Κεφάλαιο 5

Ειδικά ζητήματα σχετικά με το νεοκλασικό υπόδειγμα μεγέθυνσης

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε στην ικανότητα του νεοκλασικού υποδείγματος να ανταποκριθεί στα πραγματικά δεδομένα της οικονομίας και παρουσιάζουμε κάποια ειδικά ζητήματα και προεκτάσεις του υποδείγματος αυτού. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά παρουσιάζουμε τη λεγόμενη «αριθμητική της μεγέθυνσης» που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των συνιστωσών της οικονομικής μεγέθυνσης. Στη συνέχεια, διευρύνουμε το νεοκλασικό υπόδειγμα με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο, εισάγοντας σε αυτό το ανθρώπινο κεφάλαιο ως παραγωγικό συντελεστή. Το επόμενο βήμα στην ανάλυσή μας είναι ο εμπειρικός έλεγχος τόσο του νεοκλασικού υποδείγματος με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο όσο και της επέκτασης του υποδείγματος με ανθρώπινο κεφάλαιο. Στόχος είναι να εξεταστεί εάν τα συμπεράσματα των δύο αυτών εκδοχών του νεοκλασικού υποδείγματος συνάδουν με τα σχετικά αποτελέσματα των εμπειρικών ερευνών. Τέλος, εξετάζουμε την έννοια της σύγκλισης προκειμένου να ερμηνεύσουμε την εξέλιξη των εισοδηματικών διαφορών μεταξύ των χωρών μακροχρόνια.

5.2 Η αριθμητική της μεγέθυνσης

Στην ενότητα αυτή εστιάζουμε στις γενεσιουργές αιτίες (proximate causes) της οικονομικής μεγέθυνσης, επιχειρώντας να προσδιορίσουμε το ποσοστό της μεγέθυνσης που οφείλεται σε μεταβολές της παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής (κεφάλαιο και εργασία) καθώς επίσης και τη συνεισφορά της τεχνολογικής προόδου στην οικονομική μεγέθυνση. Η μεθοδολογία αυτή ονομάζεται Αριθμητική της μεγέθυνσης και θεμελιώθηκε από τον Solow (1957).

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής δίνεται από τη σχέση:

$$Y = F\left(K, L, A\right) \tag{5.1}$$

όπου Y : το συνολικό προϊόν, K: το κεφάλαιο, L: η εργασία, A : η τεχνολογική πρόοδος.

Από την ολική παράγωγο της παραπάνω σχέσης ως προς το χρόνο, παίρνουμε:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \overset{*(1/Y)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{K}{K}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{L}{L}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{A}{A}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}\frac{dK}{dt}\frac{1}{\mathrm{K}} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}\frac{dL}{dt}\frac{I}{L} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{A}{Y}\frac{dA}{dt}\frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$g_Y = \varepsilon_K g_K + \varepsilon_L n + x(t) \tag{5.2}$$

όπου $g_Y = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος, $\varepsilon_K = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}$: η ελαστικότητα προϊόντος ως προς το κεφάλαιο,[1] $g_K = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου, $\varepsilon_L = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}$: η ελαστικότητα προϊόντος ως προς την εργασία, $n = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού και

---

1. Τονίζεται ότι η ελαστικότητα προϊόντος ως προς το κεφάλαιο (αντίστοιχα εργασία) ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή του συνολικού προϊόντος μετά από μια μεταβολή του κεφαλαίου (αντίστοιχα της εργασίας) κατά 1%.

$x(t)=\frac{\partial F}{\partial A}\frac{A}{Y}\frac{dA}{dt}\frac{1}{A}$: η συνεισφορά της τεχνολογικής προόδου στην οικονομική μεγέθυνση.

Υπό την υπόθεση του τέλειου ανταγωνισμού των αγορών, κάθε συντελεστής παραγωγής αμείβεται με το οριακό του προϊόν. Δηλαδή, ισχύει ότι $r = MP_K = \partial F / \partial K$ και $w = MP_L = \partial F / \partial L$.

όπου *r*: η πρόσοδος του κεφαλαίου και *w*: ο εργατικός μισθός.

Από τις ελαστικότητες προϊόντος ως προς το κεφάλαιο και την εργασία προκύπτει ότι:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{\mathrm{Y}} = \frac{r \cdot K}{Y} \equiv a_K \tag{5.3}$$

$$\varepsilon_L = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y} = \frac{w \cdot L}{Y} \equiv a_L \tag{5.4}$$

όπου a_K : το μερίδιο του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν και

a_L : το μερίδιο της εργασίας στο συνολικό προϊόν.

Η σχέση (5.2) μπορεί, επομένως, να γραφεί ως εξής:

$$g_Y = \alpha_K g_K + \alpha_L n + x(t) \tag{5.5}$$

Η σχέση (5.5) αντανακλά το ποσοστό της συνεισφοράς της βελτίωσης της παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής και της τεχνολογικής προόδου στην οικονομική μεγέθυνση. Ο όρος $x(t)$ ονομάζεται «κατάλοιπο Solow» (Solow's residual) ή συντελεστής συνολικής παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής (total factor productivity). Πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος αυτός περιλαμβάνει τόσο τους διάφορους εξωγενείς παράγοντες που επηρεάζουν την οικονομική μεγέθυνση, όσο και τα διάφορα πιθανά σφάλματα μέτρησης των εισροών, κεφαλαίου και εργασίας. Πρόκειται, δηλαδή, για την αύξηση του συνολικού προϊόντος που δεν οφείλεται σε αυξήσεις των ποσοτήτων των συντελεστών παραγωγής. Με αναδιάταξη των όρων της εξίσωσης (5.5) λαμβάνουμε τη λεγόμενη θεμελιώδη εξίσωση της αριθμητικής της μεγέθυνσης (fundamental growth accounting equation)

$$x(t) = g_Y - a_K g_K - a_L n \tag{5.6}$$

Η τελευταία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση της συνεισφοράς της τεχνολογικής προόδου στη μεγέθυνση της οικονομίας, με δεδομένους τους ρυθμούς μεγέθυνσης του κεφαλαίου, της εργασίας και του συνολικού προϊόντος καθώς επίσης και με δεδομένα τα μερίδια των συντελεστών παραγωγής στο συνολικό προϊόν (Acemoglu 2009). Χρησιμοποιώντας δεδομένα εθνικών λογαριασμών, η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εμπειρική εκτίμηση της συνεισφοράς της τεχνολογικής προόδου. Η εκτιμηθείσα σχέση είναι η:

$$\hat{x}(t) = g_Y - a_K g_K - a_L n \tag{5.7}$$

όπου $\hat{x}(t)$: ο εκτιμημένος συντελεστής συνολικής παραγωγικότητας.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί ότι η σωστή εκτίμηση του συντελεστή συνολικής παραγωγικότητας προϋποθέτει τη σωστή μέτρηση των ρυθμών μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος, του κεφαλαίου και της εργασίας.[2] Αρχίζοντας από το ρυθμό μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού, ενδεχόμενα σφάλματα μέτρησης είναι δυνατόν να προκύψουν από το γεγονός ότι στο πλαίσιο του νεοκλασικού υποδείγματος με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο τα μεγέθη μετρώνται σε μονάδες αποτελεσματικής εργασίας. Συνεπώς, θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη οποιαδήποτε μεταβολή στο ανθρώπινο κεφάλαιο. Όσον αφορά το ρυθμό μεγέθυνσης του κεφαλαίου, θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι, σε αντίθεση με τα υποδείγματα που αντιλαμβάνονται το κεφάλαιο από την πλευρά των τελικών προϊόντων που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή άλλων προϊόντων, στην πράξη το κεφάλαιο αφορά κυρίως μηχανήματα. Η παρατήρηση αυτή συνεπάγεται ότι είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη οποιεσδήποτε μεταβολές στις σχετικές τιμές των μηχανημάτων. Σχετικά με το ρυθμό μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος, η λανθασμένη μέτρησή του είναι δυνατόν να οφείλεται σε αγνόηση των μεταβολών των σχετικών τιμών ή των μεταβολών στην ποιότητα των αγαθών. Τέλος, μεταξύ των άλλων αιτιών, λανθασμένη μέτρηση του συντελεστή συνολικής παραγωγικότητας μπορεί να αποτελεί απόρροια της υπόθεσης του τέλειου ανταγωνισμού σε όλες τις αγορές.

---

2. Για μια αναλυτική συζήτηση επί του θέματος βλ. Acemoglu, D. (2009), *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

5.2.1 Οικονομικές εφαρμογές

Παράδειγμα 1

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση Cobb - Douglas, με την τεχνολογική πρόοδο να είναι αυξάνουσα τους συντελεστές παραγωγής (ουδέτερη κατά Hicks):

$$Y = AK^{a}L^{1-a} \tag{5.1.1}$$

Να εξαχθεί η θεμελιώδης εξίσωση της αριθμητικής της μεγέθυνσης.

Λύση

Λογαριθμίζουμε τη συνάρτηση παραγωγής:

$$\ln Y = \ln\left(AK^{a}L^{1-a}\right) \Rightarrow$$

$$\ln Y = \ln A + \ln K^{a} + \ln L^{1-a} \Rightarrow$$

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L \tag{5.1.2}$$

Υπολογίζουμε την ολική παράγωγο της παραπάνω σχέσης ως προς το χρόνο:

$$\frac{d\ln Y}{dt} = \frac{d\ln A}{dt} + \frac{d(\alpha \ln K)}{dt} + \frac{d\left((1-\alpha)\ln L\right)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\ln Y}{dt} = \frac{d\ln A}{dt} + a\frac{d\ln K}{dt} + (1-\alpha)\frac{d\ln L}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} + a\frac{1}{K}\frac{dK}{dt} + (1-\alpha)\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} \Rightarrow$$

$$g_Y = g_A + ag_K + (1-a)n \Rightarrow$$

$$g_A = g_Y - ag_K - (1-a)n \tag{5.1.3}$$

Η σχέση (5.1.3) αποτελεί τη θεμελιώδη εξίσωση της αριθμητικής της μεγέθυνσης.

Παράδειγμα 2

Ας υποθέσουμε ότι η αγορά του παραγόμενου προϊόντος είναι ατελώς ανταγωνιστική ενώ οι αγορές των συντελεστών παραγωγής είναι τέλεια ανταγωνιστικές. Να αποδειχθεί ότι η τιμή του συντελεστή συνολικής παραγωγικότητας είναι μικρότερη στην περίπτωση αυτή απ' ό,τι στην περίπτωση που όλες οι αγορές είναι τέλεια ανταγωνιστικές.

Λύση

Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής:

$$Y = F\left(K, L, A\right) \tag{5.2.1}$$

Από την ολική παράγωγο της παραπάνω σχέσης ως προς το χρόνο, παίρνουμε:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \overset{*(1/Y)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{K}{K}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{L}{L}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{A}{A}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}\frac{dK}{dt}\frac{1}{K} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}\frac{dL}{dt}\frac{I}{L} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{A}{Y}\frac{dA}{dt}\frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$g_Y = \varepsilon_K g_K + \varepsilon_L n + x(t) \Rightarrow$$

$$x(t) = g_Y - \varepsilon_K g_K - \varepsilon_L n \tag{5.2.2}$$

όπου $g_Y = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος, $\varepsilon_K = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}$: η ελαστικότητα προϊόντος ως προς το κεφάλαιο, $g_K = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου, $\varepsilon_L = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}$: η ελαστικότητα προϊόντος ως προς την εργασία, $n = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού και $x(t) = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{A}{Y}\frac{dA}{dt}\frac{1}{A}$: η συνεισφορά της τεχνολογικής προόδου στην οικονομική μεγέθυνση.

Στην περίπτωση του ατελούς ανταγωνισμού στην αγορά του παραγόμενου προϊόντος, οι αμοιβές των συντελεστών παραγωγής είναι χαμηλότερες από τα οριακά τους προϊόντα. Πιο συγκεκριμένα, για το κεφάλαιο ισχύει ότι:

$$r < MP_K \Rightarrow$$

$$r < \frac{\partial Y}{\partial K} \overset{\cdot(K/Y)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{r \cdot K}{Y} < \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y} \Rightarrow$$

$$a_K < \varepsilon_K \qquad (5.2.3)$$

όπου a_K : το μερίδιο του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν. Από την (5.2.3) γίνεται κατανοητό ότι σε αυτή την περίπτωση η ελαστικότητα προϊόντος ως προς το κεφάλαιο είναι μεγαλύτερη από το μερίδιο του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν.

Αντίστοιχα για την εργασία ισχύει ότι:

$$w < MP_L \Rightarrow$$

$$w < \frac{\partial Y}{\partial L} \overset{\cdot(L/Y)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{w \cdot L}{Y} < \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y} \Rightarrow$$

$$a_L < \varepsilon_L \qquad (5.2.4)$$

όπου a_L : το μερίδιο της εργασίας στο συνολικό προϊόν. Κατανοούμε, επομένως, ότι σε αυτή την περίπτωση η ελαστικότητα προϊόντος ως προς την εργασία είναι μεγαλύτερη από το μερίδιο της εργασίας στο συνολικό προϊόν.

Με δεδομένες τις σχέσεις (5.2.3) και (5.2.4), ας υποθέσουμε ότι ισχύει:

$$\varepsilon_K = \mu \cdot \alpha_K \quad \text{και} \quad \varepsilon_L = \mu \cdot \alpha_L, \quad \mu > 1 \qquad (5.2.5)$$

Η σχέση (5.2.5) δηλώνει ότι οι ελαστικότητες προϊόντος ως προς το κεφάλαιο και την εργασία υπερβαίνουν τα αντίστοιχα μερίδια αγοράς κατά μ φορές. Η υπόθεση ότι το περιθώριο μ είναι κοινό και για τους δύο συντελεστές παραγωγής γίνεται για λόγους απλούστευσης.

Με αντικατάσταση της σχέσης (5.2.5) στην (5.2.2) παίρνουμε:

$$x(t) = g_Y - \varepsilon_K g_K - \varepsilon_L n \overset{(5.2.5)}{\Rightarrow}$$

$$x(t) = g_Y - \mu \cdot \alpha_K \cdot g_K - \mu \cdot \alpha_L \cdot n \Rightarrow$$

$$x(t) = g_Y - \mu\left(\alpha_K \cdot g_K + \alpha_L \cdot n\right) \tag{5.2.6}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (5.2.6) που αφορά τον ατελή ανταγωνισμό στην αγορά του παραγόμενου προϊόντος με τη «θεμελιώδη εξίσωση της αριθμητικής της μεγέθυνσης» [σχέση (5.6)] που προϋποθέτει την ύπαρξη τέλειου ανταγωνισμού σε όλες τις εμπλεκόμενες αγορές και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu > 1$, συμπεραίνουμε ότι η τιμή του συντελεστή συνολικής παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής [$x(t)$ (total factor productivity)] είναι μικρότερη στην περίπτωση του ατελούς ανταγωνισμού.

5.3 Το νεοκλασικό υπόδειγμα με ανθρώπινο κεφάλαιο

Επεκτείνουμε το νεοκλασικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης με τεχνολογική πρόοδο, εισάγοντας το ανθρώπινο κεφάλαιο σε αυτό. Η φιλοσοφία πίσω από την επέκταση αυτή στηρίζεται στο γεγονός ότι οι μονάδες εργασίας που προσφέρονται δεν είναι εξίσου αποτελεσματικές. Αντίθετα, κάθε άτομο φέρει στην αγορά εργασίας δεξιότητες, γνώσεις και άλλα χαρακτηριστικά, που αποτελούν το λεγόμενο ανθρώπινο κεφάλαιο, και αυξάνουν την παραγωγικότητα της εργασίας. Οι υποθέσεις του υποδείγματος έχουν ως εξής:

1. Ο χρόνος είναι συνεχής και άπειρος.
2. Σε κάθε χρονική περίοδο χρησιμοποιούνται φυσικό κεφάλαιο, εργασία και ανθρώπινο κεφάλαιο στην παραγωγική διαδικασία.
3. Υπάρχει δυνατότητα υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών παραγωγής.
4. Η τεχνολογία είναι αυξάνουσα την εργασία, δηλαδή ουδέτερη κατά Harrod.
5. Τα οικονομούντα άτομα αποταμιεύουν ένα σταθερό ποσοστό του εισο-

δήματός τους (s_k) για να το επενδύσουν σε φυσικό κεφάλαιο. Επίσης, αποταμιεύουν ένα άλλο σταθερό ποσοστό του εισοδήματός τους (s_h) για να το επενδύσουν σε ανθρώπινο κεφάλαιο.

6. Το φυσικό και το ανθρώπινο κεφάλαιο αποσβένονται με σταθερούς ρυθμούς μ_k και μ_h αντίστοιχα.
7. Το εργατικό δυναμικό μεγεθύνεται με έναν σταθερό και εξωγενώς προσδιορισμένο ρυθμό n.
8. Ο ρυθμός τεχνολογικής προόδου είναι σταθερός και ίσος με g_A.
9. Όλες οι αγορές (αγορές συντελεστών παραγωγής και αγορά του τελικού αγαθού) είναι τέλεια ανταγωνιστικές.
10. Η υπό εξέταση οικονομία είναι κλειστή, δηλαδή δεν γίνονται συναλλαγές με άλλες οικονομίες.

Οι υποθέσεις (2), (3) και (4) συνεπάγονται ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής:

$$Y = F\left(K, H, AL\right) \tag{5.8}$$

όπου H : το ανθρώπινο κεφάλαιο. Πρέπει να επισημανθεί ότι η παραπάνω συνάρτηση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. Είναι ομογενής πρώτου βαθμού ως προς τις ποσότητες όλων των εισροών, επομένως υπάρχουν σταθερές αποδόσεις στην κλίμακα.
ii. Η συνάρτηση παραγωγής είναι συνεχής και τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη.
iii. Το οριακό προϊόν κάθε συντελεστή παραγωγής είναι θετικό και φθίνον. Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial K} = F_K > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \frac{\partial F^2(K,H,AL)}{\partial K^2} = F_{KK} < 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial L} = F_L > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \frac{\partial F^2(K,H,AL)}{\partial L^2} = F_{LL} < 0 \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial H} = \frac{\partial F(K,H,AL)}{\partial H} = F_H > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial H^2} = \frac{\partial F^2(K,H,AL)}{\partial H^2} = F_{HH} < 0$$

iv. Ικανοποιούνται οι λεγόμενες συνθήκες Inada, δηλαδή:

$$\lim_{K\to\infty} F_K(K,H,AL)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{K\to 0} F_K(K,H,AL)=\infty, \quad \forall H, AL>0$$

$$\lim_{L\to\infty} F_L(K,H,AL)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{L\to 0} F_L(K,H,AL)=\infty \quad \forall K,H,A>0 \text{ και}$$

$$\lim_{H\to\infty} F_H(K,H,AL)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{H\to 0} F_H(K,H,AL)=\infty \quad \forall K, AL>0$$

Από την πέμπτη υπόθεση, σε κάθε χρονική στιγμή οι συναρτήσεις αποταμίευσης των ατόμων για επένδυση σε φυσικό και σε ανθρώπινο κεφάλαιο είναι αντίστοιχα:

$$S_k = s_k Y \tag{5.9}$$

και

$$S_h = s_h Y \tag{5.10}$$

όπου S_k : η συνολική αποταμίευση για επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο, S_h : η συνολική αποταμίευση για επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο, s_k : το ποσοστό αποταμίευσης για επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο, s_h : το ποσοστό αποταμίευσης για επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο και Y : το συνολικό προϊόν.

Επιπλέον, με βάση την έκτη υπόθεση προκύπτει ότι, σε κάθε χρονική στιγμή, η ακαθάριστη επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο ισούται με το άθροισμα της καθαρής επένδυσης σε φυσικό κεφάλαιο, που ορίζεται ως η μεταβολή του αποθέματος φυσικού κεφαλαίου, και της απόσβεσης του φυσικού κεφαλαίου. Αντίστοιχα, σε κάθε χρονική στιγμή, η ακαθάριστη επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο ισούται με το άθροισμα της καθαρής επένδυσης σε ανθρώπινο κεφάλαιο, που ορίζεται ως η μεταβολή του αποθέματος ανθρώπινου κεφαλαίου, και της απόσβεσης του ανθρώπινου κεφαλαίου. Αλγεβρικά, για το φυσικό κεφάλαιο ισχύει:

$$I_k^{gross} = I_k^{net} + \mu_k K \Rightarrow$$

$$I_k^{gross} = \frac{dK}{dt} + \mu_k K \tag{5.11}$$

όπου I_k^{gross} : η ακαθάριστη επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο, I_k^{net} : η καθαρή επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο και μ_k : ο ρυθμός απόσβεσης του φυσικού κεφαλαίου. Αντίστοιχα, σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, για το ανθρώπινο κεφάλαιο ισχύει:

$$I_h^{gross} = I_h^{net} + \mu_h H \Rightarrow$$

$$I_h^{gross} = \frac{dH}{dt} + \mu_h H \tag{5.12}$$

όπου I_h^{gross} : η ακαθάριστη επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο, I_h^{net} : η καθαρή επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο και μ_h: ο ρυθμός απόσβεσης του ανθρώπινου κεφαλαίου.

Λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα περί ύπαρξης σταθερών αποδόσεων κλίμακας στην οικονομία, η συνάρτηση παραγωγής σε όρους αποτελεσματικής εργασίας θα είναι της μορφής:

$$\hat{y} = \frac{Y}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, \frac{H}{AL}, \frac{AL}{AL}\right) = F\left(\frac{K}{AL}, \frac{H}{AL}, 1\right) \Rightarrow$$

$$\hat{y} = f\left(\hat{k}, \hat{h}\right) \tag{5.13}$$

όπου $\hat{y}$: το προϊόν ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας, $\hat{k}$: το φυσικό κεφάλαιο ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας και $\hat{h}$: το ανθρώπινο κεφάλαιο ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας.

Από τον ορισμό του φυσικού κεφαλαίου ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας, έχουμε:

$$\hat{k} = \frac{K}{AL}.$$

Παίρνοντας το λογάριθμο και στα δύο μέλη:

$$\ln \hat{k} = \ln\left(\frac{K}{AL}\right) \Rightarrow$$

$$\ln \hat{k} = \ln K - \ln(AL) \Rightarrow$$

$$\ln \hat{k} = \ln K - \ln A - \ln L \tag{5.14}$$

Υπολογίζουμε την ολική παράγωγο της παραπάνω σχέσης ως προς το χρόνο:

$$\frac{d\ln\hat{k}}{dt}=\frac{d\left(\ln K-\ln A-\ln L\right)}{dt}\Rightarrow$$

$$\frac{d\ln\hat{k}}{dt}=\frac{d\ln K}{dt}-\frac{d\ln A}{dt}-\frac{d\ln L}{dt}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\hat{k}}\frac{d\hat{k}}{dt}=\frac{1}{K}\frac{dK}{dt}-\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} \qquad (5.14.1)$$

Τώρα, σύμφωνα με την πέμπτη υπόθεση ισχύει ότι άτομα αποταμιεύουν ένα σταθερό ποσοστό του εισοδήματός τους $\left(s_k\right)$ για να το επενδύσουν σε φυσικό κεφάλαιο. Συνεπώς, η συνθήκη ισορροπίας συνεπάγεται ότι η αποταμίευση σε φυσικό κεφάλαιο ισούται με την ακαθάριστη επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο:

$$S_k=I_k^{gross}\overset{(5.11)}{\Rightarrow}$$

$$S_k=\frac{dK}{dt}+\mu_k K\overset{(5.9)}{\Rightarrow}$$

$$s_k Y=\frac{dK}{dt}+\mu_k K\Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt}=s_k Y-\mu_k K \qquad (5.15)$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση (5.15) στην (5.14.1) και παίρνουμε:

$$\frac{1}{\hat{k}}\frac{d\hat{k}}{dt}=\frac{1}{K}\frac{dK}{dt}-\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\overset{(5.15)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{\hat{k}}\frac{d\hat{k}}{dt}=\frac{1}{K}\left(s_k Y-\mu_k K\right)-\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\overset{*\left(\hat{k}=\frac{K}{AL}\right)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt}=\frac{1}{K}\left(s_k Y-\mu_k K\right)\hat{k}-\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\hat{k}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\hat{k}\Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = s_k \frac{Y}{AL} - \mu_k \hat{k} - \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\hat{k} - \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\hat{k} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = s_k f\left(\hat{k}, \hat{h}\right) - \left(\mu_k + g_A + n\right)\hat{k} \tag{5.16}$$

όπου $g_A = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης της τεχνολογικής προόδου και $n = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού.

Η εξίσωση (5.16) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του φυσικού κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας. Πρέπει να επισημανθεί ότι ο όρος $s_k f\left(\hat{k}, \hat{h}\right)$ αποτελεί την αποταμίευση ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας σε φυσικό κεφάλαιο. Από την άλλη πλευρά, ο όρος $\left(\mu_k + g_A + n\right)\hat{k}$ εκφράζει την επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο που απαιτείται έτσι ώστε το φυσικό κεφάλαιο ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας να διατηρηθεί σταθερό στο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται, με δεδομένους τους ρυθμούς μεγέθυνσης της τεχνολογικής προόδου (g_A) και του εργατικού δυναμικού (n) καθώς επίσης και το ποσοστό απόσβεσης του φυσικού κεφαλαίου (μ_k).

Αντίστοιχα, από τον ορισμό του ανθρώπινου κεφαλαίου ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας, έχουμε:

$$\hat{h} = \frac{H}{AL}.$$

Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη, παίρνουμε:

$$\ln\hat{h} = \ln\left(\frac{H}{AL}\right) \Rightarrow$$

$$\ln\hat{h} = \ln H - \ln\left(AL\right) \Rightarrow$$

$$\ln\hat{h} = \ln H - \ln A - \ln L \tag{5.17}$$

Υπολογίζουμε την ολική παράγωγο της παραπάνω σχέσης ως προς το χρόνο:

$$\frac{d\ln\hat{h}}{dt}=\frac{d\left(\ln H-\ln A-\ln L\right)}{dt}\Rightarrow$$

$$\frac{d\ln\hat{h}}{dt}=\frac{d\ln H}{dt}-\frac{d\ln A}{dt}-\frac{d\ln L}{dt}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\hat{h}}\frac{d\hat{h}}{dt}=\frac{1}{H}\frac{dH}{dt}-\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} \tag{5.17.1}$$

Τώρα, σύμφωνα με την πέμπτη υπόθεση ισχύει επίσης ότι άτομα αποταμιεύουν ένα σταθερό ποσοστό του εισοδήματός τους $\left(s_h\right)$ προκειμένου να το επενδύσουν σε ανθρώπινο κεφάλαιο. Συνεπώς, από τη συνθήκη ισορροπίας προκύπτει ότι η αποταμίευση σε ανθρώπινο κεφάλαιο ισούται με την ακαθάριστη επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο:

$$S_h=I_h^{gross}\overset{(5.12)}{\Rightarrow}$$

$$S_h=\frac{dH}{dt}+\mu_h H\overset{(5.10)}{\Rightarrow}$$

$$s_h Y=\frac{dH}{dt}+\mu_h H\Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dt}=s_h Y-\mu_h H \tag{5.18}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (5.18) στην (5.17.1) παίρνουμε:

$$\frac{1}{\hat{h}}\frac{d\hat{h}}{dt}=\frac{1}{H}\frac{dH}{dt}-\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\overset{(5.18)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{\hat{h}}\frac{d\hat{h}}{dt}=\frac{1}{H}\left(s_h Y-\mu_h H\right)-\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\overset{*\left(\hat{h}=\frac{H}{AL}\right)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt}=\frac{1}{H}\left(s_h Y-\mu_h H\right)\hat{h}-\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\hat{h}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\hat{h}\Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = s_h \frac{Y}{AL} - \mu_h \hat{h} - \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\hat{h} - \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\hat{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = s_h f\left(\hat{k}, \hat{h}\right) - \left(\mu_h + g_A + n\right)\hat{h} \tag{5.19}$$

όπου $g_A = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης της τεχνολογικής προόδου και $n = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού.

Κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση του φυσικού κεφαλαίου, η εξίσωση (5.19) αποτελεί την εξίσωση κίνησης του ανθρώπινου κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας. Ο όρος $s_h f(\hat{k}, \hat{h})$ αντανακλά την αποταμίευση ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας σε ανθρώπινο κεφάλαιο. Αντίθετα, ο όρος $\left(\mu_h + g_A + n\right)\hat{h}$ δηλώνει την επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο που απαιτείται έτσι ώστε το ανθρώπινο κεφάλαιο ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας να διατηρηθεί σταθερό, με δεδομένους τους ρυθμούς μεγέθυνσης της τεχνολογικής προόδου (g_A) και του εργατικού δυναμικού (n) καθώς επίσης και το ποσοστό απόσβεσης του ανθρώπινου κεφαλαίου (μ_h). Η γενική λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (5.16) και (5.19) αντιπροσωπεύει τη διαχρονική πορεία των λόγων φυσικού κεφαλαίου - αποτελεσματικής εργασίας και ανθρώπινου κεφαλαίου - αποτελεσματικής εργασίας.

Στην ισορροπία σταθερής κατάστασης ισχύει ότι:

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\hat{h}}{dt} = 0 \tag{5.20}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (5.16) και (5.19), τα επίπεδα του φυσικού κεφαλαίου ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας ($\hat{k}^*$) και του ανθρώπινου κεφαλαίου ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας ($\hat{h}^*$) ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$s_k f\left(\hat{k}^*, \hat{h}^*\right) - \left(\mu_k + g_A + n\right)\hat{k}^* = 0 \tag{5.21}$$

$$s_h f\left(\hat{k}^*, \hat{h}^*\right) - \left(\mu_h + g_A + n\right)\hat{h}^* = 0 \tag{5.22}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει δύο λύσεις, εκ των οποίων η λύση $\left(\hat{k}^*, \hat{h}^*\right) = (0,0)$ απορρίπτεται, καθώς απαιτούνται θετικές ποσότητες εισροών για την παραγωγή οποιασδήποτε μονάδας προϊόντος. Αποδεικνύεται ότι η δεύτερη λύση, $\hat{k}^* > 0$ και $\hat{h}^* > 0$, είναι μοναδική (Acemoglu 2009). Η απόδειξη βρίσκεται έξω από τους σκοπούς της παρούσας ανάλυσης.

Όσον αφορά τους ρυθμούς μεγέθυνσης στην ισορροπία σταθερής κατάστασης, και αρχίζοντας από τα κατά κεφαλή μεγέθη, ισχύει ότι $\hat{y}^* = y / A \Rightarrow y = \hat{y}^* \cdot A$. Συνεπώς, ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλή προϊόντος θα είναι:

$$g_y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{\hat{y}^*}{y}\frac{dA}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = g_A \tag{5.23}$$

Αντίστοιχα για το κατά κεφαλή φυσικό κεφάλαιο, με δεδομένο ότι ισχύει πως $\hat{k}^* = k / A \Rightarrow k = \hat{k}^* \cdot A$, ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλή φυσικού κεφαλαίου θα είναι:

$$g_k = \frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\hat{k}^*}{k}\frac{dA}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = g_A \tag{5.24}$$

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{h}^* = h / A \Rightarrow h = \hat{h}^* \cdot A$, ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλή ανθρώπινου κεφαλαίου θα είναι:

$$g_h = \frac{1}{h}\frac{dh}{dt} = \frac{\hat{h}^*}{h}\frac{dA}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = g_A \tag{5.25}$$

Όσον αφορά τα συνολικά μεγέθη, για το συνολικό προϊόν ισχύει ότι

$\hat{y}^* = Y/(AL) \Rightarrow y = \hat{y}^* \cdot (AL)$. Ο ρυθμός μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος υπολογίζεται ως εξής:

$$g_Y = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{\hat{y}^*}{Y}\frac{d(AL)}{dt} = \frac{1}{AL}\left(A\frac{dL}{dt} + L\frac{dA}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$g_Y = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = n + g_A \qquad (5.26)$$

Ομοίως, για το φυσικό κεφάλαιο ισχύει ότι $\hat{k}^* = K/(AL) \Rightarrow K = \hat{k}^* \cdot (AL)$. Ο ρυθμός μεγέθυνσής του θα είναι:

$$g_K = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt} = \frac{\hat{k}^*}{K}\frac{d(AL)}{dt} = \frac{1}{AL}\left(A\frac{dL}{dt} + L\frac{dA}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$g_K = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = n + g_A \qquad (5.27)$$

Τέλος, για το ανθρώπινο κεφάλαιο στην ισορροπία σταθερής κατάστασης ισχύει ότι $\hat{h}^* = H/(AL) \Rightarrow H = \hat{h}^* \cdot (AL)$. Συνεπώς, ο ρυθμός μεγέθυνσής του προκύπτει ως εξής:

$$g_H = \frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = \frac{\hat{h}^*}{H}\frac{d(AL)}{dt} = \frac{1}{AL}\left(A\frac{dL}{dt} + L\frac{dA}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$g_H = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = n + g_A \qquad (5.28)$$

Γίνεται, επομένως, κατανοητό ότι **στο πλαίσιο του νεοκλασικού υποδείγματος μεγέθυνσης με ανθρώπινο κεφάλαιο, τα κατά κεφαλή μεγέθη αυξάνονται με το ρυθμό μεγέθυνσης της τεχνολογικής προόδου (g_A), ενώ τα συνολικά μεγέθη αυξάνονται με ρυθμό ίσο με το άθροισμα του ρυθμού μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού (n) και της τεχνολογικής προόδου (g_A), δηλαδή με το ρυθμό μεγέθυνσης της αποτελεσματικής εργασίας.** Αυτή η παρατήρηση συνάδει με τα τυποποιημένα χαρακτηριστικά της οικονομικής μεγέθυνσης που υπαγορεύουν ότι ο λόγος προϊόντος - εργασίας και ο λόγος φυσικού κεφαλαίου - εργασίας αυξάνονται διαχρονικά.

Στην ειδική περίπτωση που η τεχνολογία παραγωγής περιγράφεται από μια συνάρτηση Cobb - Douglas, η συνάρτηση παραγωγής θα είναι της μορφής:

$$Y = K^a H^b (AL)^{1-a-b}, \ a,b \in (0,1) \ \text{και} \ a+b<1 \tag{5.29}$$

Σε όρους αποτελεσματικής εργασίας, η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\hat{y} = \left(\hat{k}\right)^a \left(\hat{h}\right)^b \tag{5.30}$$

όπου: $\hat{y} = Y/(AL)$, $\hat{k} = K/(AL)$ και $\hat{h} = H/(AL)$.

Από την εξίσωση κίνησης του φυσικού κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας [σχέση (5.16)] προκύπτει:

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = s_k f\left(\hat{k},\hat{h}\right) - (\mu_k + g_A + n)\hat{k} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = s_k \left(\hat{k}\right)^a \left(\hat{h}\right)^b - (\mu_k + g_A + n)\hat{k} \tag{5.31}$$

Αντίστοιχα, από την εξίσωση κίνησης του ανθρώπινου κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας [σχέση (5.19)] προκύπτει:

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = s_h f\left(\hat{k},\hat{h}\right) - (\mu_h + g_A + n)\hat{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = s_h \left(\hat{k}\right)^a \left(\hat{h}\right)^b - (\mu_h + g_A + n)\hat{h} \tag{5.32}$$

Στην ισορροπία σταθερής κατάστασης, τόσο το φυσικό κεφάλαιο ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας όσο και το ανθρώπινο κεφάλαιο ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας παραμένουν σταθερά. Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\frac{d\hat{k}}{dt}=0 \quad \text{και} \quad \frac{d\hat{h}}{dt}=0 \tag{5.33}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (5.31) και (5.32) οι τιμές ισορροπίας του φυσικού κεφαλαίου ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας $\left(\hat{k}^*\right)$ και του ανθρώπινου κεφαλαίου ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας $\left(\hat{h}^*\right)$ ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$s_k\left(\hat{k}^*\right)^a\left(\hat{h}^*\right)^b-\left(\mu_k+g_A+n\right)\hat{k}^*=0 \tag{5.34}$$

$$s_h\left(\hat{k}^*\right)^a\left(\hat{h}^*\right)^b-\left(\mu_h+g_A+n\right)\hat{h}^*=0 \tag{5.35}$$

Από την επίλυση του συστήματος, λαμβάνουμε:

$$\hat{k}^*=\left(\left(\frac{s_k}{n+g_A+\mu_k}\right)^{1-b}\left(\frac{s_h}{n+g_A+\mu_h}\right)^{b}\right)^{\frac{1}{1-a-b}} \tag{5.36}$$

$$\hat{h}^*=\left(\left(\frac{s_k}{n+g_A+\mu_k}\right)^{a}\left(\frac{s_h}{n+g_A+\mu_h}\right)^{1-a}\right)^{\frac{1}{1-a-b}} \tag{5.37}$$

Επιπλέον, με αντικατάσταση των τιμών ισορροπίας (5.36) και (5.37) στη συνάρτηση παραγωγής (5.30), λαμβάνουμε το επίπεδο προϊόντος ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας στη μακροχρόνια ισορροπία. Το τελευταίο είναι ίσο με:

$$\hat{y}^*=\left(\frac{s_k}{n+g_A+\mu_k}\right)^{\frac{b}{1-a-b}}\left(\frac{s_h}{n+g_A+\mu_h}\right)^{\frac{a}{1-a-b}} \tag{5.38}$$

Από τις σχέσεις (5.36), (5.37) και (5.38) παρατηρούμε ότι μια μεταβολή είτε του ποσοστού αποταμίευσης για επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο $\left(s_k\right)$ είτε του ποσοστού αποταμίευσης για επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο $\left(s_h\right)$ επηρεάζει τόσο τα επίπεδα των λόγων φυσικού και ανθρώπινου κεφαλαίου ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας όσο και το επίπεδο ισορροπίας του προϊόντος ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας στην ισορροπία σταθερής κατάστασης. Ωστόσο, οι ρυθμοί μεγέθυνσης τόσο των κατά κεφαλή όσο και των συνολικών μεγεθών παραμένουν σταθεροί και ίσοι με g_A και (g_A+n) αντίστοιχα.

5.3.1 Οικονομική εφαρμογή

Έστω μια υποθετική οικονομία με συνάρτηση παραγωγής που περιγράφεται από τη σχέση:

$$\mathrm{Y} = (K)^{1/2}(H)^{1/4}(AL)^{1/4}$$

Επιπλέον, δίνονται τα εξής: ποσοστό αποταμίευσης για επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο (s_k) ίσο με 1/2, ποσοστό αποταμίευσης για επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο (s_h) ίσο με 1/4, ρυθμός μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού (n) ίσος με 0,2, ποσοστό απόσβεσης φυσικού κεφαλαίου (μ_k) ίσο με 0,2, ποσοστό απόσβεσης ανθρώπινου κεφαλαίου (μ_h) ίσο με 0,1 και ρυθμός μεγέθυνσης της τεχνολογικής προόδου (g_A) ίσος με 0,1.

Α) Να υπολογιστούν τα επίπεδα των λόγων φυσικού κεφαλαίου - αποτελεσματικής εργασίας $\left(\hat{k}\right)$ και ανθρώπινου κεφαλαίου - αποτελεσματικής εργασίας $\left(\hat{h}\right)$ για τα οποία εξασφαλίζεται ισόρροπη μεγέθυνση.

Β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεγέθυνσης του φυσικού κεφαλαίου (K) και του εισοδήματος (Y) στην κατάσταση ισόρροπης μεγέθυνσης;

Λύση

Α) Η συνάρτηση παραγωγής μπορεί να γραφεί σε όρους αποτελεσματικής εργασίας ως εξής:

$$\hat{y} = \frac{Y}{AL} = \frac{(K)^{1/2}(H)^{1/4}(AL)^{1/4}}{AL} \Rightarrow$$

$$\hat{y} = \frac{\left(K\right)^{1/2}\left(H\right)^{1/4}\left(AL\right)^{1/4}}{\left(AL\right)^{1/2}\left(AL\right)^{1/4}\left(AL\right)^{1/4}} \Rightarrow$$

$$\hat{y} = \left(\frac{K}{AL}\right)^{1/2}\left(\frac{H}{AL}\right)^{1/4}\left(\frac{AL}{AL}\right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$\hat{y} = \left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4} \tag{5.3.1}$$

Η εξίσωση κίνησης του λόγου $\hat{k} = K / AL$ δίνεται από την παρακάτω σχέση [σχέση (5.16)]:

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = s_k f\left(\hat{k},\hat{h}\right) - \left(\mu_k + g_A + n\right)\hat{k} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4} - \left(0,2 + 0,1 + 0,2\right)\hat{k} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4} - \frac{1}{2}\hat{k} \tag{5.3.2}$$

Στην ισορροπία σταθερής κατάστασης ισχύει ότι:

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \overset{(5.3.2)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{2}\left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4} - \frac{1}{2}\hat{k} = 0 \tag{5.3.3}$$

Ομοίως για το ανθρώπινο κεφάλαιο, η εξίσωση κίνησης του λόγου $\hat{h} = H / AL$ δίνεται από την παρακάτω σχέση [σχέση (5.19)]:

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = s_h f\left(\hat{k},\hat{h}\right) - \left(\mu_h + g_A + n\right)\hat{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = \frac{1}{4}\left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4} - \left(0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2\right)\hat{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = \frac{1}{4}\left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4} - \frac{4}{10}\hat{h} \qquad (5.3.4)$$

Στην ισορροπία σταθερής κατάστασης ισχύει ότι:

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = 0 \overset{(5.3.4)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{4}\left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4} - \frac{4}{10}\hat{h} = 0 \qquad (5.3.5)$$

Τα επίπεδα των λόγων φυσικού κεφαλαίου - αποτελεσματικής εργασίας και ανθρώπινου κεφαλαίου - αποτελεσματικής εργασίας για τα οποία εξασφαλίζεται ισόρροπη μεγέθυνση προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (5.3.3) και (5.3.5). Συνεπώς, αρχικά λύνουμε την εξίσωση (5.3.3) ως προς το λόγο $\hat{k}$.

$$\frac{1}{2}\left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4} - \frac{1}{2}\hat{k} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4} = \hat{k} \Rightarrow$$

$$\frac{\hat{k}}{\left(\hat{k}\right)^{1/2}} = \left(\hat{h}\right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$\left(\hat{k}\right)^{1/2} = \left(\hat{h}\right)^{1/4}$$

$$\hat{k}^{*} = \left(\hat{h}^{*}\right)^{1/2} \qquad (5.3.6)$$

όπου $\hat{k}^*$ και $\hat{h}^*$: οι τιμές ισορροπίας του φυσικού κεφαλαίου ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας και του ανθρώπινου κεφαλαίου ανά αποτελεσματική μονάδα εργασίας αντίστοιχα.

Αντικαθιστούμε την παραπάνω σχέση στην εξίσωση (5.3.5):

$$\frac{1}{4}\left(\hat{k}\right)^{1/2}\left(\hat{h}\right)^{1/4}-\frac{4}{10}\hat{h}=0\overset{(5.3.6)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{4}\left(\left(\hat{h}^*\right)^{1/2}\right)^{1/2}\left(\hat{h}^*\right)^{1/4}-\frac{4}{10}\hat{h}^*=0\overset{(5.3.6)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{4}\left(\hat{h}^*\right)^{1/4}\left(\hat{h}^*\right)^{1/4}-\frac{4}{10}\hat{h}^*=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}\left(\hat{h}^*\right)^{2/4}=\frac{4}{10}\hat{h}^*\Rightarrow$$

$$\frac{\left(\hat{h}^*\right)^{1/2}}{\hat{h}^*}=\frac{16}{10}\Rightarrow$$

$$\left(\hat{h}^*\right)^{-1/2}=\frac{16}{100}\Rightarrow$$

$$\hat{h}^*=\left(\frac{10}{16}\right)^2=\frac{100}{256}\Rightarrow$$

$$\hat{h}^*=0,390625$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στη σχέση (5.3.6) και παίρνουμε:

$$\hat{k}^*=\left(\left(\frac{10}{16}\right)^2\right)^{1/2}=\frac{10}{16}=0,625$$

Συνεπώς, στην κατάσταση ισόρροπης μεγέθυνσης ισχύει ότι

$\left(\hat{k}^*, \hat{h}^*\right) = \left(0,625\,,\, 0,390625\right)$.

Β) Στην κατάσταση ισόρροπης μεγέθυνσης, το συνολικό προϊόν ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας θα είναι ίσο με:

$$\hat{y}^* = \left(\frac{10}{16}\right)^{1/2}\left(\frac{100}{256}\right)^{1/4} = \frac{5}{8} = 0,625$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$\hat{y}^* = Y/\left(AL\right) \Rightarrow Y = \hat{y}^* \cdot \left(AL\right) \Rightarrow Y = \left(0,625\right)\cdot\left(AL\right)$$

Ο ρυθμός μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος υπολογίζεται ως εξής:

$$g_Y = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{0,625}{Y}\frac{d\left(AL\right)}{dt} = \frac{1}{AL}\left(A\frac{dL}{dt} + L\frac{dA}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$g_Y = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = n + g_A \Rightarrow$$

$$g_Y = 0,2 + 0,1 = 0,3$$

Ομοίως, για το φυσικό κεφάλαιο ισχύει ότι $\hat{k}^* = K/\left(AL\right) \Rightarrow K = 0,625\left(AL\right)$. Ο ρυθμός μεγέθυνσής του θα είναι:

$$g_K = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt} = \frac{0,625}{K}\frac{d\left(AL\right)}{dt} = \frac{1}{AL}\left(A\frac{dL}{dt} + L\frac{dA}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$g_K = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = n + g_A \Rightarrow$$

$$g_K = 0,2 + 0,1 = 0,3$$

5.4 Εμπειρική εκτίμηση του νεοκλασικού υποδείγματος

Έχοντας παρουσιάσει τόσο το νεοκλασικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο όσο και την επέκταση του υποδείγματος με εισαγωγή του ανθρώπινου κεφαλαίου, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε την ικανότητα των δύο αυτών εκδοχών του υποδείγματος των Solow - Swan να ανταποκριθεί στα πραγματικά δεδομένα της οικονομίας. Προχωράμε, με διαφορετική διατύπωση, στη μελέτη της εμπειρικής εκτίμησης και του εμπειρικού ελέγχου του νεοκλασικού υποδείγματος. Γι' αυτόν το σκοπό, θα βασιστούμε στη δημοσίευση των Mankiw, Romer και Weil (1992) που αποτέλεσε τη σημαντικότερη συμβολή στην εμπειρική εκτίμηση του νεοκλασικού υποδείγματος.

Αρχίζοντας από την εμπειρική εκτίμηση του υποδείγματος Solow - Swan με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο, οι Mankiw κ.ά. (1992) υποθέτουν μια συνάρτηση παραγωγής Cobb - Douglas με αυξάνουσα την εργασία (ουδέτερη κατά Harrod) τεχνολογική πρόοδο. Η τελευταία έχει ως εξής:

$$Y = K^{a}\left(AL\right)^{1-a}, 0 < a < 1 \qquad (5.39)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού είναι ίσος με n και ο ρυθμός μεγέθυνσης της τεχνολογικής προόδου ίσος με g_A, ισχύει ότι:

$$n = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} \qquad (5.40)$$

και

$$g_A = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} \qquad (5.41)$$

Από την επίλυση των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων προκύπτει αντίστοιχα ότι:

$$L = L_0 e^{nt} \qquad (5.42)$$

και

$$A = A_0 e^{g_A t} \qquad (5.43)$$

όπου L_0 και A_0 : οι αρχικές τιμές της εργασίας και της τεχνολογικής προόδου αντίστοιχα.

Ορίζοντας το κεφάλαιο και το προϊόν ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας ως $\hat{k} = \frac{K}{AL}$ και $\hat{y} = f\left(\hat{k}\right) = \frac{Y}{AL} = \left(\hat{k}\right)^{a}$ αντίστοιχα, η εξίσωση κίνησης του κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας είναι:

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = sf\left(\hat{k}\right) - \left(n + g_A + \mu\right)\hat{k} \tag{5.44}$$

όπου s : το ποσοστό αποταμίευσης και μ : ο ρυθμός απόσβεσης του κεφαλαίου.

Στην ισορροπία σταθερής κατάστασης ισχύει ότι: $\frac{d\hat{k}}{dt} = 0$. Συνεπώς, από τη σχέση (5.44), το επίπεδο του λόγου κεφαλαίου - αποτελεσματικής εργασίας στην ισορροπία σταθερής κατάστασης είναι ίσο με:

$$\hat{k}^* = \left(\frac{s}{n + g_A + \mu}\right)^{\frac{1}{1-a}} \tag{5.45}$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω τιμής στη συνάρτηση παραγωγής σε όρους αποτελεσματικής εργασίας προκύπτει η τιμή του προϊόντος ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας στη μακροχρόνια ισορροπία. Η τελευταία έχει ως εξής:

$$\hat{y}^* = \left(\frac{s}{n + g_A + \mu}\right)^{\frac{a}{1-a}} \tag{5.46}$$

Από το λογάριθμο της παραπάνω σχέσης και με χρήση της σχέσης (5.43) λαμβάνουμε:

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right) = \ln A_0 + g_A t + \frac{a}{1-a}\ln s - \frac{a}{1-a}\ln\left(n + g_A + \mu\right) \tag{5.47}$$

Η εξίσωση (5.47) αντανακλά την ύπαρξη θετικής σχέσης ανάμεσα σε μεταβολές του ποσοστού αποταμίευσης και σε μεταβολές του λόγου προϊόντος - εργασίας, και αρνητικής σχέσης ανάμεσα σε μεταβολές του ρυθμού μεγέθυνσης του πληθυσμού και σε μεταβολές του λόγου προϊόντος - εργασίας. Επιπλέον, με δεδομένο ότι το μερίδιο του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν (a) εκτιμάται ότι είναι ίσο με 1/3, αναμένεται ότι οι ελαστικότητες του λόγου προϊόντος - εργασίας ως προς το ποσοστό αποταμίευσης και ως προς το άθροισμα $(n + g_A + \mu)$ θα είναι ίσες με 0,5 και –0,5 αντίστοιχα. Γίνεται, επομένως, κατανοητό ότι αναμένεται πως χώρες με υψηλότερο κατά κεφαλή προϊόν θα έχουν υψηλότερο ρυθμό αποταμίευσης/επένδυσης και χαμηλότερο άθροισμα $(n + g_A + \mu)$.

Για την εκτίμηση του υποδείγματος, οι Mankiw κ.ά. (1992) προχώρησαν ένα βήμα παρακάτω υποθέτοντας ότι:

$$\ln A_0 = c + \varepsilon \tag{5.48}$$

όπου c: σταθερά και ε: διαταρακτικός όρος (σοκ) που διαφέρει από χώρα σε χώρα.

Με αντικατάσταση στην (5.47), η προς εκτίμηση εξίσωση που χρησιμοποιήθηκε είναι η ακόλουθη:

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right) = c + \frac{a}{1-a}\ln s - \frac{a}{1-a}\ln\left(n + g_A + \mu\right) + \varepsilon \tag{5.49}$$

Χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά δείγματα χωρών, τα αποτελέσματα της εκτίμησης έδειξαν ότι τα πρόσημα των προαναφερθέντων ελαστικοτήτων είναι τα αναμενόμενα και οι αντίστοιχοι συντελεστές είναι στατιστικά σημαντικοί. Ωστόσο, τα μεγέθη των ελαστικοτήτων αποκλίνουν από την τιμή 0,5 (σε απόλυτη τιμή). Αυτό το εύρημα συνεπάγεται ότι το μερίδιο του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν δεν είναι ίσο με 1/3 όπως αναμενόταν, αλλά είναι ίσο με 2/3 περίπου. Πρέπει να τονιστεί επίσης ότι η ερμηνευτική ικανότητα του υποδείγματος (με βάση τον προσαρμοσμένο συντελεστή προσδιορισμού – adjusted R^2) είναι υψηλή. Αποδίδοντας την υψηλή εκτίμηση του μεριδίου του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν είτε σε αδυναμία της υπόθεσης (5.48) να ανταποκριθεί στην πραγματικότητα είτε στο σφάλμα της παραλειφθείσας μεταβλητής, δηλαδή της παράλειψης μιας σημαντικής ερμηνευτικής μεταβλητής από την εξειδίκευση του υποδείγματος, οι συγγραφείς προχώρησαν σε εκτίμηση του νεοκλασικού υποδείγματος με ανθρώπινο κεφάλαιο.

Παίρνοντας το λογάριθμο του προϊόντος ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας στην ισορροπία σταθερής κατάστασης στο πλαίσιο του νεοκλασικού υποδείγματος με ανθρώπινο κεφάλαιο, όπως αυτό παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα [σχέση (5.38)], και χρησιμοποιώντας την υπόθεση (5.48), έχουμε:

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right) = c + \frac{b}{1-a-b}\ln s_k + \frac{a}{1-a-b}\ln s_h - \frac{b}{1-a}\ln\left(n + g_A + \mu_k\right) - \frac{a}{1-a}\ln\left(n + g_A + \mu_h\right) + \varepsilon \tag{5.50}$$

Πρέπει να επισημανθεί, βέβαια, ότι για την εκτίμηση του υποδείγματος θεωρήθηκε ότι το φυσικό και το ανθρώπινο κεφάλαιο αποσβένονται με τον ίδιο ρυθμό (μ), δηλαδή ότι: $\mu_k = \mu_h = \mu$. Τα αποτελέσματα της εμπειρικής εκτίμησης υπαγορεύουν ότι η εν λόγω εξειδίκευση του υποδείγματος έχει καλύτερη ερμηνευτική ικανότητα (μεγαλύτερος προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού – adjusted R^2). Πιο συγκεκριμένα, προκύπτει ότι $R^2 = 0,78$, που σημαίνει ότι το 78% των διαφορών στο κατά κεφαλή εισόδημα μεταξύ των χωρών μπορεί να ερμηνευτεί από διαφορές στις επενδύσεις τους σε φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο, με δεδομένη την τεχνολογία. Κατ' επέκταση, ο ρόλος των τεχνολογικών διαφορών στις εισοδηματικές διαφορές των χωρών είναι περιορισμένος. Επιπλέον, τα μερίδια του φυσικού και του ανθρώπινου κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν εκτιμώνται ίσα με 1/3, δηλαδή στα αναμενόμενα επίπεδα.

Ωστόσο, υπάρχουν δύο βασικά προβλήματα όσον αφορά την παραπάνω ανάλυση και σχετίζονται άμεσα με τον περιορισμένο ρόλο των τεχνολογικών διαφορών μεταξύ των χωρών σε αυτή (Acemoglu 2009). Πρώτον, η εκτίμηση των Mankiw κ.ά. (1992) υποθέτει ότι το αρχικό επίπεδο τεχνολογικής προόδου είναι ίδιο για όλες τις χώρες. Στην περίπτωση που το αρχικό αυτό επίπεδο τεχνολογικής προόδου διαφέρει από χώρα σε χώρα, είναι πολύ πιθανόν το τελευταίο να σχετίζεται με τα ποσοστά αποταμίευσης (επένδυσης) σε ανθρώπινο και φυσικό κεφάλαιο, δηλαδή οι χώρες που είναι πιο παραγωγικές να επενδύουν περισσότερο τόσο σε φυσικό όσο και σε ανθρώπινο κεφάλαιο. Η συσχέτιση αυτή μπορεί να οφείλεται σε δύο λόγους. Ο πρώτος λόγος σχετίζεται με το σφάλμα της παραλειφθείσας μεταβλητής, δηλαδή χώρες με υψηλότερο αρχικό επίπεδο τεχνολογικής προόδου είναι πιο πιθανόν να έχουν επενδύσει περισσότερο στην τεχνολογία για διάφορους λόγους. Οπότε, οι ίδιοι λόγοι είναι δυνατόν να έχουν παρακινήσει τις ίδιες χώρες να επενδύσουν περισσότερο σε φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο. Ο δεύτερος λόγος αφορά το πρόβλημα της αντίστροφης αιτιότητας, δηλαδή το ότι η ύπαρξη συμπληρωματικότητας ανάμεσα στην τεχνολογία και στο φυσικό και το ανθρώπινο κεφάλαιο συνεπάγεται ότι οι χώρες με υψηλότερο αρχικό επίπεδο τεχνολογικής προόδου θα θεωρήσουν πιο συμφέρον να αυξήσουν τα αποθέματά τους σε φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο. Τώρα, η συσχέτιση αυτή συνεπάγεται την ενδογένεια των ποσοστών επένδυσης σε φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο στην εκτιμηθείσα εξίσωση [σχέση (5.50)] και, επομένως, οδηγεί σε υπερεκτίμηση των μεριδίων του φυσικού και του ανθρώπινου κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν. Επίσης, η ενδογένεια οδηγεί και σε υπερεκτίμηση του προσαρμοσμένου R^2. Το δεύτερο πρόβλημα που απορρέει από την υπόθεση του ίδιου αρχικού επιπέδου τεχνολογικής προόδου στις διάφορες χώρες είναι ότι μπορεί να αποδειχθεί πως η εκτιμηθείσα τιμή του μεριδίου του ανθρώπινου κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν είναι υψηλότερη από την αναμενόμενη με βάση τα μικροοικονομικά στοιχεία.

Η εμπειρική εκτίμηση του νεοκλασικού υποδείγματος έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης πολλών νεώτερων εργασιών. Ο Gundlach (1995) εκτιμά το νεοκλασικό υπόδειγμα με ανθρώπινο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας μια υποκατάστατη μεταβλητή (proxy) για να προσεγγίσει το απόθεμα του ανθρώπινου κεφαλαίου. Η μέθοδος αυτή είναι απαλλαγμένη από σφάλμα μέτρησης και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η επίδραση της συσσώρευσης του ανθρώπινου κεφαλαίου στο κατά κεφαλή προϊόν είναι διπλάσια σε απόλυτη τιμή από την αντίστοιχη επίδραση της συσσώρευσης του φυσικού κεφαλαίου και του ρυθμού μεγέθυνσης του πληθυσμού. Οι Masanjala και Papageorgiou (2004) αντικαθιστούν τη συνάρτηση παραγωγής Cobb - Douglas στο νεοκλασικό υπόδειγμα με μια συνάρτηση παραγωγής σταθερής ελαστικότητας υποκατάστασης. Στόχος τους αποτελεί η διερεύνηση της ικανότητας της μη γραμμικότητας της συνάρτησης παραγωγής να ερμηνεύσει τις διαφορές που παρατηρούνται στην εκτίμηση του υποδείγματος Solow - Swan από χώρα σε χώρα. Οι Durlauf κ.ά. (2001) εκτιμούν το νεοκλασικό υπόδειγμα λαμβάνοντας υπόψη την ετερογένεια μεταξύ των χωρών. Συμπεραίνουν ότι κατ' αυτό τον τρόπο βελτιώνεται η ερμηνευτική ικανότητα του υποδείγματος.

5.5 Η σύγκλιση στο νεοκλασικό υπόδειγμα

Ένα ιδιαίτερο ζήτημα που απασχολεί την έρευνα πάνω στην οικονομική μεγέθυνση είναι το κατά πόσο το κατά κεφαλή εισόδημα διαφορετικών χωρών τείνει μακροχρόνια να συγκλίνει σε κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο. Η έννοια, επομένως, της σύγκλισης αναφέρεται στον περιορισμό των εισοδηματικών διαφορών διαφορετικών χωρών μακροχρόνια. Προκειμένου να εξετάσουμε την έννοια της σύγκλισης μεταξύ των χωρών, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι Cobb - Douglas χωρίς τεχνολογική πρόοδο, δηλαδή στην εντατική μορφή:

$$y = Ak^{a}, \quad \mathrm{A} > 0 \tag{5.51}$$

όπου $k = K/L$: το κεφάλαιο ανά μονάδα εργασίας και $y = Y/L$: το προϊόν ανά μονάδα εργασίας.

Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, παίρνουμε:

$$\ln y = \ln\left(Ak^{a}\right) \Rightarrow$$

$$\ln y = \ln A + a \ln k$$

$$\frac{d \ln y}{dt} = \frac{d \ln A}{dt} + a \frac{d \ln k}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = a\left(\frac{1}{k}\frac{dk}{dt}\right) \quad (5.52)$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλή εισοδήματος ισούται με το γινόμενο του μεριδίου αγοράς του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν επί το ρυθμό μεγέθυνσης του λόγου κεφαλαίου - εργασίας.

Από την εξίσωση κίνησης του λόγου κεφαλαίου - εργασίας γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dk}{dt} = sf\left(k\right) - \left(\mu + n\right)k \Rightarrow$$

$$g_k = s\frac{f\left(k\right)}{k} - \left(\mu + n\right) \overset{(5.51)}{\Rightarrow}$$

$$g_k = sAk^{-(1-a)} - \left(\mu + n\right) \quad (5.53)$$

Από (5.52) και (5.53), έχουμε:

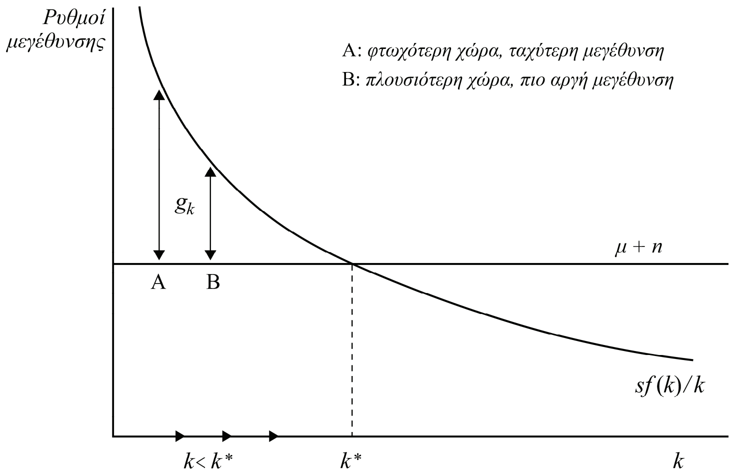
$$g_y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = a\left(sAk^{-(1-a)} - \left(\mu + n\right)\right) \quad (5.54)$$

όπου g_y : ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλή εισοδήματος.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (5.54) ως προς το λόγο κεφαλαίου - εργασίας παίρνουμε:

$$\frac{dg_y}{dk} = -asA\left(1-a\right)k^{-(2-a)} < 0 \quad (5.55)$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι υπάρχει αντίστροφη σχέση μεταξύ μεταβολών του λόγου κεφαλαίου - εργασίας και του ρυθμού μεγέθυνσης του κατά κεφαλή εισοδήματος. Συνεπώς, όσο χαμηλότερος είναι ο λόγος κεφαλαίου - εργασίας, τόσο γρηγορότερα θα μεγεθύνεται η οικονομία. Το συμπέρασμα αυτό αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως απόλυτη σύγκλιση (absolute convergence) ή σύγκλιση χωρίς προϋποθέσεις (unconditional convergence) και υποθέτει ότι χώρες με κοινό ποσοστό αποταμίευσης, κοινό ρυθμό μεγέθυνσης εργατικού δυναμικού, κοινή τεχνολογία παραγωγής και κοινό ρυθμό απόσβεσης κεφαλαίου, δηλαδή κοινές παραμέτρους s, n, A και μ, αντίστοιχα, συγκλίνουν προς το ίδιο επίπεδο κεφαλαίου ανά μονάδα εργασίας και εισοδήματος ανά μονάδα εργασίας στη μακροχρόνια ισορροπία.



Διάγραμμα 5.1

Διαγραμματικά, η σύγκλιση χωρίς προϋποθέσεις απεικονίζεται στο Διάγραμμα 5.1. Η καμπύλη $sf(k)/k$ αντιπροσωπεύει τον πρώτο όρο του δεύτερου μέλους της σχέσης (5.53) ενώ η $\mu + n$ τον δεύτερο όρο. Η κάθετη απόσταση ανάμεσα στις δύο καμπύλες αποτελεί το ρυθμό μεγέθυνσης του λόγου κεφαλαίου - εργασίας $\left(g_k\right)$. Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι έχουμε δύο χώρες, τις Α και Β, οι οποίες έχουν τις ίδιες παραμέτρους s, n, A και μ και διαφέρουν μόνο ως προς το αρχικό επίπεδο του λόγου κεφαλαίου - εργασίας. Θεωρούμε, επομένως, ότι η χώρα Α είναι πιο φτωχή από τη χώρα Β. Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα, ο ρυθμός μεγέθυνσης του λόγου κεφαλαίου - εργασίας (και κατ' επέκταση και ο ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος ανά εργαζόμενο) της χώρας Α είναι μεγαλύτερος από αυτόν της χώρας Β. Επομένως, η χώρα Α συγκλίνει ταχύτερα από τη Β προς το κοινό μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας του λόγου κεφαλαίου - εργασίας $\left(k^*\right)$. Η σύγκλιση χωρίς προϋποθέσεις, λοιπόν, μπορεί να αποδοθεί στο ότι το μέσο προϊόν του κεφαλαίου $\left(AP_K = f(k)/k\right)$ είναι μεγαλύτερο για χαμηλότερες αρχικές τιμές του λόγου κεφαλαίου - εργασίας, λαμβάνοντας βέβαια υπόψη ότι όλες οι υπόλοιπες παράμετροι έχουν τις ίδιες τιμές για κάθε χώρα (Carlin και Soskice 2006).

Πρέπει, ωστόσο, να επισημανθεί ότι η υπόθεση της απόλυτης σύγκλισης είναι ιδιαίτερα περιοριστική (Acemoglu 2009). Αφενός, απαιτεί μείωση της εισοδηματικής διαφοράς ανάμεσα σε δύο χώρες, ανεξάρτητα από το είδος της επενδυτικής συμπεριφοράς, των θεσμών, των πολιτικών και της τεχνολογίας στις χώρες αυτές. Αφετέρου, απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρξει σύγκλιση είναι οι χώρες να παρουσιάζουν ομοιότητα ως προς τις παραμέτρους s, n, A και μ. Οι δύο αυτοί περιορισμοί οδήγησαν στη διατύπωση της λεγόμενης σύγκλισης υπό προϋποθέσεις (conditional convergence). Στο πλαίσιο της σύγκλισης υπό προϋποθέσεις αποδεχόμαστε ότι οι χώρες διαφέρουν ως προς τις παραμέτρους της οικονομίας τους. Επομένως, μακροχρόνια θα έχουν διαφορετικά επίπεδα κεφαλαίου - εργασίας και κατά κεφαλή εισοδήματος. Η σύγκλιση υπό προϋποθέσεις, λοιπόν, υποθέτει ότι οι χώρες θα συγκλίνουν προς το δικό τους επίπεδο ισορροπίας μακροχρόνια με ταχύτητα σύγκλισης που θα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η απόστασή τους από το επίπεδο αυτό. Συνεπώς, χώρες με χαμηλότερο αρχικό επίπεδο εισοδήματος ανά εργαζόμενο τείνουν να συγκλίνουν προς το μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας τους γρηγορότερα, εφόσον βέβαια ληφθούν υπόψη οι διαφορές των χωρών ως προς τις διάφορες παραμέτρους της οικονομίας τους (Barro και Sala-i-Martin 2004). Γίνεται, επομένως, κατανοητό ότι ο έλεγχος της σύγκλισης υπό προϋποθέσεις απαιτεί να ληφθούν υπόψη και τα διάφορα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των χωρών που είναι δυνατόν να επηρεάσουν την ισορροπία σταθερής κατάστασης της οικονομίας τους.

5.6 Ανακεφαλαίωση

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύτηκε ορισμένα ειδικά ζητήματα σχετικά με το νεοκλασικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην ικανότητα του υποδείγματος να ανταποκριθεί στα εμπειρικά στοιχεία. Στο πλαίσιο του υποδείγματος Solow - Swan με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο, ασχοληθήκαμε με την «αριθμητική της μεγέθυνσης». Η τελευταία αποτελεί μια μέθοδο που μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες της οικονομικής μεγέθυνσης, δηλαδή τη συνεισφορά της συσσώρευσης του κεφαλαίου, του ρυθμού μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού και της τεχνολογικής προόδου στο ρυθμό μεγέθυνσης της οικονομίας. Ωστόσο, τα παραπάνω αίτια (proximate causes/correlates) πρέπει να διαχωριστούν από τα λεγόμενα θεμελιώδη αίτια (fundamental causes) της οικονομικής μεγέθυνσης, που είναι ικανά να εξηγήσουν τους λόγους για τους οποίους διαφέρει η συσσώρευση φυσικού και ανθρώπινου κεφαλαίου ή/και η τεχνολογική πρόοδος από χώρα σε χώρα. Στα τελευταία εντάσσονται οι γεωγραφικές διαφορές των χωρών, οι θεσμικές διαφορές, οι πολιτισμικές διαφορές και η τύχη (Acemoglu 2009). Έπειτα, διευρύνουμε το νεοκλασικό υπόδειγμα με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο, εισάγοντας σε αυτό το ανθρώπινο κεφάλαιο ως ξεχωριστό συντελεστή παραγωγής.

Η εμπειρική εκτίμηση του υποδείγματος (Mankiw κ.ά. 1992) έδειξε ότι το απλό νεοκλασικό υπόδειγμα με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο δεν ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στα δεδομένα. Αντίθετα, το διευρυμένο υπόδειγμα που συμπεριλαμβάνει το ανθρώπινο κεφάλαιο εξηγεί σε μεγάλο βαθμό την οικονομική μεγέθυνση, αποδίδοντας τις εισοδηματικές διαφορές μεταξύ των χωρών στη διαφορά των επενδύσεων τόσο σε φυσικό όσο και σε ανθρώπινο κεφάλαιο από χώρα σε χώρα. Ωστόσο, η βασική κριτική στην εν λόγω εκτίμηση βασίζεται στον περιορισμένο ρόλο των τεχνολογικών διαφορών μεταξύ των χωρών στο εκτιμηθέν υπόδειγμα. Τέλος, μελετήσαμε την έννοια της σύγκλισης στο νεοκλασικό υπόδειγμα. Συμπεράναμε ότι το υπόδειγμα προβλέπει τη σύγκλιση των οικονομιών προς ένα δικό τους μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας, το οποίο εξαρτάται από τις εξωγενώς προσδιορισμένες παραμέτρους της οικονομίας τους.