Εισαγωγικές Μαθηματικές Έννοιες 1

Στόχοι του κεφαλαίου

Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα πρέπει να είστε ικανοί να:

- Επιλύετε εξισώσεις με έναν άγνωστο και εξισώσεις με κλάσματα
- Κατανοείτε τη σημασία της μη ύπαρξης λύσης και τη σημασία της ύπαρξης άπειρων λύσεων σε μια εξίσωση
- Επιλύετε απλές ανισώσεις
- Υπολογίζετε ποσοστά

1.1 Εισαγωγικές γνώσεις στα μαθηματικά

Οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά για ομαδοποίηση και σαφήνεια.

Οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται επίσης για να υποδηλώσουν τον πολλαπλασιασμό.

Οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται και στις συναρτήσεις, για να δείξουν την ανεξάρτητη μεταβλητή (βλ. παρακάτω).

Δυνάμεις: θετικοί ακέραιοι αριθμοί όπως ο 2^3, ο οποίος σημαίνει $2 \times 2 \times 2 = 8$:

$$
\begin{aligned}
(\text{οτιδήποτε})^3 &= (\text{οτιδήποτε}) \times (\text{οτιδήποτε}) \times (\text{οτιδήποτε}) \\
(x)^3 &= x \times x \times x \\
(x+4)^5 &= (x+4)(x+4)(x+4)(x+4)(x+4)
\end{aligned}
$$

Σημείωση:

Οι παρενθέσεις: $(A)(B)$ ή $A \times B$ ή AB

όλες σημαίνουν το A πολλαπλασιασμένο με το B.

Μεταβλητές και γράμματα: Όταν δεν γνωρίζουμε την τιμή μιας ποσότητας, τότε ορίζουμε αυτή την ποσότητα μ' ένα σύμβολο, όπως το x. Έτσι είμαστε σε θέση να κάνουμε γενικές δηλώσεις για αυτή την άγνωστη ποσότητα ή μεταβλητή, x. Για παράδειγμα, «Για τις επόμενες 15 εβδομάδες, αν αποταμιεύω x ποσό κάθε εβδομάδα, θα συγκεντρώσω $4,500 για να ξοδέψω στις διακοπές». Η δήλωση αυτή μπορεί να εκφραστεί από την εξής μαθηματική εξίσωση:

$$
\begin{aligned}
15 \times \text{εβδομαδιαία αποταμίευση} &= 4500 \\
15 \times x &= 4500
\end{aligned}
$$

Τώρα που η δήλωση έχει εκφραστεί από μια μαθηματική εξίσωση (βλ. Ενότητα 1.2 για περισσότερα σχετικά με τις εξισώσεις), μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση για να βρούμε τον άγνωστο, x:

$$
\begin{aligned}
15x &= 4500 \\
\frac{15x}{15} &= \frac{4500}{15} \quad \text{διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 15} \\
x &= 300
\end{aligned}
$$

Άλγεβρα: Ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με το χειρισμό συμβόλων (γραμμάτων) καλείται **άλγεβρα**. Ένας **αλγεβρικός όρος** (algebraic term) αποτελείται από γράμματα/σύμβολα. Επομένως, στο παραπάνω παράδειγμα, το x είναι ένας αλγεβρικός όρος (ή απλά ένας όρος). **Μια αλγεβρική έκφραση** (algebraic expression) (ή απλά μια **έκφραση**) είναι ένας τύπος που περιέχει αλγεβρικούς όρους (αλλά μπορεί να περιέχει και σταθερές), π.χ., $x + 5x + 8$.

Τετραγωνικές ρίζες: Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού είναι το αντίστροφο της ύψωσης στο τετράγωνο:

$$
\begin{aligned}
(2)^2 &= 4 \to \sqrt{4} = 2 \\
(2.5)^2 &= 6.25 \to \sqrt{6.25} = 2.5
\end{aligned}
$$

Ακρίβεια: στρογγυλοποίηση αριθμών σε x δεκαδικά ψηφία

Όταν χρησιμοποιούμε μια αριθμομηχανή, πολύ συχνά εμφανίζεται ένας αριθμός με ένα πλήθος ψηφίων μετά το κόμμα (ή την τελεία). Για παράδειγμα, $15/7 = 2.142\,857\,1\ldots$ Στις περισσότερες περιπτώσεις δεν είναι ανάγκη να έχουμε όλους αυτούς τους αριθμούς. Όμως, αν αγνοήσουμε κάποιους, αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα οι επόμενοι υπολογισμοί να είναι λιγότερο ακριβείς. Για να ελαχιστοποιήσουμε αυτήν την απώλεια ακρίβειας, υπάρχουν κανόνες «στρογγυλοποίησης» των αριθμών σε ένα συγκεκριμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Θεωρούμε: (α) $15/7 = 2.142\,857\,1$, (β) $6/7 = 0.857\,142\,8$. Υποθέτουμε ότι απαιτούνται μόνο τρία δεκαδικά ψηφία. Για να στρογγυλοποιήσουμε σωστά σε τρία δεκαδικά ψηφία, βλέπουμε τον αριθμό στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο:

- Αν ο αριθμός στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο είναι μικρότερος του 5, απλώς διατηρούμε τα πρώτα τρία δεκαδικά ψηφία ως έχουν: (β) $6/7 = 0.857\,142\,8$: χρησιμοποιούμε το 0.857, όταν στρογγυλοποιούμε σε τρία δεκαδικά ψηφία.

- Αν ο αριθμός στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο είναι 5 ή μεγαλύτερος, τότε αυξάνουμε τον αριθμό στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο κατά 1 μονάδα, πριν αγνοήσουμε τα υπόλοιπα δεκαδικά ψηφία: (α) $15/72.142\,857\,1\cdot$ όταν χρησιμοποιούμε το 2.143, στρογγυλοποιούμε σε τρία δεκαδικά ψηφία.

Για να πάρουμε μια ιδέα της μεγαλύτερης απώλειας ακρίβειας που προκαλείται από την απλή αποκοπή δεκαδικών ψηφίων αντί για τη στρογγυλοποίηση στον ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων, υπολογίζουμε (α) την ακριβή τιμή του $15/7$, μ' ένα κομπιουτεράκι, (β) το $15/7$ με αποκοπή μετά το τρίτο δεκαδικό ψηφίο και (γ) το $15/7$ με στρογγυλοποίηση στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο. Ενώ αυτά τα σφάλματα μπορεί να φαίνονται μικρά, μπορούν να γίνουν πολύ μεγάλα σε ακόλουθους υπολογισμούς. Ένα απλό παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει τι επίπτωση έχει η ύψωση της αποκομμένης και της στρογγυλοποιημένης τιμής του $15/7$ στη δύναμη του 20.

Σημείωση: Σφάλμα = ακριβής τιμή – προσεγγιστική τιμή.

	(α) Ακριβής τιμή	(β) Αποκοπή στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο	(γ) Στρογγυλοποίηση στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο
	$15/7 = 2.142\,857\,143\ldots$	$15/7 = 2.142$	$15/7 = 2.143$
Σφάλμα	0	Σφάλμα αποκοπής $= 0.000\,857\,143\ldots$	Σφάλμα στρογγυλοποίησης $= 0.000\,142\,857\ldots$
Ύψωση στη δύναμη του 20	$\left(\frac{15}{7}\right)^{20} = (2.142\,857\,143\ldots)^{20} = 4\,167\,392$ (ακέραιο μέρος του αποτελέσματος)	$(2.142)^{20} = 4\,134\,180$ (ακέραιο μέρος του αποτελέσματος)	$(2.143)^{20} = 4\,172\,952$ (ακέραιο μέρος του αποτελέσματος)
Σφάλμα	0	$4\,167\,392 - 4\,134\,180 = 33\,213$	$4\,167\,392 - 4\,172\,952 = -5560$

1.2 Επίλυση εξισώσεων

Μια εξίσωση είναι μια δήλωση σύμφωνα με την οποία η έκφραση στην αριστερή πλευρά (left-hand side/LHS) του συμβόλου «=» είναι ίση με την έκφραση στη δεξιά πλευρά (right-hand side/RHS) του συμβόλου «=».

$$\frac{\text{LHS} = \text{RHS}}{\triangle}$$

Η λύση μιας εξίσωσης είναι απλώς η τιμή ή οι τιμές του αγνώστου (ή των αγνώστων) για την οποία(ες) η RHS γίνεται ίση με την LHS.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $x + 4 = 10$ έχει τη λύση $x = 6$. Λέμε ότι το $x = 6$ «ικανοποιεί» την εξίσωση. Λέμε επίσης ότι αυτή η εξίσωση έχει **μία μοναδική λύση**.

Μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων

Για να λύσουμε μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, x, την αναδιατάσσουμε με στόχο την απομόνωση του x σε ένα μέλος της εξίσωσης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με ποικίλους τρόπους, όπως:

- προσθέτοντας ή αφαιρώντας έναν αριθμό ή όρο σε κάθε πλευρά της εξίσωσης,
- πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας κάθε μέλος της εξίσωσης με έναν αριθμό ή όρο (δεν επιτρέπεται η διαίρεση με το 0!).

Είναι εξαιρετικά σημαντικό να θυμόμαστε ότι όποια πράξη εκτελείται στην LHS της εξίσωσης, αυτή ακριβώς η πράξη πρέπει να εκτελείται και στην RHS της εξίσωσης, γιατί διαφορετικά η εξίσωση παύει να ισχύει.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1
ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(α) Δίνεται η εξίσωση $x + 3 = 2x - 6 + x$. Να λυθεί ως προς x.

(β) Δίνεται η εξίσωση $(x + 3)(x - 6) = 0$. Να λυθεί ως προς x.

(γ) Δίνεται η εξίσωση $(x + 3)(x - 3) = 0$. Να λυθεί ως προς x.

ΛΥΣΗ

(α) $x + 3 = 2x - 6 + 5x$

$x + 3 = 7x - 6$ προσθέτουμε τους x-όρους στην RHS

$x + 3 + 6 = 7x - 6 + 6$ απαλείφουμε τον όρο -6 στην RHS

προσθέτουμε το $+6$ και στις δύο πλευρές

Συνεπώς ο γνωστός κανόνας: «μεταφέρουμε το -6 στην άλλη πλευρά και αλλάζουμε το πρόσημο σε $+6$»

$x + 3 + 6 = 7x$

$x + 9 = 7x$

$9 = 7x - x$ πάμε το x στην άλλη πλευρά

$9 = 6x$

$\frac{9}{6} = x$ διαιρούμε τις δύο πλευρές με το 6

$1.5 = x$

(β) $(x + 3)(x - 6) = 0$

Η LHS της εξίσωσης αυτής αποτελείται από το γινόμενο των όρων $(x + 3)$ και $(x - 6)$. Ένα γινόμενο είναι μηδέν μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες $(x + 3)$, $(x + 6)$ είναι 0.

Εδώ υπάρχουν δύο λύσεις: $(x + 3) = 0$, δηλαδή $x = -3$, και $(x - 6) = 0$, δηλαδή $x = 6$.

Καθεμία από αυτές τις λύσεις μπορεί να επαληθευτεί με απλή αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση.

Επαλήθευση των λύσεων:

Αντικαθιστούμε $x = -3$ στην $(x + 3)(x - 6) = 0$: $(-3 + 3)(-3 - 6) = 0$: $(0)(-9) = 0$: $0 = 0$. Αληθές.

Αντικαθιστούμε $x = 6$ στην $(x + 3)(x - 6) = 0$: $(6 + 3)(6 - 6) = 0$: $(9)(0) = 0$: $0 = 0$. Αληθές.

(γ) Αυτό είναι παρόμοιο με το ερώτημα (β), ένα γινόμενο στην LHS και μηδέν στην RHS. Έτσι η εξίσωση $(x - 3)(x + 3) = 0$ έχει δύο λύσεις: $x = 3$ από την πρώτη παρένθεση και $x = -3$ από τη δεύτερη παρένθεση.

Εναλλακτικά, αν εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό των παρενθέσεων, η εξίσωση απλοποιείται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
(x-3)(x+3) &= 0 \\
x(x+3) - 3(x+3) &= 0 \\
x(x) + x(3) - 3(x) - 3(3) &= 0 \\
x^2 + 3x - 3x - 9 &= 0 \\
x^2 - 9 &= 0 \\
x^2 &= 9 \quad \text{απλοποιημένη εξίσωση} \\
x &= +\sqrt{9} \\
x &= 3 \quad \text{ή} \quad x = -3
\end{aligned}$$

Υπάρχουν δύο λύσεις γιατί το x μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό και οι δύο ικανοποιούν την απλοποιημένη εξίσωση $x^2 = 9$.

Αν $x = 3 \rightarrow x^2 = 9$, που ικανοποιεί την εξίσωση.

Αν $x = -3 \rightarrow x^2 = (-3)^2 = 9$, που επίσης ικανοποιεί την εξίσωση.

Επομένως, όταν λύνουμε εξισώσεις της μορφής x^2 = θετικός αριθμός, υπάρχουν πάντα δύο λύσεις:

$$\boxed{x = +\sqrt{\text{αριθμός}} \quad \text{και} \quad x = -\sqrt{\text{αριθμός}}}$$

Όλες οι εξισώσεις δεν έχουν λύση. Στην πραγματικότητα, οι εξισώσεις μπορεί να μην έχουν καθόλου λύσεις ή μπορεί να έχουν άπειρες λύσεις. Καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις αναδεικνύεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Περίπτωση 1: Μοναδική λύση Ένα παράδειγμα για αυτή την περίπτωση δόθηκε παραπάνω, όπως η εξίσωση $x + 4 = 10$ κτλ.

Περίπτωση 2: Άπειρες λύσεις Η εξίσωση $x + y = 10$ έχει λύσεις $(x = 5, y = 5)$, $(x = 4, y = 6)$, $(x = 3, y = 7)$ κτλ. Στην πραγματικότητα, η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις ή άπειρα ζεύγη τιμών (x, y) που ικανοποιούν τον τύπο $x+y = 10$.

Περίπτωση 3: Καμία λύση Η εξίσωση $0(x) = 5$ δεν έχει λύση. Απλώς, δεν υπάρχει κάποια τιμή για το x που μπορεί να πολλαπλασιαστεί με το 0 και να δώσει 5.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2
ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Βρείτε τα κινούμενα Λυμένα Παραδείγματα στο

links.kritiki.gr/math-bradley

Στο παράδειγμα αυτό να προσπαθήσετε να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις. Οι απαντήσεις δίνονται παρακάτω μαζί με τις αναλυτικές λύσεις.

(α) $2x + 3 = 5x - 8$ (β) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 5$

(γ) $x^2 + 4x - 6 = 2(2x + 5)$ (δ) $(x - y) = 4$ (ε) $x^3 - 2x = 0$

ΛΥΣΗ

Να επαληθεύσετε τις απαντήσεις:

(α) $x = 11/3$ (β) $x = 0.6$ (γ) $x = 4,\ \ x = -4$

(δ) Άπειρες λύσεις για τις οποίες $x = y + 4$ (ε) $x = 0,\ \ x = \sqrt{2},\ \ x = -\sqrt{2}$

Προτεινόμενες λύσεις για το Λυμένο Παράδειγμα 1.2

(α) $2x + 3 = 5x - 8$

$3 + 8 = 5x - 2x$

$11 = 3x$

$\frac{11}{3} = x$

(β) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 5$

$\frac{1+2}{x} = 5$

$\frac{3}{x} = \frac{5}{1}$

$3 = 5x$ πολλαπλασιάζουμε κάθε πλευρά με x

$5x = 3$ αλλάζουμε πλευρές

$x = \frac{3}{5} = 0.6$ διαιρούμε αμφότερες πλευρές με 5

(γ) $x^2 + 4x - 6 = 2(2x + 5)$

Αυτήν τη φορά απλοποιούμε πολλαπλασιάζοντας πρώτα τις παρενθέσεις και αθροίζοντας τους ομοίους όρους:

$$x^2 + 4x - 6 = 4x + 10$$

$$x^2 + 4x - 4x = 10 + 6$$ μεταφέρουμε όλους τους x-όρους

στη μια πλευρά και τις σταθερές στην άλλη

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

(δ) $(x - y) = 4$: Εδώ έχουμε μια εξίσωση με δύο αγνώστους, οπότε δεν είναι δυνατόν να βρούμε μία μοναδική λύση. Η εξίσωση μπορεί να αναδιαταχθεί ως

$$x = y + 4$$

Η εξίσωση αυτή δηλώνει ότι για κάθε τιμή του y (και υπάρχουν άπειρες τιμές που μπορεί να πάρει το y), το x είναι ίσο με αυτήν την τιμή συν 4. Έτσι υπάρχουν άπειρες λύσεις.

(ε) Το x υπάρχει και στους δύο όρους και επομένως μπορούμε να διαχωρίσουμε ή να παραγοντοποιήσουμε το x από κάθε όρο όπως φαίνεται παρακάτω:

$x^3 - 2x = 0$

$x(x^2 - 2) = 0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x = 0$ ή/και $(x^2 - 2) = 0$ το γινόμενο $x(x^2 - 2)$ είναι μηδέν αν τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι μηδέν

$x = 0$ ή/και $x^2 = 2$

Λύση: $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$

Μια άσκηση για τον αναγνώστη: Να επαληθεύσετε ότι οι λύσεις ικανοποιούν την εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥ 1.1

Να επιλυθούν οι εξισώσεις με τη χρήση βασικών γνώσεων

Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις. Να θυμάστε ότι οι εξισώσεις μπορεί να μην έχουν λύση ή να έχουν άπειρες λύσεις.

1. $2x + 3x + 5(2x - 3) = 30$

2. $4x^2 + 7x - 2x(2x - 5) = 17$

3. $(x - 2)(x + 4) = 0$

4. $(x - 2)(x + 4) = 2x$

5. $(x - 2)(x + 4) = -8$

6. $x(x - 2)(x + 4) = 0$

7. $4x(x - 2)(x - 2) = 0$

8. $2x(y + 2) - 2y(x + 2) = 0$

9. $(x + 2)(y + 2) = 0$

10. $(x + 2)(y + 2) + (x - 3)(y + 2) = 0$

11. $(x - 2)(x + 4) - 2(x - 4) = 0$

12. $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 0$

13. $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 0$

14. $x(x^2 + 2) = 0$

15. $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$

16. $\frac{x}{3} = 2x$

17. $\frac{2}{x} - \frac{3}{2x} = 1$

18. $\frac{4x(x - 4)(x + 3.8)}{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x + 102} = 0$

19. $\left(\frac{-12P}{P}\right)\left(\frac{3P}{2} + \frac{P}{2}\right) = 480$

20. $\frac{2}{Q} = 0$

21. $\frac{\left(\frac{25}{x}\right)}{x} = 1$

22. $\frac{\left(\frac{5Q}{P + 2}\right)}{\left(\frac{1}{P + 2}\right)} = 20$

23. $10 - \frac{1}{10Q} = 0$

24. $4x + 8(x - 2) = 12$

25. $\frac{2}{x} = 4$

26. $2 - 0.75x = x - 1.5$

27. $3x(x - 2) = 0$

28. $(x - 2)^2 = 4$

29. $100(1 - x)(1 + x) = 0$

30. $100(1 - x)(1 + x) = 100$

31. $\frac{x}{5} + \frac{2x}{5} - \frac{6}{5} = 3$

32. $\frac{7}{2x} - \frac{x}{9} = x$

33. $\frac{x - 3}{5} + \frac{2}{x} - \frac{x}{5} = \frac{3}{10}$

1.3 Απλές ανισώσεις

Μια εξίσωση είναι μια ισότητα. Δηλώνει ότι η έκφραση που βρίσκεται στην LHS του συμβόλου «=» ισούται με την έκφραση που βρίσκεται στην RHS του. Μια ανίσωση είναι μια δήλωση στην οποία η έκφραση που βρίσκεται στην LHS είναι είτε μεγαλύτερη από (δηλώνεται με το σύμβολο $>$) είτε μικρότερη από (δηλώνεται με το σύμβολο $<$) την έκφραση που βρίσκεται στην RHS. Για παράδειγμα, $5 = 5$ ή $5x = 5x$ είναι εξισώσεις, ενώ

$$5 > 3 \qquad 5x > 3x$$

είναι ανισώσεις που διαβάζονται ως «το 5 είναι μεγαλύτερο του 3», «το $5x$ είναι μεγαλύτερο του $3x$» (για κάθε θετική τιμή του x).

Σημείωση: Οι ανισώσεις μπορούν να διαβαστούν από τα αριστερά προς τα δεξιά, όπως παραπάνω, ή η ανίσωση μπορεί να διαβαστεί από τα δεξιά προς τα αριστερά. Σε αυτή την περίπτωση οι ανωτέρω ανισώσεις γράφονται

$5 > 3$ («το 5 είναι μεγαλύτερο του 3») είναι το ίδιο με $3 < 5$ («το 3 είναι μικρότερο του 5»)

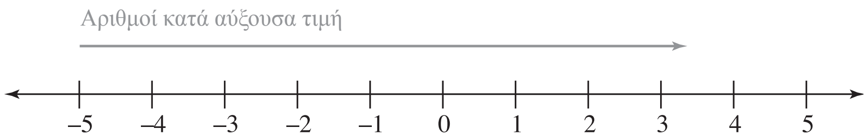
$5x > 3x$ («το $5x$ είναι μεγαλύτερο του $3x$») είναι το ίδιο με $3x < 5x$ («το $3x$ είναι μικρότερο του $5x$»)

Σύμβολα ανισότητας

$>$ μεγαλύτερο από	$<$ μικρότερο από
$\geq$ μεγαλύτερο από ή ίσο με	$\leq$ μικρότερο από ή ίσο με

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών

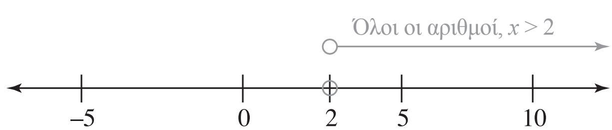
Η ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι μια οριζόντια ευθεία στην οποία κάθε σημείο αντιπροσωπεύει έναν πραγματικό αριθμό. Το κεντρικό σημείο της ευθείας είναι το μηδέν, οι αριθμοί στα αριστερά του κεντρικού σημείου είναι αρνητικοί, ενώ οι αριθμοί στα δεξιά του κεντρικού σημείου είναι θετικοί, όπως φαίνεται από τους επιλεγμένους αριθμούς στην Εικόνα 1.1.



Εικόνα 1.1: Η ευθεία των πραγματικών αριθμών· οι αριθμοί μεγαλώνουν από τα αριστερά προς τα δεξιά

Δείτε προσεκτικά τους αρνητικούς αριθμούς. Όσο οι αριθμοί αυξάνουν σε απόλυτη τιμή μειώνονται σε μέγεθος. Για παράδειγμα το -1 είναι μεγαλύτερος αριθμός του -2, το -0.3 είναι μεγαλύτερος από το -0.5. Ένας άλλος τρόπος είναι να πούμε ότι οι αριθμοί γίνονται λιγότερο αρνητικοί καθώς αυξάνουν. [Όπως σε έναν τραπεζικό λογαριασμό, είσαι σε καλύτερη θέση όταν χρωστάς £10 (-10) παρά όταν χρωστάς £1000 (-1000).]

Μια ανισότητα όπως η $x > 2$ δηλώνει όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 2, μη συμπεριλαμβανομένου όμως του 2. Η δήλωση αυτή παριστάνεται γραφικά με όλα τα σημεία της ευθείας των πραγματικών αριθμών που βρίσκονται δεξιά του αριθμού 2, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.2, με έναν άχρωμο κύκλο στον αριθμό 2, για να δείξει ότι το 2 δεν συμπεριλαμβάνεται στο διάστημα (ένας σκούρος κύκλος στο σημείο 2 θα έδειχνε ότι αυτό περιλαμβάνεται στο διάστημα).



Εικόνα 1.2: Η ανισότητα, $x > 2$

Στα οικονομικά, έχει νόημα να μιλάμε για θετικές τιμές και ποσότητες. Στο βιβλίο αυτό θα υποθέτουμε ότι η μεταβλητή $x \geq 0$ κατά την επίλυση των ανισώσεων.

Διαστήματα οριζόμενα από ανισώσεις

Όταν σε μια εφαρμογή χρησιμοποιούμε ένα ορισμένο εύρος τιμών, τότε συχνά χρησιμοποιούμε ανισότητες για να ορίσουμε το διάστημα των τιμών με ακρίβεια. Για παράδειγμα, έστω ότι ένας φόρος επιβάλλεται σε όλα τα εισοδήματα, (£Y), ανάμεσα στο £10 000 και στο £15 000 συμπεριλαμβανομένου. Τότε λέμε ότι ο φόρος επιβάλλεται σε όλα τα εισοδήματα μέσα στο διάστημα $10\,000 \leq Y \leq 15\,000$.

Ένα συγκεκριμένο αντίτιμο εισιτηρίου ισχύει για όλα τα παιδιά ηλικίας (x) από 4 και άνω αλλά κάτω των 16. Τότε λέμε ότι το αντίτιμο του εισιτηρίου ισχύει για τις ηλικίες που ανήκουν στο διάστημα $4 \leq x < 16$. Η ηλικία των 4 συμπεριλαμβάνεται, όπως και όλες οι ηλικίες μέχρι τα 16, αλλά το 16 δεν συμπεριλαμβάνεται.

Διαχείριση ανισώσεων

Οι ανισώσεις μπορούν να αντιμετωπιστούν ως εξισώσεις για πολλές αριθμητικές πράξεις. Η ανισότητα παραμένει αληθής όταν σταθερές προστίθενται και στις δύο πλευρές ή αφαιρούνται και από τις δύο πλευρές της ή όταν και τα δύο μέλη της πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται με θετικούς αριθμούς ή μεταβλητές. Για παράδειγμα, οι παραπάνω ανισότητες παραμένουν αληθείς όταν το 8 ή το 8 προστεθεί και στα δύο μέλη,

$5 + 8 > 3 + 8$, δηλαδή $13 > 11$, ομοίως $5x + 8 > 3x + 8$

$5 - 8 > 3 - 8$, δηλαδή $-3 > -5$. Θυμηθείτε ότι το -5 είναι μικρότερο του -3. Βλ. Εικόνα 1.1.

Ωστόσο, αν και οι δύο πλευρές μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό ή μεταβλητή, τότε η φορά της ανισότητας αντιστρέφεται: το $>$ γίνεται $<$, και αντίστροφα. Για παράδειγμα, πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της ανισότητας $5 > 3$ με τον αριθμό -2:

$$5(-2) > 3(-2), \quad \text{ή} \quad -10 > -6 \quad \text{η δήλωση είναι ψευδής}$$

$$5(-2) < 3(-2), \quad \text{ή} \quad -10 < -6 \quad \text{η δήλωση είναι αληθής}$$

Επίλυση ανισώσεων

Η λύση μιας εξίσωσης είναι η τιμή (ή οι τιμές) για την οποία (τις οποίες) η δήλωση της εξίσωσης είναι αληθής. Για παράδειγμα, $x + 4 = 10$ είναι αληθής μόνο για $x = 6$. Από την άλλη πλευρά, η λύση μιας ανίσωσης είναι το εύρος τιμών για τις οποίες η δήλωση της ανισότητας είναι αληθής. Για παράδειγμα, $x + 4 > 10$ είναι αληθής για $x > 6$.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3
ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΣ ΑΠΛΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

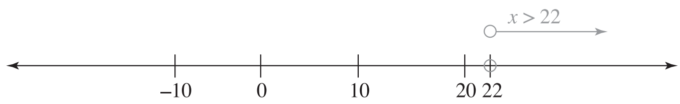
Να υπολογιστεί το εύρος τιμών για το οποίο οι παρακάτω ανισώσεις είναι αληθείς, υποθέτοντας ότι $x > 0$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας και να την αποτυπώσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

(α) $10 < x - 12$ (β) $\dfrac{-75}{x} > 15$ (γ) $2x - 6 \leq 12 - 4x$

ΛΥΣΗ

(α) $10 < x - 12 \rightarrow 10 + 12 < x \rightarrow 22 < x$ (ή $x > 22$)

Η λύση δείχνει ότι το 22 είναι μικρότερο του x ή ότι το x είναι μεγαλύτερο του 22. Επομένως, η λύση αντιπροσωπεύεται από όλα τα σημεία της ευθείας των πραγματικών αριθμών που βρίσκονται δεξιά του 22, μη συμπεριλαμβανομένου του 22, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.3.



Εικόνα 1.3: $x > 22$

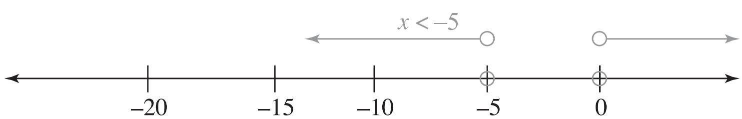
(β) $\dfrac{-75}{x} > 15$

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές της ανίσωσης με το x. Αφού $x > 0$, η φορά της ανίσωσης διατηρείται.

$$-75 > 15x$$

$$-5 > x \qquad \text{διαιρώντας και τις δύο πλευρές με το } 15$$

Η λύση δείχνει ότι το -5 είναι μεγαλύτερο του x ή το x είναι μικρότερο του -5. Όμως έχουμε υποθέσει ότι το $x > 0$. Το x δεν μπορεί να είναι μικρότερο του -5 και μεγαλύτερο του 0 ταυτόχρονα. Επομένως, η ανίσωση δεν έχει λύση, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.4.



Εικόνα 1.4: $x < -5$ και $x > 0$ είναι αδύνατο

(γ)

$$2x - 6 \le 12 - 4x$$

$$2x + 4x - 6 \le 12 \qquad \text{προσθέτουμε το } 4x \text{ και στις δύο πλευρές}$$

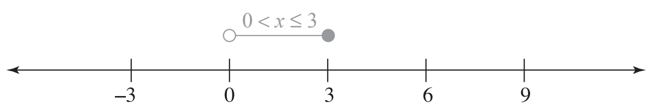
$$6x \le 12 + 6 \qquad \text{προσθέτουμε το } 6 \text{ και στις δύο πλευρές}$$

$$6x \le 18$$

$$x \le 3 \qquad \text{διαιρώντας και τις δύο πλευρές με το } 6$$

Όμως έχουμε υποθέσει ότι $x > 0$, επομένως η λύση είναι $0 < x \leq 3$.

Η λύση αντιπροσωπεύεται από όλα τα σημεία της ευθείας των πραγματικών αριθμών που βρίσκονται δεξιά από το 0 μέχρι το 3, συμπεριλαμβανομένου του 3, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.5.



Εικόνα 1.5: $0 < x \leq 3$

1.4 Υπολογισμός ποσοστών

- Όταν λέμε το 5% ενός αριθμού, εννοούμε

$$\frac{5}{100} \times \text{αριθμός}$$

- Όταν λέμε ότι ένας αριθμός αυξάνεται κατά x%, τότε η αύξηση υπολογίζεται από

$$\text{αύξηση} = \frac{x}{100} \times \frac{\text{αριθμός}}{1} = \frac{x \times \text{αριθμός}}{100}$$

- Ο νέος αριθμός ισούται με

$$\begin{aligned} = \text{αριθμός} + \text{αύξηση} = \text{αριθμός} + \frac{x \times \text{αριθμός}}{100} &= \text{αριθμός}\left(1 + \frac{x}{100}\right) \\ &= \text{αριθμός} \times \left(\frac{100 + x}{100}\right) \end{aligned}$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στους αριθμητικούς υπολογισμούς τα ποσοστά επί τοις εκατό εκφράζονται πάντοτε ως κλάσματα: αναφερόμενο ποσοστό (quote percentage) επί $100/100$. Οι ορισμοί αυτοί και οι υπολογισμοί με ποσοστά γίνονται καλύτερα κατανοητοί με τη χρήση λυμένων παραδειγμάτων.

ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΟΣΟΣΤΑ

(α) Να υπολογιστούν (i) το 23% του 1534 (ii) το 100% του 1534.

(β) Ένας ετήσιος μισθός £55 240 αυξάνεται κατά 12%. Να υπολογιστεί (i) το ποσό της αύξησης, (ii) ο νέος μισθός.

(γ) Το 2013 η αξία μιας εξοχικής κατοικίας ήταν £63 600. Η τιμή αυτή είναι μειωμένη κατά 40% από την τιμή αγοράς το 2007. Να υπολογιστεί η τιμή αγοράς το 2007.

ΛΥΣΗ

(α) Στους υπολογισμούς, οι ονομαστικές τιμές των ποσοστών επί τοις εκατό εκφράζονται πάντοτε σαν κλάσμα, αναφερόμενο ποσοστό επί $100/100$.

(i) 23% του $1534 = \dfrac{23}{100}\dfrac{1534}{1} = \dfrac{(23)(1534)}{100} = \dfrac{35\,282}{100} = 352.82$

(ii) 100% του $1534 = \dfrac{100}{100}\dfrac{1534}{1} = \dfrac{(100)(1534)}{100} = 1534$

Επομένως, 100% μιας ποσότητας = (ποσότητα)

(β)

(i) 12% του $55\,240 = \dfrac{12}{100}\dfrac{55\,240}{1} = \dfrac{12(5524)}{10} = \dfrac{66\,288}{10}$
$= 6628.8 =$ αύξηση

Επομένως το ποσό της αύξησης είναι £6628.8

(ii) Ο νέος μισθός είναι $£55\,240 + £6628.8 = £61\,868.8$

Εναλλακτικά, ο μισθός αντιστοιχεί στο 112% του αρχικού και μπορεί να υπολογιστεί ως

$$55\,240 \times \left(\frac{112}{100}\right) = £61\,868.8$$

(γ) Έστω ότι η τιμή για το 2007 είναι η τιμή έτους βάσης. Η τιμή για το 2013 αντιστοιχεί στο 60% της τιμής για το 2007, δηλαδή τιμή του 2013 = 60% $\times$ την τιμή έτους βάσης.

Άρα, $£63\,400 = 60\%$ της τιμής έτους βάσης και θέλουμε να βρούμε το 100% της τιμής έτους βάσης.

Μέθοδος

$$63\,600 = \frac{60}{100} \times \text{τιμή έτους βάσης} \qquad 60\% \times \text{τιμή έτους βάσης}$$

$$\frac{63\,600}{60} = \frac{1}{100} \times \text{τιμή έτους βάσης} \qquad \text{βρίσκουμε το } 1\% \text{ της τιμής έτους βάσης}$$

$$\frac{63\,600}{60} \times \frac{100}{1} = \frac{100}{100} \times \text{την τιμή έτους βάσης} \qquad 100\% \text{ της τιμής έτους βάσης}$$

$$106\,000 = \text{τιμή έτους βάσης}$$

Επομένως, το 2007, η τιμή του διαμερίσματος ήταν $£106000$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥ 1.2

Ποσοστά και ανισώσεις

1. Να σχεδιαστούν τα διαστήματα που ορίζονται από τις παρακάτω ανισότητες πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών:

(α) $x > 2$ (β) $x < 25$ (γ) $x > -4$ (δ) $x \geq -1.5$ (ε) $-4 \geq x$ (στ) $60 < x$

2. Να επιλυθούν οι παρακάτω ανισότητες, δικαιολογώντας τη λύση. Να σχεδιαστεί η ανισότητα πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

(α) $x - 25 > 7$ (β) $5 < 2x + 15$ (γ) $\frac{25}{x} < 10$ (δ) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{17}{6}$
(ε) $3x - 29 \leq 7x + 11$

3. Να υπολογιστούν: (α) το 12% του 5432.7, (β) το 85% του 23.65, (γ) το 11.5% του 6.5.

4. Μια αλυσίδα ταχυεστιατορίων προτίθεται να αυξήσει το ημερομίσθιο κατά 14%. Αν το τωρινό ημερομίσθιο είναι £5.65, να υπολογιστούν: (α) η αύξηση του ημερομισθίου και (β) το νέο ημερομίσθιο.

5. Το 2016 η τιμή ενός υπολογιστή θα είναι κατά 35% χαμηλότερη από την αντίστοιχη το 2013. Αν η τιμή το 2016 είναι £910, να υπολογιστεί η τιμή το 2013.

6. Μια εταιρεία που παράγει εκτυπωτές προτίθεται να αυξήσει την εβδομαδιαία παραγωγή κατά 6%. Να υπολογιστεί η προβλεπόμενη εβδομαδιαία παραγωγή της εταιρείας για τις επόμενες τρεις εβδομάδες (στον πλησιέστερο ακέραιο) αν η τωρινή εβδομαδιαία παραγωγή είναι 720.

7. Μια εταιρεία σχεδιάζει να καταργήσει σταδιακά ένα συγκεκριμένο μοντέλο αυτοκινήτου μειώνοντας την παραγωγή κατά 20% κάθε εβδομάδα. Αν η τωρινή παραγωγή είναι 400 αυτοκίνητα κάθε εβδομάδα, να υπολογιστεί ο αριθμός των αυτοκινήτων που θα παραχθούν κάθε εβδομάδα για τις επόμενες έξι εβδομάδες.

8. Η τιμή ενός καινούριου πλυντηρίου είναι £485. Στην τιμή περιλαμβάνεται ΦΠΑ 21% επί της τιμής πώλησης. Να υπολογιστεί η τιμή χωρίς ΦΠΑ.

9. Ένας λιανέμπορος πωλεί μια τηλεόραση προς £658. Αν η τιμή κόστους ήταν £480, να υπολογιστεί το κέρδος του λιανοπωλητή ως ποσοστό επί της τιμής κόστους. (**Σημείωση:** κέρδος = τιμή πώλησης – τιμή κόστους.)

10. Ένας λιανέμπορος πωλεί μια συσκευή εγγραφής βίντεο προς £880. Η τιμή περιλαμβάνει 21% ΦΠΑ και 34% κέρδος. Να υπολογιστεί η τιμή κόστους της συσκευής εγγραφής βίντεο.

11. Ένας λιανέμπορος αγοράζει τηλεοράσεις προς £425 έκαστη. Στη συνέχεια θα πρέπει να αποδώσει ΦΠΑ 21%. Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή πώλησης κάθε τηλεόρασης προκειμένου να έχει κέρδος 25% επί της τιμής κόστους;

12. 154 φοιτητές παρακολουθούν μια διάλεξη μαθηματικών. Εάν 22 φοιτητές απουσιάζουν, να υπολογιστεί το ποσοστό των φοιτητών που απουσιάζουν.

13. Ένα ακίνητο κόστιζε €365 000 το 2003 και €332 150 το 2013.

(α) Να υπολογιστεί η μεταβολή στην αξία του ακινήτου μεταξύ 2003 και 2013 ως ποσοστό της αποτίμησής του για το 2003.

(β) Να υπολογιστεί το τέλος χαρτοσήμου που θα έπρεπε να καταβληθεί εάν το ακίνητο είχε πωληθεί το 2003, όταν το τέλος χαρτοσήμου ανερχόταν σε 6.0% επί της τιμής για ακίνητα αξίας έως και €381 000.

(γ) Εάν η αξία των ακινήτων εκτιμάται ότι θα αυξηθεί κατά 2% ετησίως μεταξύ 2013 και 2016, να υπολογιστεί η προβλεπόμενη τιμή του ακινήτου για τα έτη 2014, 2015 και 2016.

14. Ο αριθμός των πρωτοετών που εγγράφονται σε ένα κολέγιο για το έτος 2006 ήταν 348 φοιτήτριες και 676 φοιτητές.

(α) Ποιο είναι το ποσοστό των (i) φοιτητών και (ii) φοιτητριών;

(β) Να υπολογιστεί το ποσοστό επί τοις εκατό των (i) φοιτητών και (ii) φοιτητριών.

(γ) Αν η αναλογία μεταξύ των φύλων ήταν 40% άνδρες και 60% γυναίκες, να υπολογιστεί ο αριθμός των φοιτητών και των φοιτητριών.

15. (α) Μια μεγάλη παρτίδα εξαρτημάτων από τον προμηθευτή Α εκτιμάται ότι περιέχει 4% ελαττωματικά τεμάχια.

Εάν παραλήφθηκε μια παρτίδα 8500 εξαρτημάτων, να υπολογιστούν:

(i) Το ποσοστό των ελαττωματικών εξαρτημάτων.

(ii) Ο αριθμός των ελαττωματικών εξαρτημάτων.

(β) Τα εξαρτήματα από τον προμηθευτή Β περιέχουν 2.5% ελαττωματικά τεμάχια. Εάν παραλήφθηκε μια παρτίδα $12\,400$ εξαρτημάτων, να υπολογιστούν:

(i) Το ποσοστό των ελαττωματικών εξαρτημάτων.

(ii) Ο αριθμός των ελαττωματικών εξαρτημάτων.

(γ) Οι παρτίδες και των δύο προμηθευτών ενώνονται και οδηγούνται στο τμήμα παραγωγής ενός εργοστασίου συναρμολόγησης.

(i) Να υπολογιστεί ο αριθμός των ελαττωματικών εξαρτημάτων στη συνδυασμένη παρτίδα.

(ii) Να υπολογιστεί το ποσοστό επί τοις εκατό των ελαττωματικών εξαρτημάτων στη συνδυασμένη παρτίδα.