ένα παράξενο αποτέλεσμα** Η Γη είναι περίπου κυκλική σε εγκάρσια τομή, με περίμετρο στον Ισημερινό 24.882 μίλια. Υποθέστε ότι χρησιμοποιούμε δύο σκοινιά, για να δημιουργήσουμε δύο ομόκεντρους κύκλους: έναν τυλίγοντας ένα σκοινί γύρω από τον Ισημερινό και έναν άλλο χρησιμοποιώντας ένα σκοινί 38 ft μακρύτερο (βλ. σχήμα). Πόσο διάστημα υπάρχει μεταξύ των σκοινιών;



Εφαρμογές

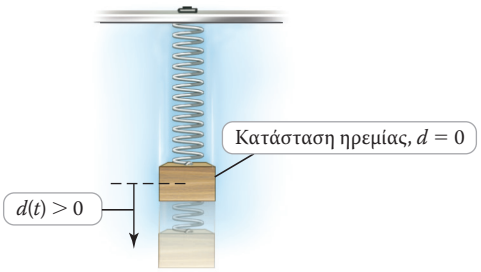
58. Συνάρτηση διάρκειας ηλιοφάνειας σε 40° N Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση

$$D(t) = 2.8\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 81)\right) + 12$$

έχει τις ακόλουθες ιδιότητες, όπου το t μετριέται σε ημέρες και το D είναι ο αριθμός των ωρών μεταξύ ανατολής και δύσης.

α. Έχει μια περίοδο 365 ημερών.
β. Οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές της είναι 14.8 και 9.2, αντίστοιχα, οι οποίες προκύπτουν περίπου σε $t = 172$ και $t = 355$, αντίστοιχα (αντιστοιχούν στα ηλιοστάσια).
γ. $D(81) = 12$ και $D(264) \approx 12$ (αντιστοιχούν στις ισημερίες).

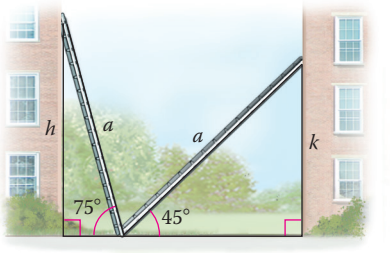
59. Τούβλο σε ελατήριο Ένα ελαφρύ τούβλο κρέμεται σε κατάσταση ηρεμίας από το άκρο ενός ελατηρίου και τραβιέται προς τα κάτω 10 cm και στη συνέχεια ελευθερώνεται (βλ. σχήμα). Υποθέστε ότι το τούβλο ταλαντώνεται με ένα εύρος 10 cm από τη θέση ηρεμίας του με περίοδο 1.5 s. Βρείτε μια τριγωνομετρική συνάρτηση $d(t)$ που να δίνει τη μετατόπιση του τούβλου t δευτερόλεπτα μετά την απελευθέρωσή του, όπου το $d(t) > 0$ παριστάνει τη μετατόπιση προς τα κάτω.



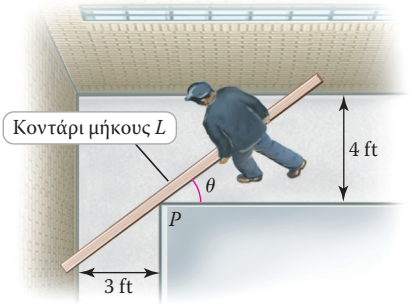
60. Πλησιάζοντας έναν φάρο Ένα πλοίο προσεγγίζει έναν φάρο ύψους 50 ft του οποίου η βάση είναι στο επίπεδο της θάλασσας. Έστω d η απόσταση μεταξύ του πλοίου και της βάσης του φάρου. Έστω L η απόσταση μεταξύ του πλοίου και της κορυφής του φάρου. Υποθέστε ότι θ είναι η γωνία του ύψους μεταξύ του πλοίου και της κορυφής του φάρου,

α. Εκφράστε την d ως συνάρτηση της θ.
β. Εκφράστε την L ως συνάρτηση της θ.

61. Σκάλες Δύο σκάλες μήκους a στηρίζονται στα απέναντι τοιχώματα ενός στενού δρόμου με τις βάσεις τους να συναντώνται (βλ. σχήμα). Η μια σκάλα εκτείνεται h πόδια πάνω στον τοίχο και σχηματίζει γωνία 75° με το έδαφος. Η άλλη σκάλα εκτείνεται k πόδια στον απέναντι τοίχο και σχηματίζει γωνία 45° με το έδαφος. Βρείτε το πλάτος του δρόμου συναρτήσει του h. Υποθέτουμε ότι το έδαφος είναι οριζόντιο και κάθετο προς τους δύο τοίχους.

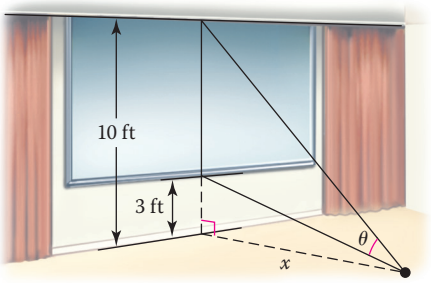


T **62. Κοντάρι σε γωνία** Ένα κοντάρι μήκους L κινείται οριζόντια γύρω από μια γωνιά όπου ένας διάδρομος πλάτους 3 ft συναντά έναν διάδρομο πλάτους 4 ft (βλ. σχήμα). Εάν $0 < \theta < \pi/2$, βρείτε τη σχέση μεταξύ L και θ κατά τη στιγμή όπου το κοντάρι αγγίζει ταυτόχρονα τους δύο τοίχους και τη γωνία P. Υπολογίστε το θ όταν $L = 10$ ft.



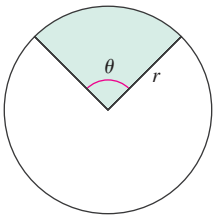
63. Ένα λιγότερο γνωστό γεγονός Η μικρότερη ημέρα του έτους εμφανίζεται στο χειμερινό ηλιοστάσιο (κοντά στις 21 Δεκεμβρίου) και η μεγαλύτερη ημέρα του έτους εμφανίζεται στο θερινό ηλιοστάσιο (κοντά στις 21 Ιουνίου). Ωστόσο, η τελευταία ανατολή του ήλιου και το νωρίτερο ηλιοβασίλεμα δεν εμφανίζονται στο χειμερινό ηλιοστάσιο και η πρώτη ανατολή του ήλιου και το τελευταίο ηλιοβασίλεμα δεν εμφανίζονται στο θερινό ηλιοστάσιο. Σε γεωγραφικό πλάτος 40° βόρεια, η τελευταία ανατολή του ήλιου εμφανίζεται στις 4 Ιανουαρίου στις 7:25 π.μ. (14 ημέρες μετά το ηλιοστάσιο), και το νωρίτερο ηλιοβασίλεμα εμφανίζεται στις 7 Δεκεμβρίου στις 16:37 (14 ημέρες πριν από το ηλιοστάσιο). Ομοίως, η πρώτη ανατολή του ήλιου εμφανίζεται στις 2 Ιουλίου στις 4:30 π.μ. (14 ημέρες μετά το ηλιοστάσιο) και το αργότερο ηλιοβασίλεμα εμφανίζεται στις 7 Ιουνίου στις 19:32 (14 ημέρες πριν από το ηλιοστάσιο). Χρησιμοποιώντας ημιτονοειδείς συναρτήσεις, επινοήστε μια συνάρτηση $s(t)$ που να δίνει τον χρόνο της ανατολής t ημέρες μετά την 1η Ιανουαρίου και μια συνάρτηση $S(t)$ που να δίνει την ώρα του ηλιοβασιλέματος t ημέρες μετά την 1η Ιανουαρίου. Υποθέστε ότι τα s και S μετρούνται σε λεπτά και τα $s = 0$ και $S = 0$ αντιστοιχούν στις 4:00 π.μ. Σχεδιάστε το γράφημα των συναρτήσεων. Στη συνέχεια, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του μήκους της ημέρας $D(t) = S(t) - s(t)$ και δείξτε ότι η μεγαλύτερη και η μικρότερη ημέρα εμφανίζονται στα ηλιοστάσια.

64. Γωνίες θέασης Ένα αμφιθέατρο με επίπεδο πάτωμα έχει μια μεγάλη επίπεδη οθόνη τηλεόρασης στον τοίχο. Το κατώτερο άκρο της τηλεόρασης βρίσκεται 3 ft πάνω από το δάπεδο και το ανώτερο άκρο βρίσκεται 10 ft πάνω από το δάπεδο (βλ. σχήμα). Υπολογίστε τη γωνία θέασης θ σε απόσταση $x = 10$ ft από την οθόνη.

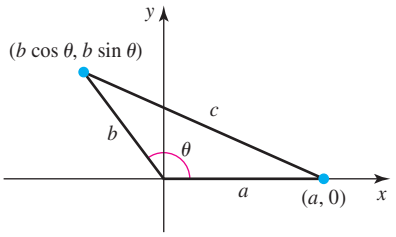


Πρόσθετες ασκήσεις

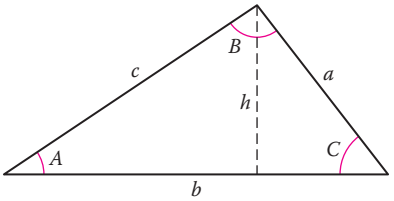
65. Εμβαδόν κυκλικού τομέα Αποδείξτε ότι το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ενός κύκλου ακτίνας r με κεντρική γωνία θ (μετρούμενη σε ακτίνια) είναι $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$.



66. Νόμος των συνημιτόνων Χρησιμοποιήστε το σχήμα, για να αποδείξετε τον νόμο των συνημιτόνων (που αποτελεί μια γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος): $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$.



67. Νόμος των ημιτόνων Χρησιμοποιήστε το σχήμα, για να αποδείξετε το νόμο των ημιτόνων: $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΡΗΓΟΡΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

1. $3\pi/2 \cdot 225°$ **2.** $\sqrt{3}/2 \cdot -\sqrt{2}/2$ **3.** Διαιρούμε και τα δύο μέλη της $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ με $\sin^2\theta$. ◄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Εξηγήστε γιατί ή γιατί όχι Διερευνήστε εάν οι ακόλουθες δηλώσεις είναι αληθείς και δώστε μια εξήγηση ή ένα αντιπαράδειγμα.

α. Μια συνάρτηση θα μπορούσε να έχει την ιδιότητα ότι $f(-x) = f(x)$, για όλα τα x.
β. $\cos(a + b) = \cos a + \cos b$, για κάθε a και b στο $[0, 2\pi]$.
γ. Εάν f είναι μια γραμμική συνάρτηση της μορφής $f(x) = mx + b$, τότε $f(u + v) = f(u) + f(v)$, για όλα τα u και v.
δ. Η συνάρτηση $f(x) = 1 - x$ έχει την ιδιότητα ότι $f(f(x)) = x$.
ε. Μπορείτε να χαράξετε στον άξονα των αριθμών το σύνολο $\{x: |x + 3| > 4\}$ χωρίς να σηκώσετε το μολύβι σας.

2. Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των ακόλουθων συναρτήσεων.

α. $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$ **β.** $g(y) = \dfrac{1}{y - 2}$
γ. $h(z) = \sqrt{z^2 - 2z - 3}$

3. Εξισώσεις ευθειών Σε κάθε ερώτημα παρακάτω, βρείτε μια εξίσωση της ευθείας με τις δοσμένες ιδιότητες. Σχεδιάστε το αντίστοιχο γράφημα.

α. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(2, -3)$ και $(4, 2)$
β. Η ευθεία με κλίση $\frac{3}{4}$ και σημεία τομής με τον άξονα x τα $(-4, 0)$
γ. Η ευθεία με σημεία τομής με τους άξονες τα $(4, 0)$ και $(0, -2)$

4. Κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις Το κόστος στάθμευσης σε ένα γκαράζ είναι \$2 για την πρώτη μισή ώρα και \$1 για κάθε πρόσθετη μισή ώρα. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $C = f(t)$ που δίνει το κόστος της στάθμευσης για t ώρες, όπου $0 \le t \le 3$.

T **5. Γράφημα της απόλυτης τιμής** Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2(x - |x|)$. Εκφράστε τη συνάρτηση σε δύο μέρη, χωρίς τη χρήση της απόλυτης τιμής. Στη συνέχεια, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με το χέρι. Χρησιμοποιήστε μια εφαρμογή γραφικών, για να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας.

6. Συνάρτηση από διατύπωση Υποθέστε ότι σχεδιάζετε να κάνετε ένα ταξίδι 500 μιλίων με ένα αυτοκίνητο που καταναλώνει 35 mi/gal. Βρείτε τη συνάρτηση $C = f(p)$ που δίνει το κόστος της βενζίνης για το ταξίδι, όταν το κόστος της βενζίνης είναι \$$p$ ανά γαλόνι.

T **7. Γραφήματα εξισώσεων** Σχεδιάστε το γράφημα των ακόλουθων εξισώσεων. Χρησιμοποιήστε μια εφαρμογή γραφικών, για να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας.

α. $2x - 3y + 10 = 0$
β. $y = x^2 + 2x - 3$
γ. $x^2 + 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$
δ. $x^2 - 2x + y^2 - 8y + 5 = 0$

8. Άρρητες συναρτήσεις Σχεδιάστε το γράφημα των συναρτήσεων $f(x) = x^{1/3}$ και $g(x) = x^{1/4}$. Βρείτε όλα τα σημεία τομής των δύο γραφημάτων. Για $x > 1$, είναι $f(x) > g(x)$ ή είναι $g(x) > f(x)$;

9. Άρρητες συναρτήσεις Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων $f(x) = x^{1/7}$ και $g(x) = x^{1/4}$.

10. Σημεία τομής Σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = x^2$ και $x^2 + y^2 - 7y + 8 = 0$. Σε ποιο σημείο ή σε ποια σημεία τέμνονται οι καμπύλες;

11. Συνάρτηση σημείου ζέσεως Το νερό βράζει στους 212° F στο επίπεδο της θάλασσας και στους 200° F σε υψόμετρο 6000 ft. Ας υποθέσουμε ότι το σημείο ζέσεως B μεταβάλλεται γραμμικά με το ύψος a. Βρείτε τη συνάρτηση $B = f(a)$ που περιγράφει την εξάρτηση. Σχολιάστε εάν μια γραμμική συνάρτηση αποτελεί ένα ρεαλιστικό μοντέλο.

12. Κόστος έκδοσης Ένας μικρός εκδότης σχεδιάζει να δαπανήσει \$1000, για να εκδώσει ένα βιβλίο με μαλακό εξώφυλλο και υπολογίζει ότι το κόστος της εκτύπωσης είναι \$2.50 ανά βιβλίο. Ο εκδότης θα λάβει \$7 για κάθε βιβλίο που θα πουληθεί.

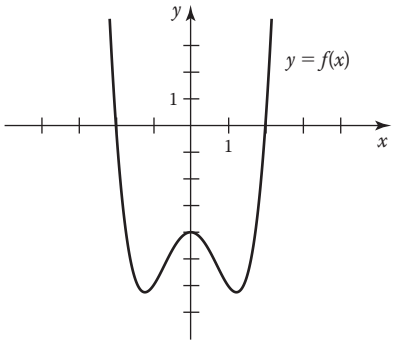
α. Βρείτε τη συνάρτηση $C = f(x)$ που δίνει το κόστος της παραγωγής x βιβλίων.
β. Βρείτε τη συνάρτηση $R = g(x)$ που δίνει τα έσοδα από την πώληση x βιβλίων.
γ. Σχεδιάστε το γράφημα των συναρτήσεων του κόστους και των εσόδων. Στη συνέχεια, βρείτε τον αριθμό των βιβλίων που πρέπει να πουληθούν ώστε ο εκδότης να ισοσκελίσει τα έξοδα.

T **13. Μετατόπιση και κλιμάκωση** Ξεκινώντας από το γράφημα της $f(x) = x^2$, σχεδιάστε τις ακόλουθες συναρτήσεις. Χρησιμοποιήστε μια αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων, για να ελέγξετε τα αποτελέσματά σας.

α. $f(x + 3)$ **β.** $2f(x - 4)$ **γ.** $-f(3x)$ **δ.** $f(2(x - 3))$

14. Μετατόπιση και κλιμάκωση Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο σχήμα. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση των ακόλουθων συναρτήσεων.

α. $f(x + 1)$ **β.** $2f(x - 1)$ **γ.** $-f(x/2)$ **δ.** $f(2(x - 1))$



15. Σύνθετες συναρτήσεις Έστω $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ και $h(x) = \sqrt{x}$.

α. Υπολογίστε το $h(g(\pi/2))$. **β.** Βρείτε την $h(f(x))$.
γ. Βρείτε την $f(g(h(x)))$. **δ.** Βρείτε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$.
ε. Βρείτε το σύνολο τιμών της $f \circ g$.

16. Σύνθετες συναρτήσεις Βρείτε τις συναρτήσεις f και g, έτσι ώστε $h = f \circ g$.

α. $h(x) = \sin(x^2 + 1)$ **β.** $h(x) = (x^2 - 4)^{-3}$

17–20. Απλοποίηση πηλίκου διαφορών *Υπολογίστε και απλοποιήστε τα πηλίκα διαφορών* $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ *και* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *για κάθε συνάρτηση.*

17. $f(x) = x^2 - 2x$ **18.** $f(x) = 4 - 5x$

19. $f(x) = x^3 + 2$ **20.** $f(x) = \dfrac{7}{x + 3}$

21. Συμμετρία Προσδιορίστε τη συμμετρία (εάν υπάρχει) στις γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων εξισώσεων.

α. $y = \cos 3x$ **β.** $y = 3x^4 - 3x^2 + 1$
γ. $y^2 - 4x^2 = 4$

22. Τριγωνομετρικές ταυτότητες Αποδείξτε καθεμία από τις ακόλουθες ταυτότητες.

α. $\dfrac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$ (*Υπόδειξη:* Πολλαπλασιάστε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του $\dfrac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$ με $1 - \cos\theta$.)

β. $\dfrac{\sec\theta - 1}{\tan\theta} = \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1}$

23. Μοίρες και ακτίνια

α. Μετατρέψτε 135° σε ακτίνια.
β. Μετατρέψτε $4\pi/5$ σε μοίρες.
γ. Ποιο είναι το μήκος του τόξου ενός κύκλου ακτίνας 10 που δέχεται γωνία $4\pi/3$ (rad);

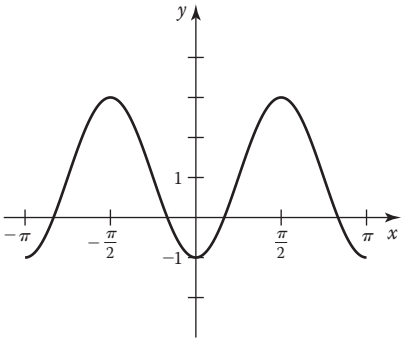
24. Γραφική παράσταση συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου Χρησιμοποιήστε μετατοπίσεις και κλιμακώσεις, για να σχεδιάσετε το γράφημα των ακόλουθων συναρτήσεων και να προσδιορίσετε το εύρος και την περίοδο.

α. $f(x) = 4\cos(x/2)$ **β.** $g(\theta) = 2\sin(2\pi\theta/3)$
γ. $h(\theta) = -\cos(2(\theta - \pi/4))$

25. Σχεδιασμός συναρτήσεων Βρείτε μια τριγωνομετρική συνάρτηση f που να ικανοποιεί κάθε σύνολο ιδιοτήτων. Δεν υπάρχει μόνο μία απάντηση.

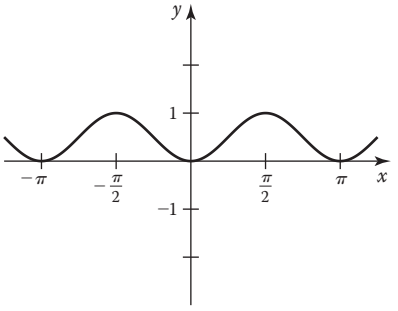
α. Έχει περίοδο 6, με ελάχιστη τιμή -2 σε $t = 0$ και μέγιστη τιμή 2 σε $t = 3$.
β. Έχει περίοδο 24, με μέγιστη τιμή 20 σε $t = 6$ και ελάχιστη τιμή 10 σε $t = 18$.

26. Γράφημα συνάρτησης Βρείτε μια τριγωνομετρική συνάρτηση f που να παριστάνεται από το γράφημα του σχήματος.

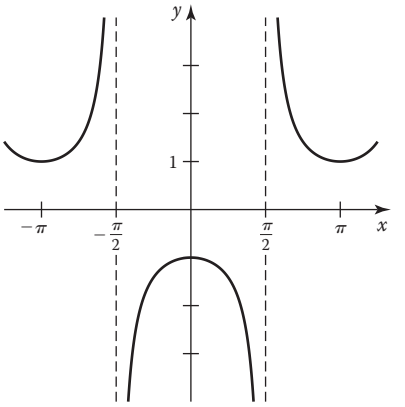


27. Αντιστοιχίσεις Αντιστοιχίστε κάθε συνάρτηση (α)–(στ) με τα αντίστοιχα γραφήματα (Α)–(ΣΤ).

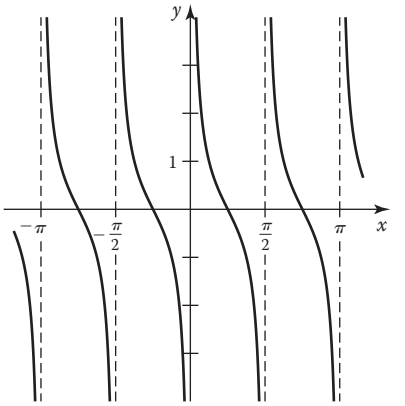
α. $f(x) = -\sin x$ **β.** $f(x) = \cos 2x$
γ. $f(x) = \tan(x/2)$ **δ.** $f(x) = -\sec x$
ε. $f(x) = \cot 2x$ **στ.** $f(x) = \sin^2 x$



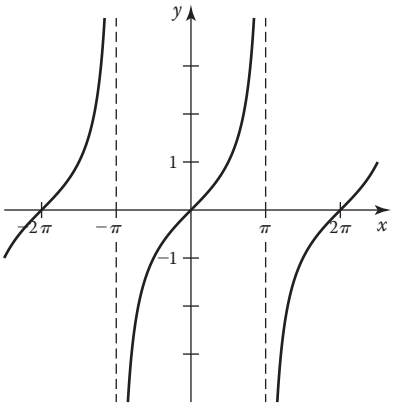
(Α)



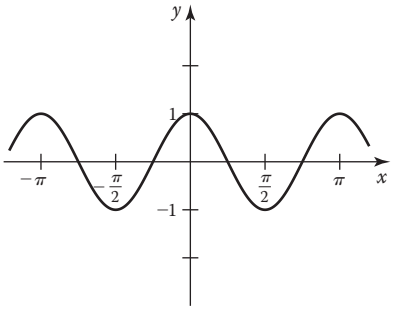
(Β)



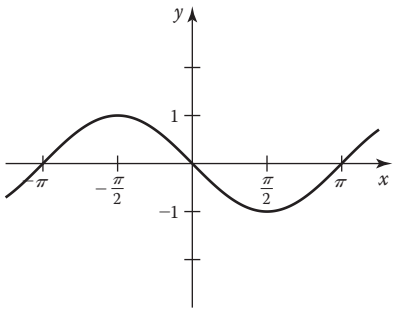
(Γ)



(Δ)



(Ε)



(ΣΤ)

28–29. Σημεία τομής *Βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνονται οι καμπύλες στα δοσμένα διαστήματα.*

28. $y = \sec x$ και $y = 2$ στο $(-\pi/2, \pi/2)$

29. $y = \sin x$ και $y = -\frac{1}{2}$ στο $(0, 2\pi)$

30. **Στερεογραφικές προβολές** Ένας κοινός τρόπος για να προβάλουμε μια σφαίρα (όπως η Γη) σε ένα επίπεδο (όπως ένας χάρτης) είναι να χρησιμοποιήσουμε μια *στερεογραφική προβολή*. Εδώ εμφανίζεται η διδιάστατη μορφή της μεθόδου, η οποία απεικονίζει έναν κύκλο σε μια ευθεία. Έστω P ένα σημείο στο δεξί μισό του κύκλου ακτίνας R που προσδιορίζεται από τη γωνία φ. Βρείτε τη συνάρτηση $x = F(\varphi)$ η οποία δίνει την τετμημένη x $(x \geq 0)$ που αντιστοιχεί στο φ για $0 < \varphi \leq \pi$.