Κεφάλαιο 5
Ειδικά Ζητήματα σχετικά με το Νεοκλασικό Υπόδειγμα Μεγέθυνσης

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, επικεντρωνόμαστε στην ικανότητα του νεοκλασικού υποδείγματος να ανταποκριθεί στα πραγματικά δεδομένα της οικονομίας και παρουσιάζουμε κάποια ειδικά ζητήματα και προεκτάσεις του υποδείγματος αυτού. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά παρουσιάζουμε τη λεγόμενη «αριθμητική της μεγέθυνσης» που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των συνιστωσών της οικονομικής μεγέθυνσης. Στη συνέχεια, διευρύνουμε το νεοκλασικό υπόδειγμα με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο, εισάγοντας σε αυτό το ανθρώπινο κεφάλαιο ως παραγωγικό συντελεστή. Το επόμενο βήμα στην ανάλυσή μας είναι ο εμπειρικός έλεγχος τόσο του νεοκλασικού υποδείγματος με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο όσο και της επέκτασης του υποδείγματος με ανθρώπινο κεφάλαιο. Στόχος είναι να εξεταστεί εάν τα συμπεράσματα των δύο αυτών εκδοχών του νεοκλασικού υποδείγματος συνάδουν με τα σχετικά αποτελέσματα των εμπειρικών ερευνών. Τέλος, εξετάζουμε την έννοια της σύγκλισης προκειμένου να ερμηνεύσουμε την εξέλιξη των εισοδηματικών διαφορών μεταξύ των χωρών μακροχρόνια.

5.2. Η Αριθμητική της Μεγέθυνσης

Στην ενότητα αυτή εστιάζουμε στις γενεσιουργές αιτίες (proximate causes) της οικονομικής μεγέθυνσης, επιχειρώντας να προσδιορίσουμε το ποσοστό της μεγέθυνσης που οφείλεται σε μεταβολές της παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής (κεφάλαιο και εργασία) καθώς επίσης και τη συνεισφορά της τεχνολογικής προόδου στην οικονομική μεγέθυνση. Η μεθοδολογία αυτή ονομάζεται «Αριθμητική της Μεγέθυνσης» και θεμελιώθηκε από τον Solow (1957).

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής δίνεται από τη σχέση:

$$Y = F\left(K, L, A\right) \qquad (5.1),$$

όπου Y : το συνολικό προϊόν, K: το κεφάλαιο, L: η εργασία, A : η τεχνολογική πρόοδος.

Από την ολική παράγωγο της παραπάνω σχέσης ως προς το χρόνο, παίρνουμε:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \overset{*(1/Y)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{K}{K}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{L}{L}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{A}{A}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}\frac{dK}{dt}\frac{1}{\mathrm{K}} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}\frac{dL}{dt}\frac{I}{L} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{A}{Y}\frac{dA}{dt}\frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$g_Y = \varepsilon_K g_K + \varepsilon_L n + x(t) \qquad (5.2)$$

όπου $g_Y = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος, $\varepsilon_K = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}$: η ελαστικότητα προϊόντος ως προς το κεφάλαιο[1], $g_K = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου, $\varepsilon_L = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}$: η ελαστικότητα προϊόντος ως προς την εργασία, $n = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού και

1. Τονίζεται ότι η ελαστικότητα προϊόντος ως προς το κεφάλαιο (αντίστοιχα εργασία) ορίζεται ως η ποσοστιαία μεταβολή του συνολικού προϊόντος μετά από μία μεταβολή του κεφαλαίου (αντίστοιχα της εργασίας) κατά 1%.

$x(t) = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{A}{Y}\frac{dA}{dt}\frac{1}{A}$: η συνεισφορά της τεχνολογικής προόδου στην οικονομική μεγέθυνση.

Υπό την υπόθεση του τέλειου ανταγωνισμού των αγορών, κάθε συντελεστής παραγωγής αμοίβεται με το οριακό του προϊόν. Δηλαδή, ισχύει ότι $r = MP_K = \partial F / \partial K$ & $w = MP_L = \partial F / \partial L$, όπου r: η πρόσοδος του κεφαλαίου και w: ο εργατικός μισθός. Από τις ελαστικότητες προϊόντος ως προς το κεφάλαιο και την εργασία , προκύπτει ότι:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{\text{Y}} = \frac{r \cdot K}{Y} \equiv a_K \qquad (5.3)$$

$$\varepsilon_L = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y} = \frac{w \cdot L}{Y} \equiv a_L \qquad (5.4)$$

όπου a_K : το μερίδιο του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν και a_L : το μερίδιο της εργασίας στο συνολικό προϊόν.

Η σχέση (5.2) μπορεί, επομένως, να γραφεί ως εξής:

$$g_Y = \alpha_K g_K + \alpha_L n + x(t) \qquad (5.5)$$

Η σχέση (5.5) αντανακλά το ποσοστό της συνεισφοράς της βελτίωσης της παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής και της τεχνολογικής προόδου στην οικονομική μεγέθυνση. Ο όρος $x(t)$ ονομάζεται «κατάλοιπο Solow” (Solow’s Residual) ή συντελεστής συνολικής παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής (total factor productivity). Πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος αυτός περιλαμβάνει τόσο τους διάφορους εξωγενείς παράγοντες που επηρεάζουν την οικονομική μεγέθυνση, όσο και τα διάφορα πιθανά σφάλματα μέτρησης των εισροών, κεφαλαίου και εργασίας. Πρόκειται, δηλαδή, για την αύξηση του συνολικού προϊόντος που δεν οφείλεται σε αυξήσεις των ποσοτήτων των συντελεστών παραγωγής. Με αναδιάταξη των όρων της εξίσωσης (5.5), λαμβάνουμε τη λεγόμενη «θεμελιώδη εξίσωση της αριθμητικής της μεγέθυνσης» (fundamental growth accounting equation)

$$x(t) = g_Y - a_K g_K - a_L n \qquad (5.6).$$

Η τελευταία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση της συνεισφοράς της τεχνολογικής προόδου στη μεγέθυνση της οικονομίας, με δεδομένους τους ρυθμούς μεγέθυνσης του κεφαλαίου, της εργασίας και του συνολικού προϊόντος καθώς επίσης και με δεδομένα τα μερίδια των συντελεστών παραγωγής στο συνολικό προϊόν (Acemoglu, 2009). Χρησιμοποιώντας δεδομένα εθνικών λογαριασμών, η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εμπειρική εκτίμηση της συνεισφοράς της τεχνολογικής προόδου. Η εκτιμηθείσα σχέση είναι η:

$$\hat{x}(t) = g_Y - a_K g_K - a_L n \qquad (5.7),$$

όπου $\hat{x}(t)$: ο εκτιμημένος συντελεστής συνολικής παραγωγικότητας.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί ότι η σωστή εκτίμηση του συντελεστή συνολικής παραγωγικότητας προϋποθέτει τη σωστή μέτρηση των ρυθμών μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος, του κεφαλαίου και της εργασίας[2]. Ξεκινώντας από το ρυθμό μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού, ενδεχόμενα σφάλματα μέτρησης είναι δυνατόν να προκύψουν από το γεγονός ότι στα πλαίσια του νεοκλασικού υποδείγματος με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο τα μεγέθη μετρώνται σε μονάδες αποτελεσματικής εργασίας. Συνεπώς, θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη οποιαδήποτε μεταβολή στο ανθρώπινο κεφάλαιο. Όσον αφορά στο ρυθμό μεγέθυνσης του κεφαλαίου, θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι, σε αντίθεση με τα υποδείγματα που αντιλαμβάνονται το κεφάλαιο από την πλευρά των τελικών προϊόντων που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή άλλων προϊόντων, στην πράξη το κεφάλαιο αφορά κυρίως μηχανήματα. Η παρατήρηση αυτή συνεπάγεται ότι είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη οποιεσδήποτε μεταβολές στις σχετικές τιμές των μηχανημάτων. Σχετικά με τον ρυθμό μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος, η λανθασμένη μέτρησή του είναι δυνατόν να οφείλεται σε αγνόηση των μεταβολών των σχετικών τιμών ή των μεταβολών στην ποιότητα των αγαθών. Τέλος, μεταξύ των άλλων αιτιών, λανθασμένη μέτρηση του συντελεστή συνολικής παραγωγικότητας μπορεί να αποτελεί απόρροια της υπόθεσης του τέλειου ανταγωνισμού σε όλες τις αγορές.

2. Για μια αναλυτική συζήτηση επί του θέματος βλπ. Acemoglu, D. (2009), *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

5.2.1 Οικονομικές Εφαρμογές

Παράδειγμα 1

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση Cobb-Douglas, με την τεχνολογική πρόοδο να είναι αυξάνουσα τους συντελεστές παραγωγής (ουδέτερη κατά Hicks):

$$Y = AK^{a}L^{1-a} \tag{5.1.1}$$

Να εξαχθεί η θεμελιώδης εξίσωση της αριθμητικής της μεγέθυνσης.

Λύση

Λογαριθμίζουμε τη συνάρτηση παραγωγής:

$$\ln Y = \ln\left(AK^{a}L^{1-a}\right) \Rightarrow$$

$$\ln Y = \ln A + \ln K^{a} + \ln L^{1-a} \Rightarrow$$

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \left(1-\alpha\right)\ln L \tag{5.1.2}$$

Υπολογίζουμε την ολική παράγωγο της παραπάνω σχέσης ως προς το χρόνο:

$$\frac{d\ln Y}{dt} = \frac{d\ln A}{dt} + \frac{d\left(\alpha \ln K\right)}{dt} + \frac{d\left(\left(1-\alpha\right)\ln L\right)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\ln Y}{dt} = \frac{d\ln A}{dt} + a\frac{d\ln K}{dt} + \left(1-\alpha\right)\frac{d\ln L}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} + a\frac{1}{K}\frac{dK}{dt} + \left(1-\alpha\right)\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} \Rightarrow$$

$$g_Y = g_A + ag_K + \left(1-a\right)n \Rightarrow$$

$$g_A = g_Y - ag_K - \left(1-a\right)n \tag{5.1.3}$$

Η σχέση (5.1.3) αποτελεί τη θεμελιώδη εξίσωση της αριθμητικής της μεγέθυνσης.

Παράδειγμα 2

Ας υποθέσουμε ότι η αγορά του παραγόμενου προϊόντος είναι ατελώς ανταγωνιστική ενώ οι αγορές των συντελεστών παραγωγής είναι τέλεια ανταγωνιστικές. Να αποδειχθεί ότι η τιμή του συντελεστή συνολικής παραγωγικότητας είναι μικρότερη στην περίπτωση αυτή απ’ ότι στην περίπτωση που όλες οι αγορές είναι τέλεια ανταγωνιστικές.

Λύση

Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής:

$$Y = F\left(K, L, A\right) \tag{5.2.1}$$

Από την ολική παράγωγο της παραπάνω σχέσης ως προς το χρόνο, παίρνουμε:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \overset{*(1/Y)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{K}{K}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{L}{L}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{A}{A}\frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{dA}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}\frac{dK}{dt}\frac{1}{K} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}\frac{dL}{dt}\frac{I}{L} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{A}{Y}\frac{dA}{dt}\frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$g_Y = \varepsilon_K g_K + \varepsilon_L n + x(t) \Rightarrow$$

$$x(t) = g_Y - \varepsilon_K g_K - \varepsilon_L n \tag{5.2.2}$$

όπου $g_Y = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος, $\varepsilon_K = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}$: η ελαστικότητα προϊόντος ως προς το κεφάλαιο, $g_K = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου, $\varepsilon_L = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}$: η ελαστικότητα προϊόντος ως προς την εργασία, $n = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$: ο ρυθμός μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού και $x(t) = \frac{\partial F}{\partial A}\frac{A}{Y}\frac{dA}{dt}\frac{1}{A}$: η συνεισφορά της τεχνολογικής προόδου στην οικονομική μεγέθυνση.

Στην περίπτωση του ατελούς ανταγωνισμού στην αγορά του παραγόμενου προϊόντος, οι αμοιβές των συντελεστών παραγωγής είναι χαμηλότερες από τα οριακά τους προϊόντα. Πιο συγκεκριμένα, για το κεφάλαιο ισχύει ότι:

$$r < MP_K \Rightarrow$$

$$r < \frac{\partial Y}{\partial K} \overset{\cdot(K/Y)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{r \cdot K}{Y} < \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y} \Rightarrow$$

$$a_K < \varepsilon_K \qquad (5.2.3)$$

όπου a_K : το μερίδιο του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν. Από την (5.2.3), γίνεται κατανοητό ότι σε αυτήν την περίπτωση η ελαστικότητα προϊόντος ως προς το κεφάλαιο είναι μεγαλύτερη από το μερίδιο του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν.

Αντίστοιχα για την εργασία ισχύει ότι:

$$w < MP_L \Rightarrow$$

$$w < \frac{\partial Y}{\partial L} \overset{\cdot(L/Y)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{w \cdot L}{Y} < \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y} \Rightarrow$$

$$a_L < \varepsilon_L \qquad (5.2.4)$$

όπου a_L : το μερίδιο της εργασίας στο συνολικό προϊόν. Κατανοούμε, επομένως, ότι σε αυτήν την περίπτωση η ελαστικότητα προϊόντος ως προς την εργασία είναι μεγαλύτερη από το μερίδιο της εργασίας στο συνολικό προϊόν.

Με δεδομένες τις σχέσεις (5.2.3) και (5.2.4), ας υποθέσουμε ότι ισχύει:

$$\varepsilon_K = \mu \cdot \alpha_K \quad \& \quad \varepsilon_L = \mu \cdot \alpha_L, \quad \mu > 1 \qquad (5.2.5)$$

Η σχέση (5.2.5) δηλώνει ότι οι ελαστικότητες προϊόντος ως προς το κεφάλαιο και την εργασία υπερβαίνουν τα αντίστοιχα μερίδια αγοράς κατά μ φορές. Η υπόθεση ότι το περιθώριο μ είναι κοινό και για τους δύο συντελεστές παραγωγής γίνεται για λόγους απλούστευσης.

Με αντικατάσταση της σχέσης (5.2.5) στην (5.2.2) παίρνουμε:

$$x(t) = g_Y - \varepsilon_K g_K - \varepsilon_L n \overset{(5.2.5)}{\Rightarrow}$$

$$x(t) = g_Y - \mu \cdot \alpha_K \cdot g_K - \mu \cdot \alpha_L \cdot n \Rightarrow$$

$$x(t) = g_Y - \mu\left(\alpha_K \cdot g_K + \alpha_L \cdot n\right) \tag{5.2.6}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (5.2.6) που αφορά στον ατελή ανταγωνισμό στην αγορά του παραγόμενου προϊόντος με τη «θεμελιώδη εξίσωση της αριθμητικής της μεγέθυνσης» (σχέση (5.6)) που προϋποθέτει την ύπαρξη τέλειου ανταγωνισμού σε όλες τις εμπλεκόμενες αγορές και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mu > 1$, συμπεραίνουμε ότι η τιμή του συντελεστή συνολικής παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής ($x(t)$-total factor productivity) είναι μικρότερη στην περίπτωση του ατελούς ανταγωνισμού.

5.3. Το Νεοκλασικό Υπόδειγμα με Ανθρώπινο Κεφάλαιο

Επεκτείνουμε το νεοκλασικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης με τεχνολογική πρόοδο, εισάγοντας το ανθρώπινο κεφάλαιο σε αυτό. Η φιλοσοφία πίσω από την επέκταση αυτή στηρίζεται στο γεγονός ότι οι μονάδες εργασίας που προσφέρονται δεν είναι εξίσου αποτελεσματικές. Αντίθετα, κάθε άτομο φέρει στην αγορά εργασίας δεξιότητες, γνώσεις και άλλα χαρακτηριστικά, που αποτελούν το λεγόμενο ανθρώπινο κεφάλαιο, και αυξάνουν την παραγωγικότητα της εργασίας. Οι υποθέσεις του υποδείγματος έχουν ως εξής:

1. Ο χρόνος είναι συνεχής και άπειρος.
2. Σε κάθε χρονική περίοδο, χρησιμοποιούνται φυσικό κεφάλαιο, εργασία και ανθρώπινο κεφάλαιο στην παραγωγική διαδικασία.
3. Υπάρχει δυνατότητα υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών παραγωγής.
4. Η τεχνολογία είναι αυξάνουσα την εργασία, δηλαδή ουδέτερη κατά Harrod.

νομικά στοιχεία.

Η εμπειρική εκτίμηση του νεοκλασικού υποδείγματος έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης πολλών νεώτερων εργασιών. Ο Gundlach (1995) εκτιμά το νεοκλασικό υπόδειγμα με ανθρώπινο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας μια υποκατάστατη μεταβλητή (proxy) για να προσεγγίσει το απόθεμα του ανθρώπινου κεφαλαίου. Η μέθοδος αυτή είναι απαλλαγμένη από σφάλμα μέτρηση και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η επίδραση της συσσώρευσης του ανθρώπινου κεφαλαίου στο κατά κεφαλήν προϊόν είναι διπλάσια σε απόλυτη τιμή από την αντίστοιχη επίδραση της συσσώρευσης του φυσικού κεφαλαίου και του ρυθμού μεγέθυνσης του πληθυσμού. Οι Masanjala & Papageorgiou (2004) αντικαθιστούν τη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas στο νεοκλασικό υπόδειγμα με μια συνάρτηση παραγωγής σταθερής ελαστικότητας υποκατάστασης. Στόχος τους αποτελεί η διερεύνηση της ικανότητας της μη-γραμμικότητας της συνάρτησης παραγωγής να ερμηνεύσει τις διαφορές που παρατηρούνται στην εκτίμηση του υποδείγματος Solow-Swan από χώρα σε χώρα. Οι Durlauf et al. (2001) εκτιμούν το νεοκλασικό υπόδειγμα λαμβάνοντας υπόψη την ετερογένεια μεταξύ των χωρών. Συμπεραίνουν ότι κατ΄αυτόν τον τρόπο βελτιώνεται η ερμηνευτική ικανότητα του υποδείγματος.

5.5 Η Σύγκλιση στο Νεοκλασικό Υπόδειγμα

Ένα ιδιαίτερο ζήτημα που απασχολεί την έρευνα πάνω στην οικονομική μεγέθυνση είναι το κατά πόσο το κατά κεφαλήν εισόδημα διαφορετικών χωρών τείνει μακροχρόνια να συγκλίνει σε κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο. Η έννοια, επομένως, της σύγκλισης αναφέρεται στον περιορισμό των εισοδηματικών διαφορών διαφορετικών χωρών μακροχρόνια. Προκειμένου να εξετάσουμε την έννοια της σύγκλισης μεταξύ των χωρών, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι Cobb-Douglas χωρίς τεχνολογική πρόοδο, δηλαδή στην εντατική μορφή:

$$y = Ak^{a}, \quad A > 0 \tag{5.51}$$

όπου $k = K/L$: το κεφάλαιο ανά μονάδα εργασίας και $y = Y/L$: το προϊόν ανά μονάδα εργασίας. Λογαριθμίζοντας την παραπάνω σχέση και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, παίρνουμε:

$$\ln y = \ln\left(Ak^{a}\right) \Rightarrow$$

$$\ln y = \ln A + a \ln k$$

$$\frac{d \ln y}{dt} = \frac{d \ln A}{dt} + a \frac{d \ln k}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = a\left(\frac{1}{k}\frac{d \ln k}{dt}\right) \qquad (5.52)$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν εισοδήματος ισούται με το γινόμενο του μεριδίου αγοράς του κεφαλαίου στο συνολικό προϊόν επί τον ρυθμό μεγέθυνσης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας.

Από την εξίσωση κίνησης του λόγου κεφαλαίου- εργασίας γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (\mu + n)k \Rightarrow$$

$$g_k = s\frac{f(k)}{k} - (\mu + n) \overset{(5.51)}{\Rightarrow}$$

$$g_k = sAk^{-(1-a)} - (\mu + n) \qquad (5.53)$$

Από (5.52) και (5.53), έχουμε:

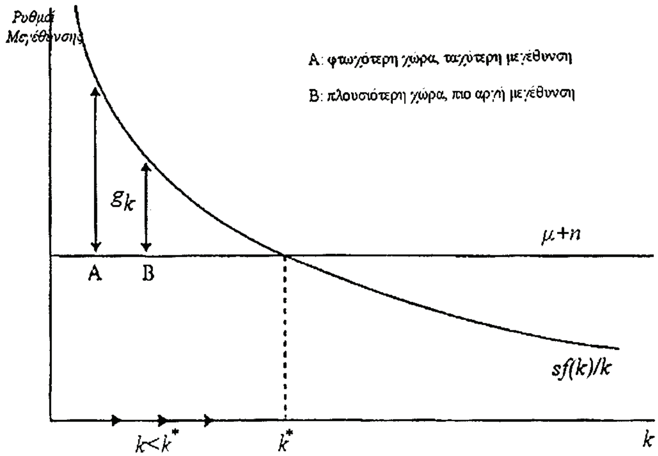
$$g_y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = a\left(sAk^{-(1-a)} - (\mu + n)\right) \qquad (5.54)$$

όπου g_{y_t} : ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν εισοδήματος.

Παραγωγίζοντας την σχέση (5.54) ως προς τον λόγο κεφαλαίου- εργασίας παίρνουμε:

$$\frac{dg_y}{dk} = -asA(1-a)k_t^{-(2-a)} < 0 \qquad (5.55)$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι υπάρχει αντίστροφη σχέση μεταξύ μεταβολών του λόγου κεφαλαίου- εργασίας και του ρυθμού μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν εισοδήματος. Συνεπώς, όσο χαμηλότερος είναι ο λόγος κεφαλαίου- εργασίας, τόσο γρηγορότερα θα μεγεθύνεται η οικονομία. Το συμπέρασμα αυτό αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως «απόλυτη σύγκλιση» (absolute convergence) ή «σύγκλιση χωρίς προϋποθέσεις» (unconditional convergence) και υποθέτει ότι χώρες με κοινό ποσοστό αποταμίευσης, κοινό ρυθμό μεγέθυνσης εργατικού δυναμικού, κοινή τεχνολογία παραγωγής και κοινό ρυθμό απόσβεσης κεφαλαίου, δηλαδή κοινές παραμέτρους $s, n, A \,\&\, \mu$ αντίστοιχα, συγκλίνουν προς το ίδιο επίπεδο κεφαλαίου ανά μονάδα εργασίας και εισοδήματος ανά μονάδα εργασίας στη μακροχρόνια ισορροπία.



Δ-5.1

Διαγραμματικά, η «σύγκλιση χωρίς προϋποθέσεις» απεικονίζεται στο διάγραμμα Δ-5.1. Η καμπύλη $sf(k)/k$ αντιπροσωπεύει τον πρώτο όρο του δεύτερου μέλους της σχέσης (5.53) ενώ η $\mu + n$ τον δεύτερο όρο. Η κάθετη απόσταση ανάμεσα στις δυο καμπύλες αποτελεί τον ρυθμό μεγέθυνσης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας (g_k). Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι έχουμε δύο χώρες, τις Α και Β, οι οποίες έχουν τις ίδιες παραμέτρους $s, n, A \,\&\, \mu$ και διαφέρουν μόνο ως προς το αρχικό επίπεδο του λόγου κεφαλαίου-εργασίας. Θεωρούμε, επομένως, ότι η χώρα Α είναι πιο φτωχή από τη χώρα Β. Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα, ο ρυθμός μεγέθυνσης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας (και κατ' επέκταση και ο ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος ανά εργαζόμενο) της χώρα Α είναι μεγαλύτερος από αυτόν της χώρας Β. Επομένως, η χώρα Α συγκλίνει ταχύτερα από τη Β προς το κοινό μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας του λόγου κεφαλαίου-εργασίας (k^*). Η «σύγκλιση χωρίς προϋποθέσεις», λοιπόν, μπορεί να αποδοθεί στο ότι το μέσο προϊόν του κεφαλαίου $(AP_K = f(k)/k)$ είναι μεγαλύτερο για χαμηλότερες αρχικές τιμές του λόγου κεφαλαίου-εργασίας, λαμβάνοντας βέβαια υπόψη ότι όλες οι υπόλοιπες παράμετροι έχουν τις ίδιες τιμές για κάθε χώρα (Carlin & Soskice, 2006).

Πρέπει, ωστόσο, να επισημανθεί ότι η υπόθεση της απόλυτης σύγκλισης είναι ιδιαίτερα περιοριστική (Acemoglu, 2009). Αφενός, απαιτεί μείωση της εισοδηματικής διαφοράς ανάμεσα σε δύο χώρες, ανεξάρτητα από το είδος της επενδυτικής συμπεριφοράς, των θεσμών, των πολιτικών, και της τεχνολογίας στις χώρες αυτές. Αφετέρου, απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρξει σύγκλιση είναι οι χώρες να παρουσιάζουν ομοιότητα ως προς τις παραμέτρους $s, n, A \,\&\, \mu$. Οι δύο αυτοί περιορισμοί οδήγησαν στη διατύπωση της λεγόμενης «σύγκλισης υπό προϋποθέσεις» (conditional convergence). Στα πλαίσια της σύγκλισης υπό προϋποθέσεις αποδεχόμαστε ότι οι χώρες διαφέρουν ως προς τις παραμέτρους της οικονομίας τους. Επομένως, μακροχρόνια θα έχουν διαφορετικά επίπεδα κεφαλαίου-εργασίας και κατά κεφαλήν εισοδήματος. Η σύγκλιση υπό προϋποθέσεις, λοιπόν, υποθέτει ότι οι χώρες θα συγκλίνουν προς το δικό τους επίπεδο ισορροπίας μακροχρόνια με ταχύτητα σύγκλισης που θα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η απόστασή τους από το επίπεδο αυτό. Συνεπώς, χώρες με χαμηλότερο αρχικό επίπεδο εισοδήματος ανά εργαζόμενο τείνουν να συγκλίνουν προς το μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας τους γρηγορότερα, εφόσον βέβαια ληφθούν υπόψη οι διαφορές των χωρών ως προς τις διάφορες παραμέτρους της οικονομίας τους (Barro & Sala-i-Martin, 2004). Γίνεται, επομένως, κατανοητό ότι ο έλεγχος της σύγκλισης υπό προϋποθέσεις απαιτεί να ληφθούν υπόψη και τα διάφορα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των χωρών που είναι δυνατόν να επηρεάσουν την ισορροπία σταθερής κατάστασης της οικονομίας τους.

5.6 Ανακεφαλαίωση

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύτηκε ορισμένα ειδικά ζητήματα σχετικά με το νεοκλασικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην ικανότητα του υποδείγματος να ανταποκριθεί στα εμπειρικά στοιχεία. Στα πλαίσια του υποδείγματος Solow-Swan με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο, ασχοληθήκαμε με την «αριθμητική της μεγέθυνσης». Η τελευταία αποτελεί μια μέθοδο που μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες της οικονομικής μεγέθυνσης, δηλαδή την συνεισφορά της συσσώρευσης του κεφαλαίου, του ρυθμού μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού και της τεχνολογικής προόδου στο ρυθμό μεγέθυνσης της οικονομίας. Ωστόσο, τα παραπάνω αίτια (proximate causes/correlates) πρέπει να διαχωριστούν από τα λεγόμενα θεμελιώδη αίτια (fundamental causes) της οικονομικής μεγέθυνσης, που είναι ικανά να εξηγήσουν τους λόγους για τους οποίους διαφέρει η συσσώρευση φυσικού και ανθρώπινου κεφαλαίου ή/και η τεχνολογική πρόοδος από χώρα σε χώρα. Στα τελευταία εντάσσονται οι γεωγραφικές διαφορές των χωρών, οι θεσμικές διαφορές, οι πολιτισμικές διαφορές και η τύχη (Acemoglu, 2009). Έπειτα, διευρύνουμε το νεοκλασικό υπόδειγμα με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο, εισάγοντας σε αυτό το ανθρώπινο κεφάλαιο ως ξεχωριστό συντελεστή παραγωγής.

Η εμπειρική εκτίμηση του υποδείγματος (Mankiw et al., 1992) έδειξε ότι το απλό νεοκλασικό υπόδειγμα με εξωγενή τεχνολογική πρόοδο δεν ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στα δεδομένα. Αντίθετα, το διευρυμένο υπόδειγμα που συμπεριλαμβάνει το ανθρώπινο κεφάλαιο εξηγεί σε μεγάλο βαθμό την οικονομική μεγέθυνση, αποδίδοντας τις εισοδηματικές διαφορές μεταξύ των χωρών στη διαφορά των επενδύσεων τόσο σε φυσικό όσο και σε ανθρώπινο κεφάλαιο από χώρα σε χώρα. Ωστόσο, η βασική κριτική στην εν λόγω εκτίμηση βασίζεται στον περιορισμένο ρόλο των τεχνολογικών διαφορών μεταξύ των χωρών στο εκτιμηθέν υπόδειγμα. Τέλος, μελετήσαμε την έννοια της σύγκλισης στο νεοκλασικό υπόδειγμα. Συμπεράναμε ότι το υπόδειγμα προβλέπει την σύγκλιση των οικονομιών προς ένα δικό τους μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας, το οποίο εξαρτάται από τις εξωγενώς προσδιορισμένες παραμέτρους της οικονομίας τους.

7.2.3.1 Οικονομική Εφαρμογή

Δίνεται η ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής:

$$Y_t = 200K_t^{0.5}L_t^{0.5}\ .$$

Να βρεθούν οι συναρτήσεις ζήτησης κεφαλαίου και εργασίας.

Λύση

Το πρόβλημα των επιχειρήσεων διατυπώνεται ως εξής

$$\max_{K_t, L_t} \Pi_t = 200K_t^{0.5}L_t^{0.5} - w_t L_t - r_t K_t \qquad (7.2.1).$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = 0 \Rightarrow (0.5)200K_t^{-0.5}L_t^{0.5} - r_t = 0 \Rightarrow 100K_t^{-0.5}L_t^{0.5} = r_t \qquad (7.2.2)$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \Rightarrow (0.5)200K_t^{0.5}L_t^{-0.5} - w_t = 0 \Rightarrow 100K_t^{0.5}L_t^{-0.5} = w_t \qquad (7.2.3)$$

Οι σχέσεις (7.2.2) και (7.2.3) δηλώνουν ότι στην ανταγωνιστική ισορροπία οι συντελεστές παραγωγής αμοίβονται με το οριακό τους προϊόν. Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να διατυπωθούν και σε όρους κεφαλαίου-εργασίας ως εξής:

$$(7.2.2) \Rightarrow r_t = 100k_t^{-0.5} \qquad (7.2.4)$$

$$(7.2.3) \Rightarrow w_t = 100k_t^{0.5} \qquad (7.2.5)$$

7.3 Δυναμική Ανάλυση

Πριν προχωρήσουμε στην περαιτέρω δυναμική ανάλυση, κρίνεται απαραίτητο να παρουσιαστεί η έννοια της ανταγωνιστικής ισορροπίας. Η ανταγωνιστική ισορροπία ορίζεται ως μια ακολουθία (σύνολο) τιμών $\{r_t, w_t\}_{t=1}^{\infty}$ και ποσοτήτων $\{c_{1t}, c_{2t+1}, K_t, L_t\}_t^{\infty}$ τέτοιες ώστε:

i. Με δεδομένο το σύνολο τιμών, οι ποσότητες κατανάλωσης $\{c_{1t}, c_{2t+1}\}_{t=1}^{\infty}$ να μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα του αντιπροσωπευτικού καταναλωτή.

ii. Με δεδομένες τις τιμές, οι ποσότητες συντελεστών παραγωγής $\{K_t, L_1\}_{t=1}^{\infty}$ να μεγιστοποιούν το κέρδος της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης.

iii. Με δεδομένες τις αρχικές ποσότητες κεφαλαίου και εργασίας, όλες οι αγορές να βρίσκονται σε ισορροπία κάθε χρονική στιγμή t=1,2,…

Οι συνθήκες (i) και (ii) έχουν συζητηθεί στην προηγούμενη ενότητα και αφορούν στο πρόβλημα του καταναλωτή και του παραγωγού αντίστοιχα. Η τρίτη συνθήκη απαιτεί την ύπαρξη γενικής ισορροπίας, δηλαδή ισορροπίας και στις τέσσερις αγορές που εμπλέκονται στο υπόδειγμα: τις αγορές κεφαλαίου, εργασίας, περιουσιακών στοιχείων και αγαθών.

Προχωρούμε τώρα στην εξαγωγή της εξίσωσης κίνησης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας $(k = K / L)$. Η συνθήκη ισορροπίας στην αγορά περιουσιακών στοιχείων υπαγορεύει ότι η καθαρή επένδυση πρέπει να ισούται με την καθαρή αποταμίευση. Η πρώτη ορίζεται ως η μεταβολή του αποθέματος κεφαλαίου ενώ η δεύτερη προκύπτει από τη διαφορά ανάμεσα στην αποταμίευση των ατόμων που βρίσκονται στην πρώτη περίοδο της ζωής τους την περίοδο t και του κεφαλαίου που κατέχουν τα άτομα που βρίσκονται στη δεύτερη περίοδο της ζωής τους την ίδια περίοδο. Συνεπώς, έχουμε:

$$K_{t+1} - K_t = S_t - K_t \Rightarrow$$

$$S_t = K_{t+1} \tag{7.20}$$

Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με τον αριθμό των εργαζομένων, προκύπτει:

$$\frac{S_t}{L_t} = \frac{K_{t+1}}{L_t} \overset{\div \frac{L_{t+1}}{L_{t+1}}}{\Rightarrow}$$

$$\frac{S_t}{L_t} = \frac{K_{t+1}}{L_t}\frac{L_{t+1}}{L_{t+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{S_t}{L_t} = \frac{L_{t+1}}{L_t}\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \tag{7.21}$$

Από τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής του εργατικού δυναμικού, γνωρίζουμε ότι:

$$n = \frac{L_{t+1} - L_t}{L_t} \Rightarrow$$

$$n = \frac{L_{t+1}}{L_t} - \frac{L_t}{L_t} \Rightarrow$$

$$n = \frac{L_{t+1}}{L_t} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1 + n \tag{7.22}$$

Από (7.21) και (7.22):

$$\frac{S_t}{L_t} = (1+n)\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}$$

$$s_t = (1+n)k_{t+1} \tag{7.23}$$

όπου s_t: η αποταμίευση ανά εργαζόμενο και k: το κεφάλαιο ανά εργαζόμενο. Αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση τις σχέσεις (7.14) και (7.19) και παίρνουμε:

$$s_t = (1+n)k_{t+1} \overset{(7.14)}{\Rightarrow}$$

$$(1+n)k_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta} w_t \overset{(7.19)}{\Rightarrow}$$

$$(1+n)k_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta}\left(f(k_t) - k_t \cdot f'(k_t) \right) \Rightarrow$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\frac{\beta}{1+\beta}\left(f(k_t) - k_t \cdot f'(k_t) \right) \qquad (7.24).$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την εξίσωση κίνησης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας. Ο όρος k_{t+1} αποτελεί το κεφάλαιο ανά εργαζόμενο που περιέρχεται από τα άτομα που βρίσκονται στη δεύτερη περίοδο της ζωής τους σε αυτά που βρίσκονται στην πρώτη περίοδο της ζωής τους. Το δεξί μέλος αποτελεί την αποταμίευση των ατόμων που βρίσκονται στην πρώτη περίοδο της ζωής τους. Η εξίσωση (7.24) μας δίνει τη διαχρονική πορεία του λόγου κεφαλαίου-εργασίας με δεδομένη την αρχική τιμή του.

Το επίπεδο του λόγου κεφαλαίου-εργασίας για το οποίο ισχύει ότι $k_{t+1} = k_t = k^*$ ονομάζεται ισορροπία σταθερής κατάστασης (steady-state equilibrium) ή στάσιμη ισορροπία (stationary equilibrium) και αποτελεί το μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας του υποδείγματος. Από τη σχέση (7.24) και θέτοντας $k_{t+1} = k_t = k^*$, προκύπτει:

$$k^* = \frac{1}{1+n}\frac{\beta}{1+\beta}\left(f(k^*) - k^* \cdot f'(k^*) \right) \Rightarrow$$

$$k^* = \frac{\beta f(k^*)}{\left(1+n\right)\left(1+\beta\right) - \beta f'(k^*)} \qquad (7.25).$$

Στην ειδική περίπτωση που η συνάρτηση παραγωγής είναι η Cobb-Douglas $Y_t = AK_t^a L_t^{1-a}$ με εντατική μορφή:

$$y_t = f\left(k_t\right) = Ak_t^a \qquad (7.26),$$

η εξίσωση (7.24) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\frac{\beta}{1+\beta}\left(Ak_t^a - Aak_t^a \right) \Rightarrow$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\frac{\beta}{1+\beta}\left(1-a\right)Ak_t^a \qquad (7.27).$$

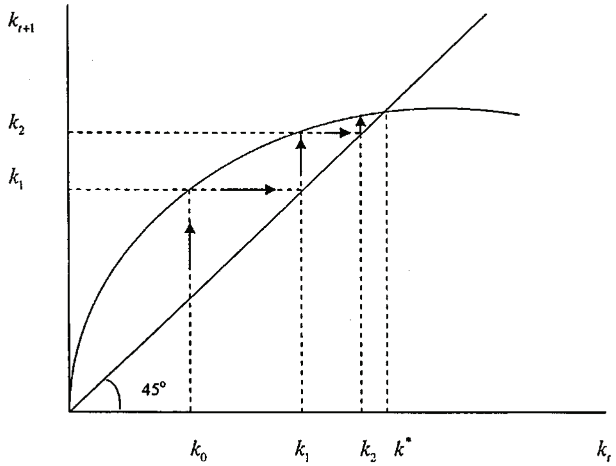
Εάν θέσουμε $k_{t+1} = k_t = k^*$ στην παραπάνω εξίσωση, προκύπτουν δύο λύσεις εκ των οποίων η λύση $k^* = 0$ απορρίπτεται. Η δεύτερη λύση, όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (7.27), αποτελεί την ισορροπία σταθερής κατάστασης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας:

$$k^* = \left[\frac{1}{1+n}\frac{\beta}{1+\beta}\left(1-\alpha\right)A \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (7.28).$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (7.28) στην εντατική μορφή της συνάρτησης παραγωγής (σχέση (7.26)), προκύπτει το επίπεδο του λόγου προϊόντος-εργασίας στην ισορροπία σταθερής κατάστασης. Το τελευταίο ισούται με:

$$y^* = A^{\frac{1}{1-a}} \left[\frac{1}{1+n} \frac{\beta}{1+\beta} (1-\alpha) \right]^{\frac{a}{1-\alpha}} \qquad (7.29).$$

Έχοντας προσδιορίσει τα επίπεδα των λόγων κεφαλαίου-εργασίας και προϊόντος-εργασίας, είμαστε τώρα σε θέση να προσδιορίσουμε τη διαχρονική πορεία του λόγου κεφαλαίου-εργασίας. Για τον σκοπό αυτό, θα ακολουθήσουμε διαγραμματική ανάλυση, υποθέτοντας την περίπτωση της συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas, όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (7.24).



Δ-7.1

Προκειμένου να παραστήσουμε γραφικά την εξίσωση διαφορών (7.25), χρησιμοποιούμε το λεγόμενο διάγραμμα φάσης (διάγραμμα Δ-7.1)[3]. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται ο λόγος κεφαλαίου-εργασίας τη χρονική στιγμή *t* (k_t), ενώ στον κάθετο άξονα απεικονίζεται η τιμή του λόγου κεφαλαίου-εργασίας τη χρονική στιγμή *t+1* (k_{t+1}). Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης του k_{t+1} ως συνάρτηση του k_t με τη γραμμή των 45^o αποτελεί το επίπεδο του k στην ισορροπία σταθερής κατάστασης (k^*), καθώς στο σημείο αυτό ισχύει ότι $k_{t+1} = k_t = k^*$. Αποδεικνύεται ότι το σημείο αυτό είναι σφαιρικά ευσταθές (global

3. Τονίζεται ότι το διάγραμμα 1 αφορά στην περίπτωση που η συνάρτηση παραγωγής είναι η Cobb-Douglas. Στη γενική περίπτωση, η σχέση ανάμεσα στα k_{t+1} και k_t είναι δυνατόν να λάβει διάφορες μορφές. Για μια αναλυτική παρουσίαση της γενικής περίπτωσης βλπ. Romer, D. (2006), *Advanced Macroeconomics*, 3rd Edition, McGraw-Hill Irwin.

stable), που σημαίνει ότι όποια και αν είναι η αρχική τιμή του λόγου κεφαλαίου-εργασίας (εκτός από την τιμή 0), ο λόγος αυτός θα συγκλίνει στο μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας k^*. Αξίζει να αναφέρουμε ότι η γραφική παράσταση της σχέσης (7.25) ονομάζεται γραμμή φάσης.

Ας υποθέσουμε ότι η αρχική τιμή του λόγου κεφαλαίου-εργασίας τη χρονική στιγμή t=0 είναι ίση με k_0. Από τη γραμμή φάσης, βρίσκουμε ότι τη χρονική στιγμή t=1, η τιμή του λόγου κεφαλαίου-εργασίας θα είναι k_1 στον κάθετο άξονα. Χρησιμοποιώντας την γραμμή των 45$^{\text{o}}$, μεταφέρουμε το επίπεδο k_1 στον οριζόντιο άξονα. Στη συνέχεια, από τη γραμμή φάσης, η τιμή του λόγου κεφαλαίου εργασίας τη χρονική στιγμή t=2 είναι k_2. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι ο λόγος κεφαλαίου-εργασίας να φτάσει στο μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας του k^*. Η διαδικασία είναι ίδια και στην περίπτωση που η αρχική τιμή k_0 είναι μεγαλύτερη από την ισορροπία σταθερής κατάστασης k^*.

Όσον αφορά στους ρυθμούς μεγέθυνσης των συνολικών μεγεθών στην ισορροπία σταθερής κατάστασης, λαμβάνοντας υπόψη πως ισχύει ότι $y^* = Y^* / L \Rightarrow Y^* = y^* \cdot L$, ο ρυθμός μεγέθυνσης του συνολικού προϊόντος θα είναι:

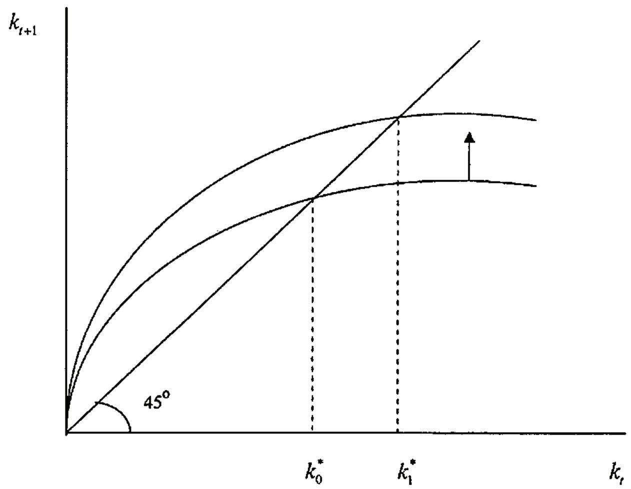
$$g_Y = \frac{1}{Y^*}\frac{dY}{dt} = \frac{y^*}{Y^*}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = n \qquad (7.30).$$

Αντίστοιχα για το κεφάλαιο, με δεδομένο ότι ισχύει πως $k^* = K^* / L \Rightarrow K^* = k^* \cdot L$, ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου θα είναι:

$$g_{\mathrm{K}} = \frac{1}{K^*}\frac{d\mathrm{K}}{dt} = \frac{k^*}{K^*}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = n \qquad (7.31).$$

Γίνεται, επομένως, κατανοητό ότι στην ισορροπία σταθερής κατάστασης τα κατά κεφαλήν μεγέθη παραμένουν σταθερά ενώ τα συνολικά μεγέθη μεγεθύνονται με τον ρυθμό μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού (n).

Ας υποθέσουμε ,τώρα. ότι η οικονομία βρίσκεται στην ισορροπία σταθερής κατάστασης με λόγο κεφαλαίου-εργασίας ίσο με k_0^*. Έστω ότι σημειώνεται μια αύξηση του συντελεστή προεξόφλησης β. Η αύξηση αυτή συνεπάγεται ότι τα άτομα δίνουν μεγαλύτερη σημασία στην κατανάλωση της δεύτερης περιόδου της ζωής τους. Επομένως, αυξάνεται η αποταμίευση ή διαφορετικά το ποσοστό του μισθού $(\beta / 1+\beta)$ που τα άτομα αποταμιεύουν την πρώτη περίοδο της ζωής τους. Το διάγραμμα Δ-7.2 απεικονίζει την επίδραση αυτής της αύξησης του συντελεστή προεξόφλησης στο λόγο κεφαλαίου-εργασίας. Όπως παρατηρούμε, η αύξηση του β μετατοπίζει την γραμμή φάσης προς τα πάνω. Νέα ισορροπία σταθερής κατάστασης επιτυγχάνεται στο σημείο τομής της νέας γραμμής φάσης με την γραμμή των 45^o, όπου το μακροχρόνιο επίπεδο ισορροπίας του λόγου κεφαλαίου-εργασίας έχει αυξηθεί σε k_1^*. Καθώς η οικονομία κινείται από την αρχική κατάσταση ισορροπίας στη νέα, ο λόγος κεφαλαίου-εργασίας (όπως και ο λόγος προϊόντος-εργασίας) αυξάνεται με φθίνοντα ρυθμό. Μακροχρόνια, ωστόσο, και τα δύο μεγέθη φτάνουν στο νέο σταθερό και υψηλότερο επίπεδο ισορροπίας τους. Επίσης, τα συνολικά μεγέθη (προϊόν και κεφάλαιο) εξακολουθούν να μεγεθύνονται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό, τον ρυθμό μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού (n).



Δ-7.2

7.3.1 Οικονομική Εφαρμογή

Σε μια οικονομία που λειτουργεί στα πλαίσια του υποδείγματος επικαλυπτόμενων γενεών οι προτιμήσεις περιγράφονται από τη συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U_t = c_{1t}\left(c_{2t+1}\right)^2$$

και η συνάρτηση παραγωγής είναι της παρακάτω μορφής:

$$Y_t = 100 K_t^{0.5} L_t^{0.5}.$$

Επιπλέον, δίνεται ο ρυθμός μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού $n = 0.05$.

A) Να βρεθούν οι συναρτήσεις ζήτησης για κατανάλωση πρώτης και δεύτερης περιόδου και οι συναρτήσεις ατομικής και συνολικής αποταμίευσης.

B) Να λυθεί το πρόβλημα των επιχειρήσεων.

C) Να εξαχθεί η εξίσωσης κίνησης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας.

D) Να υπολογιστούν τα επίπεδα των λόγων κεφαλαίου-εργασίας και προϊόντος-εργασίας στην ισορροπία σταθερής κατάστασης.

Λύση

A) Το πρόβλημα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού είναι:

$$\max_{c_{1t}, c_{2t+1}} U_t = c_{1t} \left(c_{2t+1} \right)^2$$

υπό τον δια βίου εισοδηματικό περιορισμό:

$$c_{1t} + \frac{1}{1 + r_{t+1}} c_{2t+1} = w_t$$

Επιλύουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lagrange. Η συνάρτηση Lagrange έχει ως εξής:

$$L = c_{1t} \left(c_{2t+1} \right)^2 + \lambda \left(w_t - c_{1t} - \frac{1}{1 + r_{t+1}} c_{2t+1} \right)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1t}} = 0 \Rightarrow \left(c_{2t+1} \right)^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \left(c_{2t+1} \right)^2 = \lambda \qquad (7.3.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2t+1}} = 0 \Rightarrow 2c_{1t} \left(c_{2t+1} \right) - \lambda \frac{1}{1 + r_{t+1}} = 0 \Rightarrow 2c_{1t} \left(c_{2t+1} \right) = \lambda \frac{1}{1 + r_{t+1}} \qquad (7.3.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow w_t - c_{1t} - \frac{1}{1 + r_{t+1}} c_{2t+1} = 0 \Rightarrow c_{1t} + \frac{1}{1 + r_{t+1}} c_{2t+1} = w_t \qquad (7.3.3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (7.3.1) και (7.3.2), προκύπτει η συνθήκη ισορροπίας του καταναλωτή σύμφωνα με την οποία ο οριακός λόγος υποκατάστασης της κατανάλωσης των δύο περιόδων της ζωής των νοικοκυριών ισούται με τη σχετική τιμή τους, δηλαδή με $1+r_{t+1}$. Η τελευταία έχει ως εξής:

$$\frac{\left(c_{2t+1}\right)^2}{2c_{1t}\left(c_{2t+1}\right)} = 1+r_{t+1} \Rightarrow \frac{c_{2t+1}}{2c_{1t}} = 1+r_{t+1} \Rightarrow c_{2t+1} = 2\left(1+r_{t+1}\right)c_{1t} \qquad (7.3.4)$$

Αντικαθιστούμε τη συνθήκη ισορροπίας (7.3.4) στον περιορισμό (σχέση (7.3.3)) και λαμβάνουμε τη συνάρτηση ζήτησης για κατανάλωση της πρώτης περιόδου. Συνεπώς, από (7.3.3):

$$c_{1t} + \frac{1}{1+r_{t+1}}c_{2t+1} = w_t \overset{(7.3.4)}{\Rightarrow}$$

$$c_{1t} + 2\frac{1}{1+r_{t+1}}\left(1+r_{t+1}\right)c_{1t} = w_t \Rightarrow$$

$$c_{1t} + 2c_{1t} = w_t$$

$$c_{1t} = \frac{w_t}{3} \qquad (7.3.5)$$

Αντικαθιστώντας την (7.3.5) στην (7.3.4), εξάγουμε τη συνάρτηση ζήτησης για κατανάλωση τη δεύτερη περίοδο της ζωής του ατόμου.

$$c_{2t+1} = 2\left(1+r_{t+1}\right)c_{1t} \overset{(7.3.5)}{\Rightarrow}$$

$$c_{2t+1} = 2\left(1+r_{t+1}\right)\frac{w_t}{3} \Rightarrow$$

$$c_{2t+1} = \frac{2}{3}\left(1+r_{t+1}\right)w_t \qquad (7.3.6)$$

Η ατομική συνάρτηση αποταμίευσης προκύπτει από τον περιορισμό που αντιμετωπίζει το άτομο την πρώτη περίοδο της ζωής του, δηλαδή:

$$c_{1t} + s_t = w_t \Rightarrow$$

$$s_t = w_t - c_{1t} \overset{(7.3.5)}{\Rightarrow}$$

$$s_t = w_t - \frac{w_t}{3} \Rightarrow$$

$$s_t = \frac{2}{3} w_t \tag{7.3.7}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι προτιμήσεις των καταναλωτών είναι ομοιογενείς, η συνολική συνάρτηση αποταμίευσης δίνεται από το γινόμενο του αριθμού των ατόμων που βρίσκονται στην πρώτη περίοδο της ζωής τους $\left(L_t\right)$ επί την ατομική αποταμίευση. Δηλαδή,

$$S_t = L_t s_t = L_t \frac{2}{3} w_t \tag{7.3.8}$$

B) Το πρόβλημα των επιχειρήσεων:

$$\max_{K_t, L_t} \Pi_t = 100 K_t^{0.5} L_t^{0.5} - w_t L_t - r_t K_t \qquad (7.3.9).$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = 0 \Rightarrow (0.5) 100 K_t^{-0.5} L_t^{0.5} - r_t = 0 \Rightarrow 50 K_t^{-0.5} L_t^{0.5} = r_t \tag{7.3.10}$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \Rightarrow (0.5) 100 K_t^{0.5} L_t^{-0.5} - w_t = 0 \Rightarrow 50 K_t^{0.5} L_t^{-0.5} = w_t \tag{7.3.11}$$

Οι σχέσεις (7.3.10) και (7.3.11) δηλώνουν ότι στην ισορροπία οι συντελεστές παραγωγής αμείβονται με το οριακό τους προϊόν. Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν αντίστοιχα και σε όρους κεφαλαίου-εργασίας ως εξής:

$$(7.3.10) \Rightarrow r_t = 50 k_t^{-0.5} \tag{7.3.12}$$

$$(7.3.11) \Rightarrow w_t = 50 k_t^{0.5} \tag{7.3.13}$$

C) Από τη συνθήκη ισορροπίας στην αγορά περιουσιακών στοιχείων (σχέση (7.23) έχουμε:

$$s_t = (1+n) k_{t+1},$$

Με αντικατάσταση των συναρτήσεων (7.3.7) και (7.3.13) στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε:

$$s_t = (1+n)k_{t+1} \overset{(7.3.7)}{\Rightarrow}$$
$$\frac{2}{3}w_t = (1+n)k_{t+1} \overset{(7.3.13)}{\Rightarrow}$$
$$\frac{2}{3}50k_t^{0.5} = (1+n)k_{t+1} \overset{n=0.05}{\Rightarrow}$$
$$\frac{2}{3}50k_t^{0.5} = (1+0.05)k_{t+1} \Rightarrow$$
$$1.05k_{t+1} = \frac{100}{3}k_t^{0.5}$$
$$k_{t+1} = \frac{100}{3.15}k_t^{0.5} \tag{7.3.14}$$

Η εξίσωση (7.3.14) είναι μια μη γραμμική εξίσωση διαφορών και αποτελεί την εξίσωση κίνησης του λόγου κεφαλαίου-εργασίας.

D) Στην ισορροπία σταθερής κατάστασης ισχύει ότι: $k_{t+1} = k_t = k^*$. Συνεπώς, από την εξίσωση κίνησης, σχέση (7.3.14), παίρνουμε την τιμή του λόγου κεφαλαίου-εργασίας στη μακροχρόνια ισορροπία:

$$k^* = \frac{100}{3.15}k^{*0.5} \Rightarrow$$
$$\frac{k^*}{k^{*0.5}} = \frac{100}{3.15} \Rightarrow$$
$$k^{*0.5} = \frac{100}{3.15} \Rightarrow$$
$$k^* = \left(\frac{100}{3.15}\right)^2$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή στην εντατική μορφή της συνάρτησης παραγωγής, παίρνουμε την τιμή του λόγου προϊόντος-εργασίας στην ισορροπία σταθερής κατάστασης. Επομένως, από την εντατική μορφή της συνάρτησης παραγωγής:

$$y_t = 100k_t^{0.5} \Rightarrow$$
$$y^* = 100k^{*0.5} \Rightarrow$$

$$y^* = \frac{10000}{3.15}$$

7.4 Ο Χρυσός Κανόνας Οικονομικής Μεγέθυνσης

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο όρος «**χρυσός κανόνας**» αναφέρεται το επίπεδο του λόγου κεφαλαίου-εργασίας που μεγιστοποιεί την κατανάλωση ανά εργαζόμενο. Από τη συνθήκη ισορροπίας στην αγορά αγαθών:

$$Y_t = C_t + I_t \Rightarrow$$
$$F\left(K_t, L_t\right) = C_t + K_{t+1} - K_t \Rightarrow$$
$$F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = \frac{C_t}{L_t} + \frac{K_{t+1}}{L_t} - \frac{K_t}{L_t} \overset{L_t = L_{t+1}/(1+n)}{\Rightarrow}$$
$$f\left(k_t\right) = c_t + \left(1+n\right)k_{t+1} - k_t \Rightarrow$$
$$c_t = f\left(k_t\right) - \left(1+n\right)k_{t+1} + k_t \qquad (7.32)$$

Εάν υποθέσουμε στασιμότητα, δηλαδή ότι $k_{t+1} = k_t = k$, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$c_t = f\left(k\right) - nk \qquad (7.33)$$

Μεγιστοποιώντας την παραπάνω συνάρτηση ως προς το λόγο κεφαλαίου-εργασίας, παίρνουμε:

$$\frac{\partial c}{\partial k} = 0 \Rightarrow f'\left(k\right) - n = 0 \Rightarrow f'\left(k_g\right) = n \qquad (7.34).$$

Το επίπεδο του λόγου κεφαλαίου-εργασίας $\left(k_g\right)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (7.34) αποτελεί τον χρυσό κανόνα της οικονομίας.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση παραγωγής είναι η Cobb-Douglas $y_t = Ak_t$, με χρήση της συνθήκης (7.34), ο χρυσός κανόνας προκύπτει ως εξής: