1

Συναρτήσεις

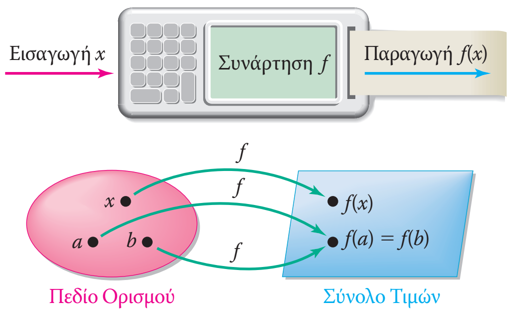
Προεπισκόπηση Κεφαλαίου Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα με ένα συγκεκριμένο λεξιλόγιο και πολλούς κανόνες. Πριν ξεκινήσετε το ταξίδι σας στον Απειροστικό Λογισμό, θα πρέπει να έχετε εξοικειωθεί με τα στοιχεία αυτής της γλώσσας. Μεταξύ αυτών των στοιχείων είναι οι δεξιότητες στην άλγεβρα, ο συμβολισμός και η ορολογία στα διάφορα σύνολα των πραγματικών αριθμών και οι περιγραφές των καμπυλών, κύκλων και άλλων βασικών συνόλων στο επίπεδο συντεταγμένων. Στο Παράρτημα Α υπάρχει μια επισκόπηση αυτού του υλικού. Το κεφάλαιο αρχίζει με τη θεμελιώδη έννοια της συνάρτησης και στη συνέχεια παρουσιάζει μερικές από τις συναρτήσεις που είναι απαραίτητες στον ΑπειροστικόΛογισμό: πολυώνυμα, γραμμικές συναρτήσεις, αλγεβρικές, και τριγωνομετρικές συναρτήσεις. (Οι λογαριθμικές, εκθετικές, και αντίστροφες συναρτήσεις εισάγονται στο Κεφάλαιο 7.) Πριν ξεκινήσετε τη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού, είναι σημαντικό να κατέχετε τις έννοιες αυτού του κεφαλαίου.

1.1 Ανασκόπηση των Συναρτήσεων

Παντού γύρω μας βλέπουμε τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων ή των **μεταβλητών**. Για παράδειγμα, ο δείκτης τιμών καταναλωτή αλλάζει με τον χρόνο και η θερμοκρασία του ωκεανού ποικίλλει ανάλογα με το γεωγραφικό πλάτος. Οι σχέσεις αυτές μπορούν συχνά να εκφράζονται με μαθηματικές έννοιες που ονομάζονται *συναρτήσεις*. Ο Απειροστικός Λογισμός είναι η μελέτη των συναρτήσεων, και επειδή χρησιμοποιούμε συναρτήσεις για να περιγράψουμε τον κόσμο γύρω μας, ο Απειροστικός Λογισμός είναι μια παγκόσμια γλώσσα για την ανθρώπινη έρευνα.

ΟΡΙΣΜΟΣ Συνάρτηση

Συνάρτηση f είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε τιμή x ενός συνόλου D μια *μοναδική* τιμή που συμβολίζεται $f(x)$. Το σύνολο D είναι το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης. Το **σύνολο τιμών** είναι το σύνολο όλων των τιμών $f(x)$ που παράγονται όταν το x μεταβάλλεται σε όλο το πεδίο ορισμού. (Σχήμα 1.1).



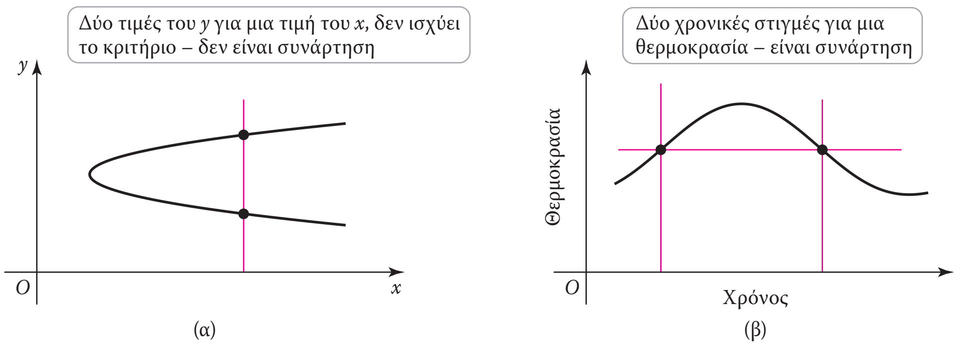
Σχήμα 1.1

➤ Εάν το πεδίο ορισμού δεν έχει καθοριστεί, θεωρούμε ότι είναι το σύνολο όλων των τιμών του x για τις οποίες ορίζεται η f. Θα δούμε σύντομα ότι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης μπορούν να περιορίζονται από το περιεχόμενο του προβλήματος.

Η **ανεξάρτητη μεταβλητή** είναι η μεταβλητή που σχετίζεται με το πεδίο ορισμού. Η **εξαρτημένη μεταβλητή** ανήκει στο σύνολο τιμών. Η **γραφική παράσταση** (**γράφημα**) μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των σημείων (x, y) στο επίπεδο xy που ικανοποιεί την εξίσωση $y = f(x)$. Το **όρισμα** μιας συνάρτησης είναι η έκφραση στην οποία λειτουργεί η συνάρτηση. Για παράδειγμα, το x είναι το όρισμα όταν γράφουμε $f(x)$. Ομοίως, το 2 είναι το όρισμα στην $f(2)$ και $x^2 + 4$ είναι το όρισμα στην $f(x^2 + 4)$.

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 1 Αν $f(x) = x^2 - 2x$, βρείτε τα $f(-1)$, $f(x^2)$, $f(t)$, και $f(p - 1)$. ◄

Η απαίτηση ότι μια συνάρτηση αντιστοιχίζει μια *μοναδική* τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής σε κάθε τιμή του πεδίου ορισμού εκφράζεται με το κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας (Σχήμα 1.2α). Για παράδειγμα, η εξωτερική θερμοκρασία καθώς ποικίλλει κατά τη διάρκεια της ημέρας είναι μία συνάρτηση του χρόνου (Σχήμα 1.2β).

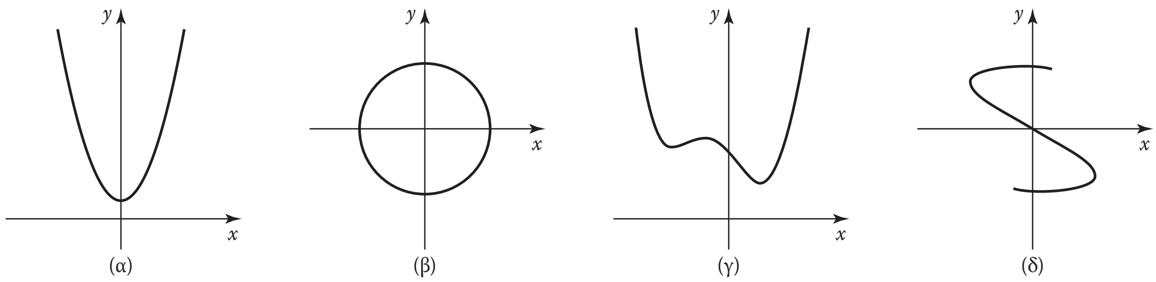


Σχήμα 1.2

> **Κριτήριο της Κατακόρυφης Ευθείας**
>
> Μια γραφική παράσταση παριστάνει συνάρτηση αν και μόνο αν ικανοποιεί το **κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας**: Κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση το πολύ σε ένα σημείο. Αν δεν ικανοποιείται αυτή η απαίτηση, δεν μπορούμε να μιλάμε για συναρτήσεις.

➤ Γενικότερα, ένα σύνολο σημείων μιας γραφικής παράστασης που *δεν* αντιστοιχεί σε συνάρτηση, παριστάνει μια **σχέση** μεταξύ των μεταβλητών. Όλες οι συναρτήσεις είναι σχέσεις, αλλά όλες οι σχέσεις δεν είναι συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 **Διαπίστωση συναρτήσεων** Περιγράψτε αν κάθε γραφική παράσταση στο Σχήμα 1.3 παριστάνει συνάρτηση.



Σχήμα 1.3

ΛΥΣΗ Το κριτήριο κατακόρυφης ευθείας δείχνει ότι μόνο τα γραφήματα (α) και (γ) παριστάνουν συναρτήσεις. Στα γραφήματα (β) και (δ) υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν τη γραφική παράσταση περισσότερο από μια φορά. Δηλαδή υπάρχουν τιμές του x που αντιστοιχίζονται σε περισσότερες από μία τιμές του y. Συνεπώς τα γραφήματα (β) και (δ) δεν ικανοποιούν το κριτήριο κατακόρυφης ευθείας, οπότε δεν παριστάνουν συναρτήσεις.
Σχετικές Ασκήσεις 11–12 ◄

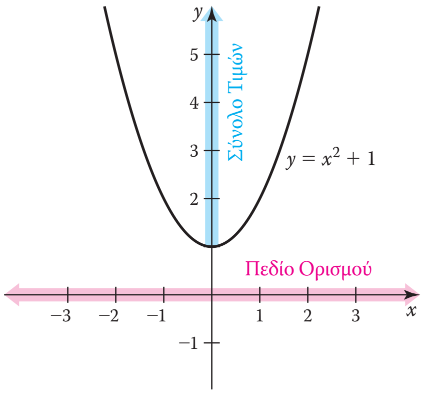
➤ Παράθυρο του $[a, b] \times [c, d]$ σημαίνει $a \le x \le b$ και $c \le y \le d$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 **Πεδίο Ορισμού και Σύνολο Τιμών** Σχεδιάστε κάθε συνάρτηση με κάποια γραφική εφαρμογή στο δεδομένο πλαίσιο. Στη συνέχεια ορίστε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

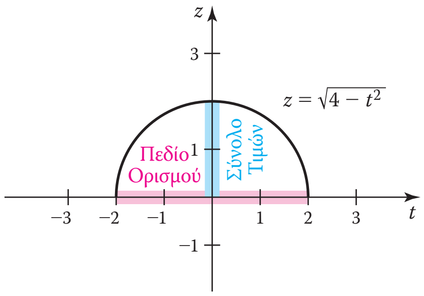
α. $y = f(x) = x^2 + 1;\quad [-3, 3] \times [-1, 5]$

β. $z = g(t) = \sqrt{4 - t^2};\quad [-3, 3] \times [-1, 3]$

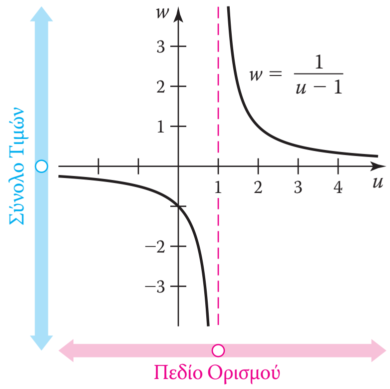
γ. $w = h(u) = \dfrac{1}{u - 1};\quad [-3, 5] \times [-4, 4]$



Σχήμα 1.4



Σχήμα 1.5



Σχήμα 1.6

ΛΥΣΗ

α. Το Σχήμα 1.4 δίνει το γράφημα της $f(x) = x^2 + 1$. Επειδή η f ορίζεται για όλες τις τιμές του x, το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, και συμβολίζεται $(-\infty, \infty)$ or $\mathbb{R}$. ή R. Επειδή $x^2 \geq 0$ για κάθε x, έπεται ότι $x^2 + 1 \geq 1$ και το σύνολο τιμών της f είναι το $[1, \infty)$.

β. Όταν ο n είναι άρτιος, συναρτήσεις που περιέχουν νιοστές ρίζες ορίζονται με την προϋπόθεση ότι η ποσότητα κάτω από τη ρίζα είναι μη αρνητική (μπορεί επίσης να υπάρχουν και επιπλέον περιορισμοί). Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση g ορίζεται με την προϋπόθεση $4 - t^2 \geq 0$, που σημαίνει $t^2 \leq 4$, or $-2 \leq t \leq 2$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της g είναι το $[-2, 2]$. Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, το σύνολο τιμών αποτελείται από μη αρνητικούς αριθμούς. Όταν $t = 0$, το z παίρνει τη μέγιστη τιμή του $g(0) = \sqrt{4} = 2$, και όταν $t = \pm 2$, z το z παίρνει την ελάχιστη τιμή του $g(\pm 2) = 0$. Συνεπώς το σύνολο τιμών είναι το $[0, 2]$ (Σχήμα 1.5).

γ. Η συνάρτηση h δεν ορίζεται στο $u = 1$, οπότε το πεδίο ορισμού της είναι $\{u: u \neq 1\}$, και η γραφική της παράσταση δεν έχει σημείο που αντιστοιχεί στο $u = 1$. Παρατηρούμε ότι το w παίρνει όλες τις τιμές εκτός από το 0. Ως εκ τούτου, το σύνολο τιμών είναι $\{w: w \neq 0\}$. Μια εφαρμογή γραφικών *δεν* παριστάνει αυτή τη συνάρτηση με ακρίβεια εάν δείχνει την κατακόρυφη ευθεία $u = 1$, ως μέρος του γραφήματος. (Σχήμα 1.6).

Σχετικές Ασκήσεις 13–20 ◄

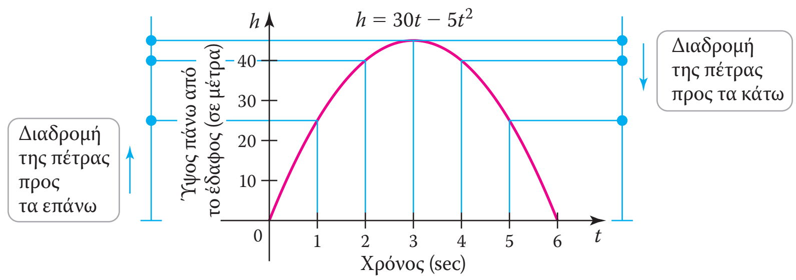
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών υπό συνθήκη Τη χρονική στιγμή $t = 0$, μια πέτρα ρίχνεται κατακόρυφα από το έδαφος προς τα πάνω με ταχύτητα 30 m/s. Το ύψος της πάνω από το έδαφος σε μέτρα (αγνοώντας την αντίσταση του αέρα) προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $h = f(t) = 30t - 5t^2$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα. Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f στις συνθήκες του συγκεκριμένου προβλήματος.

ΛΥΣΗ Αν και η f ορίζεται για όλες τις τιμές του t, οι μόνοι συναφείς χρόνοι είναι μεταξύ της χρονικής στιγμής που η πέτρα ρίχνεται ($t = 0$) και της χρονικής στιγμής που βρίσκει το έδαφος, όταν $h = f(t) = 0$. Λύνοντας την εξίσωση $h = 30t - 5t^2 = 0$, βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
30t - 5t^2 &= 0 \\
5t(6 - t) &= 0 && \text{Παραγοντοποίηση.} \\
5t = 0 \quad \text{or} \quad 6 - t &= 0 && \text{Κάθε παράγοντας εξισώνεται με το 0.} \\
t = 0 \quad \text{or} \quad t &= 6. && \text{Λύση.}
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η πέτρα αφήνει το έδαφος όταν $t = 0$ και επιστρέφει στο έδαφος όταν $t = 6$. Ένα κατάλληλο πεδίο ορισμού που ταιριάζει με το πλαίσιο αυτού του προβλήματος είναι $\{t: 0 \leq t \leq 6\}$. Το σύνολο τιμών αποτελείται από όλες τις τιμές του $h = 30t - 5t^2$ όταν το t κινείται στο $[0, 6]$. Η μεγαλύτερη τιμή του h συμβαίνει όταν η πέτρα φτάνει στο υψηλότερο σημείο της, όταν $t = 3$ (στα μισά της διαδρομής που διανύει), το οποίο είναι $h = f(3) = 45$. Συνεπώς, το σύνολο τιμών είναι $[0, 45]$. Οι παρατηρήσεις αυτές επιβεβαιώνονται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ύψος (Σχήμα 1.7). Σημειώστε ότι αυτό το γράφημα *δεν* είναι η τροχιά της η πέτρας, η οποία κινείται κατακόρυφα.

➤ Η διακεκομμένη κατακόρυφη γραμμή $u = 1$ στο Σχήμα 1.6 δείχνει ότι το γράφημα του $w = h(u)$ πλησιάζει μια *κατακόρυφη ασύμπτωτη* καθώς το u πλησιάζει το 1 και το w γίνεται μεγάλο σε μέγεθος για τιμές του u κοντά στο 1.



Σχήμα 1.7

Σχετικές Ασκήσεις 21–24 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 2 Δώστε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$. ◄

Σύνθετες Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις μπορούν να συνδυαστούν με αθροίσματα $(f + g)$, διαφορές $(f - g)$, γινόμενα (fg), ή πηλίκα (f/g). Η διαδικασία που ονομάζεται *σύνθεση* παράγει επίσης νέες συναρτήσεις.

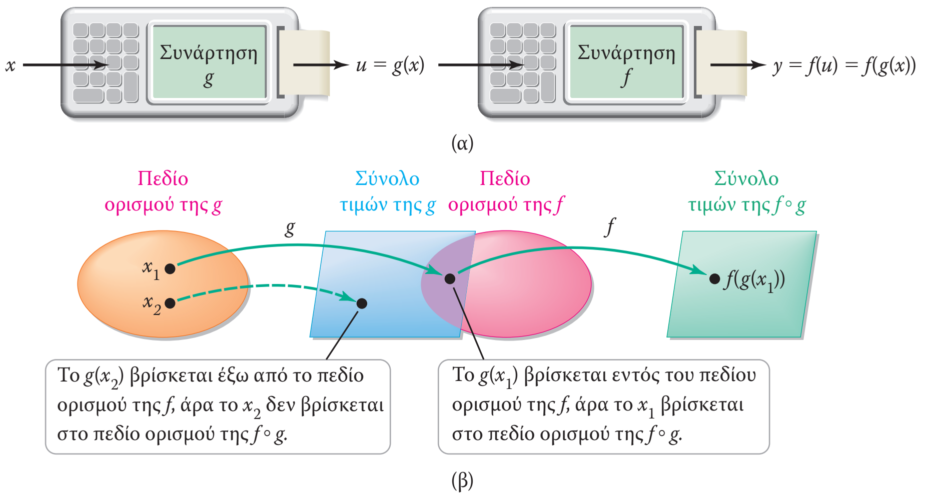
▶ Στη σύνθεση $y = f(g(x))$, f η f είναι η *εξωτερική* συνάρτηση και g είναι η *εσωτερική* συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ Σύνθετες Συναρτήσεις

Δεδομένων δύο συναρτήσεων f και g, η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται με $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Υπολογίζεται σε δύο στάδια: $y = f(u)$, όπου $u = g(x)$. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από όλες τα x του πεδίου ορισμού της g για τα οποία τα $u = g(x)$ να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f (Σχήμα 1.8).

▶ Έχετε συναντήσει τρεις διαφορετικούς συμβολισμούς για τα διαστήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν σε όλο το βιβλίο
- $[-2, 3)$ παράδειγμα με σημειογραφία διαστήματος,
- $-2 \le x < 3$ παράδειγμα με σημειογραφία ανισότητας,

και
- $\{x: -2 \le x < 3\}$ παράδειγμα με σημειογραφία συνόλου.



Σχήμα 1.8

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Σύνθετες συναρτήσεις και συμβολισμός Έστω οι $f(x) = 3x^2 - x$ και $g(x) = 1/x$. Απλοποιείστε τις παρακάτω εκφράσεις.

α. $f(5p + 1)$ **β.** $g(1/x)$ **γ.** $f(g(x))$ **δ.** $g(f(x))$

ΛΥΣΗ Σε κάθε περίπτωση οι συναρτήσεις ενεργούν στο όρισμά τους.

α. Το όρισμα της f είναι $5p + 1$, άρα

$$f(5p + 1) = 3(5p + 1)^2 - (5p + 1) = 75p^2 + 25p + 2.$$

β. Επειδή η g απαιτεί να πάρουμε το αντίστροφο του ορίσματος, παίρνουμε το αντίστροφο του $1/x$ και βρίσκουμε ότι $g(1/x) = 1/(1/x) = x$.

γ. Το όρισμα της f είναι $g(x)$, άρα

▶ Τα παραδείγματα 4γ και 4δ αποδεικνύουν ότι γενικώς,
$$f(g(x)) \neq g(f(x)).$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3 - x}{x^2}.$$

δ. Το όρισμα της g είναι $f(x)$, άρα

$$g(f(x)) = g(3x^2 - x) = \frac{1}{3x^2 - x}.$$

Σχετικές Ασκήσεις 25–36 ◀

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Σύνθετες συναρτήσεις Εντοπίστε πιθανές επιλογές για τις εσωτερικές και εξωτερικές συναρτήσεις στις ακόλουθες σύνθετες συναρτήσεις. Δώστε το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης.

α. $h(x) = \sqrt{9x - x^2}$ **β.** $h(x) = \dfrac{2}{(x^2 - 1)^3}$

ΛΥΣΗ

▶ Τεχνικές επίλυσης ανισοτήτων αναφέρονται στο Παράρτημα Α.

α. Μια προφανής εξωτερική συνάρτηση είναι $f(x) = \sqrt{x}$, η οποία ενεργεί στην εσωτερική συνάρτηση $g(x) = 9x - x^2$. Ως εκ τούτου, η h μπορεί να εκφραστεί ως $h = f \circ g$ or $h(x) = f(g(x))$. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από όλες τις τιμές του x ώστε $9x - x^2 \ge 0$. Η επίλυση αυτής της ανισότητας δίνει $\{x: 0 \le x \le 9\}$ ως πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

β. Μια καλή επιλογή για εξωτερική συνάρτηση είναι $f(x) = 2/x^3 = 2x^{-3}$, η οποία ενεργεί στην εσωτερική συνάρτηση $g(x) = x^2 - 1$. Συνεπώς, η h μπορεί να εκφραστεί ως $h = f \circ g$ ή $h(x) = f(g(x))$. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από όλες τις τιμές των $g(x)$ για τις οποίες $g(x) \neq 0$, δηλ. $\{x: x \neq \pm 1\}$.

Σχετικές Ασκήσεις 37–40 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 **Πιο σύνθετες συναρτήσεις** Αν $f(x) = \sqrt[3]{x}$ και $g(x) = x^2 - x - 6$, βρείτε (α) $g \circ f$ (β) $g \circ g$, και τα πεδία ορισμού τους.

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = \underbrace{(\sqrt[3]{x})}_{f(x)}{}^2 - \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{f(x)} - 6 = x^{2/3} - x^{1/3} - 6.$$

Επειδή τα πεδία ορισμού των f και g είναι $(-\infty, \infty)$, το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι επίσης $(-\infty, \infty)$.

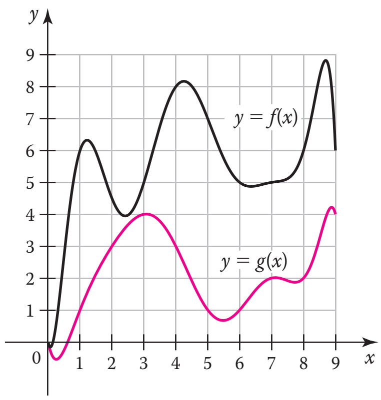
β. Εδώ έχουμε τη σύνθεση δύο πολυωνύμων:

$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x^2 - x - 6) \\ &= \underbrace{(x^2 - x - 6)^2}_{g(x)} - \underbrace{(x^2 - x - 6)}_{g(x)} - 6 \\ &= x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 13x + 36.\end{aligned}$$

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης των δύο πολυωνύμων είναι $(-\infty, \infty)$.

Σχετικές Ασκήσεις 41–54 ◄

ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ 3 Αν $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x^2$, βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$. ◄



Σχήμα 1.9

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 **Χρήση της γραφικής παράστασης για την εύρεση σύνθετων συναρτήσεων** Μέσω των γραφημάτων των f και g στο Σχήμα 1.9 βρείτε τις παρακάτω τιμές.

α. $f(g(3))$ **β.** $g(f(3))$ **γ.** $f(f(4))$ **δ.** $f(g(f(8)))$

ΛΥΣΗ

α. Τα γραφήματα δείχνουν ότι $g(3) = 4$ and $f(4) = 8$, so $f(g(3)) = f(4) = 8$.

β. Παρατηρούμε ότι $g(f(3)) = g(5) = 1$. Σημειώστε ότι $f(g(3)) \neq g(f(3))$.

γ. Εδώ $f(\underbrace{f(4)}_{8}) = f(8) = 6$.

δ. Αρχίζοντας από μέσα

$$f(g(\underbrace{f(8)}_{6})) = f(\underbrace{g(6)}_{1}) = f(1) = 6.$$

Σχετικές Ασκήσεις 55–56 ◄

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 **Χρήση πίνακα για την εύρεση σύνθετων συναρτήσεων** Βρείτε τις τιμές της συνάρτησης στον πίνακα για να υπολογίσετε τις ακόλουθες συνθέσεις.

α. $(f \circ g)(0)$ **β.** $g(f(-1))$ **γ.** $f(g(g(-1)))$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	3	4	2
$g(x)$	-1	0	-2	-3	-4

ΛΥΣΗ

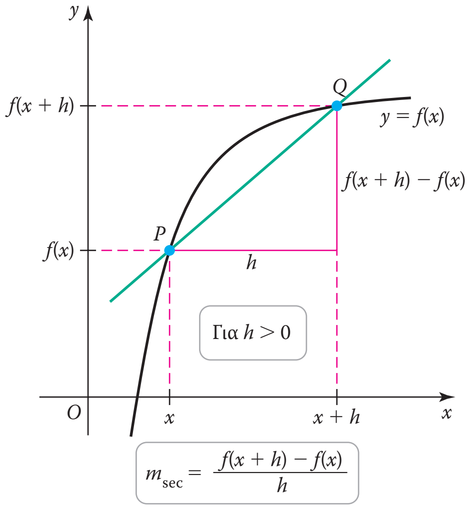
α. Μέσω του πίνακα βλέπουμε ότι $g(0) = -2$ και $f(-2) = 0$. Άρα $(f \circ g)(0) = 0$.

β. Επειδή $f(-1) = 1$ και $g(1) = -3$, έπεται ότι $g(f(-1)) = -3$.

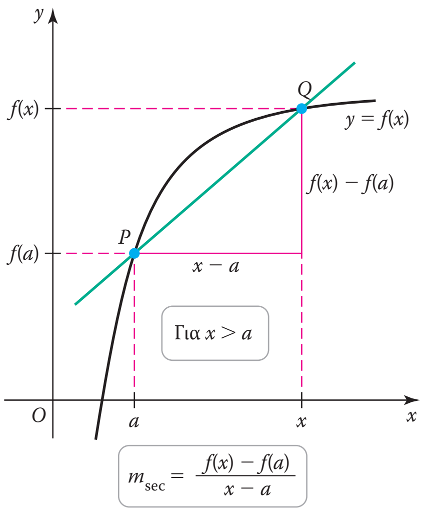
γ. Αρχίζοντας από την εσωτερική συνάρτηση,

$$f(g(\underbrace{g(-1)}_{0})) = f(\underbrace{g(0)}_{-2}) = f(-2) = 0.$$

Σχετικές Ασκήσεις 55–56 ◄



Σχήμα 1.10



Σχήμα 1.11

Τέμνουσες Ευθείες και Πηλίκο Διαφορών

Όπως θα δείτε σύντομα, οι κλίσεις των ευθειών και των καμπυλών διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο στον Απειροστικό Λογισμό. Το Σχήμα 1.10 δείχνει δύο σημεία $P(x, f(x))$ και $Q(x + h, f(x + h))$ στη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ όταν $h > 0$. Μια ευθεία γραμμή που διέρχεται μέσω δύο οποιωνδήποτε σημείων μιας καμπύλης λέγεται **τέμνουσα ευθεία**. Η σημασία της στη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού εξηγείται στα Κεφάλαια 2 και 3. Προς το παρόν, έχουμε επικεντρωθεί στην κλίση της τέμνουσας ευθείας που διέρχεται από τα P και Q, η οποία συμβολίζεται με m_{sec} και δίνεται από τον τύπο

$$m_{\text{sec}} = \frac{\text{change in } y}{\text{change in } x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ο τύπος της κλίσης $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ είναι επίσης γνωστός ως **πηλίκο διαφορών** και μπορεί να εκφραστεί με διάφορες μορφές ανάλογα με τον τρόπο που δίνονται οι συντεταγμένες των P και Q. Για παράδειγμα, για τις συντεταγμένες $P(a, f(a))$ και $Q(x, f(x))$ (Σχήμα 1.11), το πηλίκο διαφορών είναι

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ερμηνεύουμε την κλίση της τέμνουσας ευθείας σε αυτή τη μορφή ως τον **μέσο ρυθμό μεταβολής** της f στο διάστημα $[a, x]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Εργαζόμενοι με το με πηλίκο διαφορών

α. Απλοποιήστε το πηλίκο διαφορών $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, για $f(x) = 3x^2 - x$.

β. Απλοποιήστε το πηλίκο διαφορών $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, για $f(x) = x^3$.

ΛΥΣΗ

α. Αρχικά βλέπουμε ότι $f(x + h) = 3(x + h)^2 - (x + h)$. Αντικαθιστούμε αυτή την έκφραση στο πηλίκο διαφορών και απλοποιούμε:

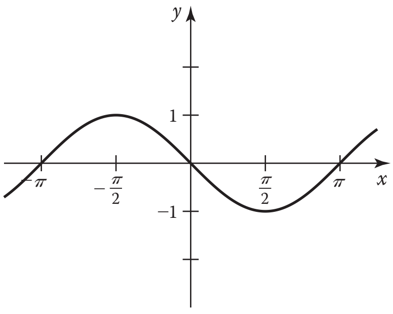
$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\overbrace{3(x+h)^2 - (x+h)}^{f(x+h)} - \overbrace{(3x^2 - x)}^{f(x)}}{h} \\
&= \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - (x+h) - (3x^2 - x)}{h} && \text{Ανάπτυγμα του } (x+h)^2. \\
&= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - x - h - 3x^2 + x}{h} && \text{Πράξεις.} \\
&= \frac{6xh + 3h^2 - h}{h} && \text{Αναγωγές.} \\
&= \frac{h(6x + 3h - 1)}{h} = 6x + 3h - 1. && \text{Παραγοντοποίηση και απλοποίηση.}
\end{aligned}$$

➤ Αντιμετωπίστε το $f(x + h)$, ως τη σύνθεση $f(g(x))$, όπου το $x + h$ παίζει το ρόλο του $g(x)$. Αυτό μπορεί να σας βοηθήσει να δημιουργήσετε ένα πρότυπο στο μυαλό σας πριν από την εύρεση του $f(x + h)$. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του Παραδείγματος 9α έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 - x; \\
f(12) &= 3 \cdot 12^2 - 12; \\
f(b) &= 3b^2 - b; \\
f(\text{math}) &= 3 \cdot \text{math}^2 - \text{math};
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$f(x + h) = 3(x + h)^2 - (x + h).$$



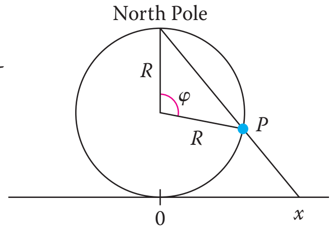
(ΣΤ)

28–29. Σημεία τομής *Βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνονται οι καμπύλες στα δοσμένα διαστήματα.*

28. $y = \sec x$ και $y = 2$ στο $(-\pi/2, \pi/2)$

29. $y = \sin x$ και $y = -\frac{1}{2}$ στο $(0, 2\pi)$

30. **Στερεογραφικές προβολές** Ένας κοινός τρόπος για να προβάλουμε μια σφαίρα (όπως Γη) σε ένα επίπεδο (όπως ένας χάρτης) είναι να χρησιμοποιήσουμε μια *στερεογραφική προβολή*. Εδώ εμφανίζεται η διδιάστατη μορφή της μεθόδου, η οποία απεικονίζει ένα κύκλο σε μια γραμμή. Έστω P ένα σημείο στο δεξί μισό του κύκλου ακτίνας R που προσδιορίζεται από τη γωνία φ. Βρείτε τη συνάρτηση $x = F(\varphi)$ που δίνει την τετμημένη x $(x \geq 0)$ που αντιστοιχεί στο φ για $0 < \varphi \leq \pi$.



Κεφάλαιο 1 Καθοδηγούμενες Εργασίες

Εφαρμογές του υλικού αυτού του κεφαλαίου και σχετικά θέματα μπορούν να βρεθούν στις ακόλουθες Καθοδηγούμενες Εργασίες. Για περισσότερες πληροφορίες, δείτε τον Πρόλογο.

- Δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων
- Προβλήματα σταθερού λόγου
- Λειτουργίες σε δράση I
- Λειτουργίες σε δράση II
- Προσφορά και ζήτηση
- Φάση και εύρος